OSMANIA UNIVERSITY
جامعۂ عثمانیہ

سلسلۂ مطبوعاتِ جامعۂ عثمانیہ

تفرقی مساواتیں

3

مُصنّفہٗ

ایچ۔ ٹی۔ ایچ۔ پیاجو۔ ایم۔ اے۔ ڈی۔ ایس۔ سی
پروفیسر ریاضی، یونیورسٹی کالج، ناٹنگھم
سابق سینیر اسکالر سینٹ جانز کالج، کیمبرج

مُترجمہٗ

محمد نذیرالدین صاحب۔ ایم۔ اے
سابق رکن دارالترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی

۱۳۶۳ھ م ۱۳۵۳ف م ۱۹۴۴ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکارِ عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

تفرقی مساواتیں

پہلا باب

تمہید اور تعریفات۔ اسقاط۔ ترسیمی تعبیر

دوسرا باب

پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں

تیسرا باب

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

چوتھا باب

سادہ جزئی تفرقی مساواتیں

پانچواں باب

وہ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں

چھٹا باب

نادر حل

ساتواں باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں کے لیے متفرق طریقے

آٹھواں باب

تفرقی مساواتوں کے حلوں سے عددی تقرب

نواں باب

سلسلوں میں حل۔ فرابینس کا طریقہ

دسواں باب

پکرڈ، کوشی، اور فرابینس کے مسائل موجودگی

گیارہواں باب

تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتیں اور متناظر منحنی اور سطحیں

بارہواں باب

پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ مخصوص طریقے

تیرہواں باب

پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں عام طریقے

چودھواں باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

پندرھواں باب

متفرق طریقے

ضمیمہ ا

صفحہ

ضمیمہ ب

ضمیمہ ج

ضمیمہ د

تمہید

سوفس لائی (Sophus Lie) نے کہا ہے کہ تفرقی مساواتوں کا نظریہ ریاضیات جدید کی اہم ترین شاخ ہے۔ یہ مضمون گویا ایک مرکزی محل اختیار کرتا ہے جس سے متعدد سمتوں میں اس کی توسیع کی شاخیں پھیلی ہوئی ہیں۔ اگر ہم اُس شاخ پر چلیں جو خالص تحلیلی ہے تو ہم جلد ہی لامتناہی سلسلوں، موجودگی کے مسئلوں، اور تفاعلوں کے نظریہ کی بحث پر پہنچتے ہیں۔ لیکن ایک دوسری شاخ پر چلیں تو منحنیوں اور سطحوں کے تفرقی علم ہندسہ پر آتے ہیں۔ ان دو کے درمیان وہ شاخ ہے جس کو سب سے پہلے سوفس لائی نے دریافت کیا تھا اور وہ استحالہ کے مسلسل گروہوں اور ان کی ہندسی تعبیر پر ختم ہوتی ہے۔ اس سے ہٹ کر دوسری سمت میں تمام قسم کے حیلی اور برقی ارتعاشات اور گمگ کے اہم مظاہر کا علم حاصل ہوتا ہے۔ بعض جزئی تفرقی مساواتوں سے حرارت کے ایصال، برقی موجوں کے انتقال، اور علم طبیعات کی بہت سی دیگر شاخوں کے علم کا آغاز ہوتا ہے۔ طبیعی کیمیا اور تخمینی عمل کا کلیہ بڑی حد تک بعض تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔

اِس کتاب کا مقصد یہ ہے کہ اِس مضمون کے مرکزی حصوں کو اِس قدر سادہ شکل میں بیان کیا جائے جس قدر ممکن ہے تاکہ وہ طلبا اس سے استفادہ کر سکیں ہو جو اس مضمون سے واقف نہیں ہیں اور ساتھ ہی اُن

مختلف سمتوں کی جانب اشارہ کر دیا جائے جس میں اِس مضمون کی توسیع ممکن ہے۔
متن کا بیشتر حصہ اور اِس میں مندرجہ مثالیں بہت آسان ہیں۔ قارئین
سے صرف اِس امر کی توقع کی گئی ہے کہ وہ تفرقی اور تکملی احصاء کے
مبادی اور کچھ محددوں کے علم ہندسہ سے واقف ہوں گے۔ ابواب کے
ختم پر جو متفرق مثالیں دی گئی ہیں وہ قدرے مشکل ہیں۔ اِنمیں کچھ اہم
مسئلے شامل ہیں لیکن اِن کے ساتھ ہی کچھ ایسے اشارے درج کر دئے
گئے ہیں جن کی مدد سے ان کو حل کیا جا سکتا ہے۔ اِن میں ہندسی اور
طبیعاتی اطلاقات بھی دئے گئے ہیں لیکن سوالوں کے بیان کرنے میں
بڑی احتیاط ملحوظ رکھی گئی ہے تاکہ طبیعیات سے واقف ہونے کی ضرورت نہ رہے
مثلاً ایک جزئی تفرقی مساوات کو بعض خاص مستقلوں اور متغیروں کی
رقوم میں حل کرنے کے لیے کہا گیا ہے۔ اِس کو خالص ریاضی کا سوال
سمجھا جا سکتا ہے لیکن اس کے ساتھ ہی ایک نوٹ درج ہے جس میں
یہ بتایا گیا ہے کہ یہ سوال حرارت کے ایک مشہور تجربہ سے متعلق ہے
اور اُن مستقلوں اور متغیروں کا کیا مفہوم ہے جو اِس میں استعمال ہوئے
ہیں۔ آخر میں کتاب کے ختم پر ۱۱۵ مثالیں بہت مشکل دی گئی
ہیں اور اِن میں سے اکثر مختلف جامعات کے امتحانوں کے پرچوں
سے لی گئی ہیں۔ [میں جامعات لندن، شیفیلڈ، اور ویلز اور مطبع
جامعہ کیمبرج کے سنڈیکیٹ کا ممنون ہوں کہ اِن مثالوں کے اندراج
کی اجازت مجھے دی گئی] ۔ یہ کتاب بی۔ ایس۔ سی (لندن) آنرز یا کیمبرج
میتھیمیاٹیکل ٹرائی پاس حصۂ دوم کے شیڈیول (A) کے نصاب پر حاوی
ہے اور نیز اس میں کچھ وہ حصہ بھی شامل ہے جو ایم۔ ایس۔ سی (لندن)
اور میتھیمیاٹیکل ٹرائی پاس شیڈیول (B) کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔
ضمیمہ میں زائد مطالعہ کے لیے حوالے درج ہیں۔ حل شدہ یا حل طلب
مثالوں کی تعداد بہت زیادہ ہے اور حل طلب مثالوں کے جوابات
کتاب کے ختم پر دے دئے گئے ہیں۔

چند اہم امور کا ذکر نامناسب نہ ہوگا۔ پہلے باب میں جو ترسیمی طریقہ بیان کیا گیا ہے [یہ طریقہ اِس مقالہ کے مسودہ پر جو ڈاکٹر براڈ ٹسکی نے ازراہ مہربانی مجھے مستعار عنایت کیا تھا اور جس کو انہوں نے میتھیمیاٹیکل ایسوسی ایشن کے سامنے پڑھ کر سنایا تھا اور پروفیسر ٹیکو واڈیا کے ایک ایسے ہی مقالہ پر مبنی ہے] اِس سے پہلے کسی کتاب میں شائع نہیں ہوا۔ وہ باب جس میں عددی تکمل کے مضمون پر بحث کی گئی ہے معمول سے زیادہ تفصیلی بحث کا حامل ہے۔ اِسمیں خاص کر رنج اور ہکرڈ کے طریقوں پر بحث کی گئی ہے لیکن ایک نیا طریقہ بھی جس کو میں نے وضع کیا ہے بیان کر دیا گیا ہے۔

مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتوں پر جو باب ہے اُس میں ایسے غیر اطمنان بخش ثبوتوں سے اجتناب کیا گیا ہے جنمیں "لامتناہی مستقل" شامل ہوتے ہیں۔ اِس میں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ خاص تکملوں کے دریافت کرنے میں عامل عف کا استعمال اُس سے زیادہ توجہ کا محتاج ہے جو ابتک اسے دیجاتی رہی ہے۔ اِس باب میں جو طریقہ اختیار کیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ اِس عامل کو ایک جبری علامت کے طور پر بلا خوف استعمال کر کے ایک نتیجہ حاصل کیا گیا ہے اور اِس کی تصدیق راست تفرق سے کی گئی ہے۔

اِس کے بعد وہ باب آتا ہے جس میں سادہ جزئی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے [اِس کا انحصار ریمن کی کتاب "Partielle Differential-gleichungen" ... پر ہے]۔ اِس میں جو طریقے درج ہیں وہ صریحاً پچھلے باب کے طریقوں کی توسیعات ہیں اور اِن کی طبیعاتی اہمیت اتنی زیادہ ہے کہ اِن کو کسی آئندہ باب پر منحصر رکھنا مناسب نہ تھا۔

اُن حصوں میں جن میں لگرانج کی خطی جزئی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے ایم۔ جے۔ ایم ہل کے حالیہ مقالہ سے دو

مثالیں لی گئی ہیں جن سے موصوف کے اُن طریقوں کی توضیح ہوتی ہے جو خاص تکملوں کے حصول کے لئے استعمال کئے گئے ہیں۔

سلسلوں میں جو حل حاصل کئے گئے ہیں اُن میں فرابنیس کے طریقہ کو سب سے زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔ مثالوں کو حل کر کے اِس طریقہ کو سمجھانے میں پورا ایک باب وقف کیا گیا ہے۔ اِس کے بعد ایک بہت مشکل باب آتا ہے جس میں اُن مفروضات کو صحیح ثابت کیا گیا ہے جو اول الذکر باب میں مان لیے گئے ہیں اور نیز استدقاق کے مشکل مسئلوں پر بحث کی گئی ہے۔ اِس میں اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جو مشکل پیدا ہوتی ہے اور پیچیدہ ثبوتوں کے عام تخیلات کو بہت صاف صاف واضح طور پر بیان کیا جائے۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ جب ایک طول طویل حرفی ثبوت سے طالب علم دوچار ہوتا ہے تو وہ تفصیلات سے اِسقدر پریشان ہوجاتا ہے کہ اِس کو عام نظریہ کا بہت کم اندازہ ہوتا ہے۔ اِس باب کی تیاری میں مسٹر ایس پولرڈ بی۔ اے ٹرنیٹی کالج کیمبرج نے جو مدد کی ہے اِس کا میں شکر گذار ہوں۔ یہ باب اِس کتاب کا وہ حصہ ہے جو اعلیٰ ریاضیات سے متعلق ہے اور اِس کے سمجھنے کے لئے لامتناہی سلسلوں سے واقف ہونے کی ضرورت ہے۔ جہاں کہیں ایسے مسئلے استعمال ہوئے ہیں وہاں اُن معیاری کتابوں کا حوالہ دیا گیا ہے جن میں یہ مسائل مِل سکتے ہیں۔

میں پروفیسر ڈبلیو۔ پی۔ ملن جنرل ایڈیٹر بلیس متھیمیاٹیکل سیریز کا اِن کی مسلسل ہمت افزائی اور تنقید کے لئے اور مسٹر جے۔ مارشل ایم۔ اے، بی۔ ایس۔ سی اور مس ایچ۔ ایم۔ براوننگ ایم۔ ایس۔ سی کا اِن کے اُس کام کے لیے جو انہوں نے مثالوں کی تصدیق اور شکلوں کے کھینچنے میں کیا ہے بہت ممنون اور شکر گذار ہوں۔

کوئی تصحیح یا مشورہ بڑی ممنونیت کے ساتھ قبول کیا جائیگا۔

ایچ۔ ٹی۔ ایچ۔ پیاجو
یونیورسٹی کالج ناٹنگھم　　فروری سنہ ۱۹۲۰ء

۷۸۶

سنہ ۱۹۲۸ء

تمہید اڈیشن

اِس اڈیشن میں ایک طویل نئے باب کا اضافہ کیا گیا ہے جس کی نوعیت ایک ضمیمہ کی سی ہے، اِس میں اُن مشکلوں سے جو نادر حلوں کے نظریہ میں پیش آتی ہیں بحث کی گئی ہے، اور ممیزوں کے طریقوں کو اماطوں (Loci) کے طور پر پیش کیا گیا ہے جس سے بہت کم لوگ واقف ہیں، نیز ریکٹی کی مساوات، کلی تفرقی مساواتوں کے لیے دو زائد طریقے (میئر کا عام طریقہ اور متجانس مساواتوں کے لیے متکمل جزو ضربی کا استعمال)، دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتوں کے حل سلسلوں میں (فوک کا مسئلہ، معمولی اور نادر نقطے، فو کی نمونہ کی مساواتیں ممیز نما، طبعی اور تحت طبعی تکملے) ریاضیاتی طبیعیات کی چند مساواتیں (بالخصوص مرتعش ڈوریوں کی مساوات اور موجوں کی تین بعدی مساوات) اور تقریبی عددی حل (آدم کا طریقہ اور رمس کی حالیہ تحقیق) بھی بیان کئے گئے ہیں۔ کتاب کے دوسرے حصوں کی نظرثانی کی گئی اور چند زائد مثالوں کا اضافہ کیا گیا ہے۔ جوابوں کو جہاں ضرورت محسوس ہوئی بدل دیا گیا ہے۔

میں اپنے متعدد احباب کا اُن کے قیمتی مشوروں اور مدد کے لیے ممنون ہوں اِن میں خاص طور پر مسٹر ایچ۔ بی۔ میچل سابق پروفیسر جامعہ کولمبیا پروفیسر ای۔ ایچ نیویلی جامعہ ریڈنگ اور مسٹر الیف انڈرووڈ قابل ذکر ہیں۔

ایچ۔ ٹی۔ ایچ پیاجو

مئی سنہ ۱۹۲۸ء

۴۸۶

تاریخی تعارف

تفرقی اور تکملی احصاء کی ایجاد کے بعد بہت جلد تفرقی مساوات کے علم کا آغاز ہوا جو صریحاً تفرقی اور تکملی احصاء سے متعلق ہے۔ نیوٹن نے ۱۶۶۵ء میں تفرقی احصا کی (Fluxional) شکل کا انکشاف کیا اور اس کے گیارہ سال بعد ہی اس نے ۱۶۷۶ء میں ایک تفرقی مساوات کو ایک لا متناہی سلسلہ کے استعمال سے حل کیا۔ لیکن یہ نتیجے ۱۶۹۳ء تک شائع نہیں ہوئے اور یہ سنہ وہی ہے جس میں لیب نیز کی تصنیف شائع ہوئی میں ایک تفرقی مساوات کا ذکر کیا گیا ہے (لیب نیز نے ۱۶۸۴ء جس میں تفرقی احصا پر ایک مضمون لکھا تھا)۔

اس کے بعد چند سال کے اندر ہی بڑی سرعت سے ترقی ہوئی۔ ۱۶۹۴ء تا ۱۶۹۷ء میں برنولی نے "متغیروں کو جدا کرنے" کے طریقہ کی توضیح کی اور یہ بتایا کہ پہلے رتبہ کی ایک متجانس تفرقی مساوات ایک ایسی مساوات میں تحویل کی جاسکتی ہے جس میں متغیر جدائی پذیر ہوتے ہیں۔ اس نے ان طریقوں کو قائم مرماہ پر استعمال کیا۔ وہ اور اس کا بھائی جیکب (جس کے نام پر" برنولی کی مساوات" مشہور ہے) بہت سی تفرقی مساواتوں کو ایسی شکلوں میں تحویل کرنے میں کامیاب ہوئے جن کو وہ حل کرسکتے تھے۔ مکمل اجزائے ضربی کو

غالباً یولر نے ۱۷۳۴ء میں اور (جداگانہ طور پر) فونٹین اور کلیرو نے دریافت کیا اگرچہ بعض محقق کہتے ہیں کہ اِن کا اِنکشاف لیب نیز نے کیا تھا۔ نادر حل جن کا علم لیب نیز کو ۱۶۹۴ء میں اور بروک ٹیلر کو ۱۷۱۵ء میں ہوا بالعموم کلیرو (۱۷۳۴ء) کے نام سے منسوب کئے جاتے ہیں۔ لیب نیز نے اِن کی ہندسی تعبیر ۱۷۷۴ء میں بیان کی لیکن وہ نظریہ جو موجودہ شکل میں ہے اِس کے بہت بعد ۱۸۷۲ء میں کیلے نے اور ۱۸۸۸ء میں ایم۔ جے۔ ایم ہل نے بیان کیا۔

مستقل سروں والی دوسرے اور اِس سے اعلیٰ رتبہ کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے یولر سے منسوب ہیں۔ ڈلمبرٹ نے وہ صورت حل کی جن میں امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوتی ہیں۔ خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے علامتی طریقے تقریباً ایک صدی بعد لوبیاٹو نے ۱۸۳۷ء میں اور بُول نے ۱۸۵۹ء میں بیان کئے۔

پہلی جزئی تفرقی مساوات جس کا عِلم ہوا وہ تھی جس سے ایک مُرتعش ڈوری کی شکل حاصل ہوتی ہے۔ اِس مساوات پر جو دوسرے رتبہ کی ہے یُولر اور ڈلمبرٹ نے ۱۷۴۷ء میں بحث کی۔ لگرانج نے اِس مساوات کے حل کی تکمیل کی اور نیز اُن مقالوں میں جو ۱۷۷۲ء سے ۱۷۸۵ء تک اُس نے لکھے پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر بحث کی گئی ہے۔ اُس نے خطی مساوات کا عام تکملہ معلوم کیا اور ممکن تکملوں کی مختلف قسموں کو دریافت کیا جبکہ مساوات خطی نہ ہو۔

یہ نظریئے تاحال نامکمل ہیں۔ کرسٹل نے ۱۸۹۲ء میں اور ہل نے ۱۹۱۷ء میں اِس مضمون میں کچھ اضافہ کیا ہے۔ پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے دوسرے طریقے چارپی (۱۷۸۴ء) اور جیکوبی (۱۸۳۶ء) نے بیان کئے۔ اِس سے اعلیٰ رتبہ کی

مساواتوں کے لیے اہم ترین تحقیقاتیں لاپلاس (سنہ ۱۷۷۳ء)، مونگے (سنہ ۱۷۸۴ء)، امپیر (سنہ ۱۸۱۵ء) اور ڈاربو (سنہ ۱۸۷۰ء) نے کی ہیں۔

تقریباً سنہ ۱۸۰۰ء تک تفرقی مساواتوں کا مضمون اپنی ابتدائی شکل میں یعنی ایک ایسی شکل میں حل معلوم کرنا جس میں معلومہ تفاعلوں (یا ان کے تکملوں) کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہو بہت کچھ اسی حالت میں تھا جس میں وہ آج ہے۔ اولاً علمائے ریاضی کو یہ امید تھی کہ ہر تفرقی مساوات کو اس طریقہ پر حل کیا جا سکتا ہے لیکن ان کی کوششیں بے نتیجہ ثابت ہوئیں جس طرح کہ متقدمین پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی عام جبری مساوات کو حل کرنے میں ناکام ہوئے تھے۔ یہ مضمون اب بدل گیا ہے اور تفاعلوں کے نظریہ سے بہت قریب ہو گیا ہے۔ کوشی نے سنہ ۱۸۲۳ء میں یہ ثابت کیا کہ وہ لامتناہی سلسلہ جو ایک تفرقی مساوات سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہوتا ہے اور اس طرح اس نے حقیقت میں ایک ایسے تفاعل کی تعریف کی جو تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ تفرقی مساواتوں کے مطالعہ کے اس دوسرے دور کی تحقیقاتوں میں استدقاق کے سوالوں (کوشی نے سب سے پہلے استدقاق کی شرطیں بیان کیں) پر بڑی توجہ کی گئی ہے بدقسمتی سے اس کی وجہ سے یہ مضمون بہت نظری اور طالب علم کے لیے بہت مشکل ہو جاتا ہے۔ پہلے دور میں مساواتیں نہ صرف خود سادہ تر تھیں بلکہ ان کا مطالعہ علم حیل اور طبیعات کے سوالوں کے سلسلہ میں کیا جاتا تھا اور حقیقت یہ ہے کہ اس کام کے آغاز کی وجہ یہی علوم تھے۔

کوشی کی تحقیقاتوں کو برائٹ اور بوکو (سنہ ۱۸۵۶ء) نے جاری رکھا اور ایک نیا طریقہ یعنی "متواتر تقربات" کا پکرڈ (سنہ ۱۸۹۰ء) نے ایجاد کیا۔ فکس (سنہ ۱۸۶۶ء) اور فرابنیس (سنہ ۱۸۷۳ء) نے متغیروں والی دوسرے اور اعلیٰ رتبہ کی خطی مساواتوں کی تحقیق کی۔ مسلسل گروہوں کے

لائی کے نظریہ سے (۱۸۸۴ء سے) بظاہر غیر متعلق طریقوں میں ربط و اتحاد کا انکشاف ہوا۔ شارز، لیین، اورگُرسے نے اپنے کام کو ترسیمی طریقوں کی امداد سے آسان تر کردیا اور واڈیا (۱۹۱۷ء) کے حالیہ مقالہ میں بِکرڈ اور پوائنکارے کے نتیجوں کی ترسیمی تعبیر درج ہے۔ رُنجے اور دیگر علما نے عددی تقربات سے بحث کی ہے۔

دیگر تاریخی حوالے کتاب میں جہاں اِس کی ضرورت معلوم ہوئی بیان کر دیے گئے ہیں۔ اِس سے زیادہ تفصیلی معلومات راوز بال کی کتاب شارٹ ہسٹری آف میتھیمیٹکس میں ملیں گی۔

$\frac{۷۸۶}{۹۲}$

تفرقی مساواتیں

(۱)

پہلا باب

تمہید اور تعریفات۔ اسقاط۔ ترسیمی تعبیر

۱ ــ نمونوں

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = -\text{ف}^{۲}\text{ما}\text{ ،} \quad \dots\dots\dots (۱)$$

$$\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}} + ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۱۰\,\text{ما} = \text{قو}^{-۳\text{لا}}\,\text{جب}\,۵\,\text{لا}\text{ ،} \quad \dots\dots\dots (۲)$$

$$\left[۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}} = ۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\text{ ،} \quad \dots\dots\dots (۳)$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{\text{ما}^{\frac{۱}{۲}}\left(۱ + \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\right)}\text{ ،} \quad \dots\dots\dots (۴)$$

$$\frac{\text{جف}^{۲}\text{ما}}{\text{جف ت}^{۲}} = \text{ا}^{۲}\frac{\text{جف}^{۲}\text{ما}}{\text{جف لا}^{۲}}\text{ ،} \quad \dots\dots\dots (۵)$$

کی مساواتیں جن میں تفرقی سر شامل ہوں تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

۲ — جبر و مقابلہ، علم ہندسہ، علم الحیل، طبیعیات، اور کیمیا کے متعدد مسئلوں سے تفرقی مساواتیں پیدا ہوتی ہیں۔ اِن کی مثالیں اِس کتاب کے مختلف مقاموں پر دی جائیں گی اور اِن مثالوں میں ارتقاء، تماس، انحناء، لفاف، حیلی نظاموں کے اور برقی رووں کے اہتزاز، شہتیروں کا جھکاؤ، حرارت کا ایصال، محلولوں کا نفوذ، کیمیائی تعاملوں کی رفتار وغیرہ پر اطلاق شامل ہوں گے۔

۳ — تعریفیں — وہ تفرقی مساواتیں جن میں صرف ایک غیر تابع (بدل) متغیر شامل ہو مثلاً (۱)، (۲)، (۳) اور (۴)، معمولی تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

وہ تفرقی مساواتیں جن میں دو یا دو سے زیادہ غیر تابع متغیر اور اِن کے لحاظ سے جزئی تفرقی سر شامل ہوتے ہیں مثلاً (۵) جزئی تفرقی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

(۲) نمونہ (۱) جیسی مساوات جس میں دوسرا تفرقی سر شامل ہو اور اِس سے اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر شامل نہ ہوں دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات (۴) پہلے رتبہ کی ہے، (۳) اور (۵) دوسرے رتبہ کی ہیں، اور (۲) تیسرے رتبہ کی ہے۔

مساوات کا درجہ وہی ہوتا ہے جو اِس میں شامل ہونیوالے اعلیٰ ترین تفرقی سر کا ہے جبکہ مساوات کو تفرقی سروں کے لحاظ سے منطق اور صحیح بنا لیا گیا ہو۔ چنانچہ مساواتیں (۱)، (۲)، (۴)، اور (۵) پہلے درجہ کی ہیں۔

(۳) کو منطق بنانے کے لیے اِس کا مربع لینا ہوگا۔ چنانچہ

لہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) میں لا غیر تابع متغیر اور ما تابع متغیر ہے۔
مساوات (۵) میں لا اور ت دو غیر تابع متغیر اور ما تابع متغیر ہیں۔

اِس کے بعد معلوم ہوگا کہ وہ دوسرے درجہ کی ہے کیونکہ اِس میں $\left(\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}\right)$ کا مُربع شامل ہے۔

درجہ کی اِس تعریف سے لا یا ما کا منطق یا صیح شکل میں واقع ہونا ضروری نہیں ہے۔

دوسری تعریفیں حسب موقع اور ضرورت بیان کیجائیں گی۔

۴ ۔ اسقاط کے ذریعہ تفرقی مساواتوں کی ساخت ۔

اب ہم اسقاط کے مسئلہ پر غور کریں گے کیونکہ اِس سے یہ اندازہ ہوگا کہ تفرقی مساوات کا حل کس قسم کا ہوا کرتا ہے۔ ذیل میں چند مثالیں دیجاتی ہیں جن میں اختیاری مستقلوں کو ساقط کرکے معمولی تفرقی مساواتیں حاصل کی گئی ہیں ۔ آئندہ (چوتھے باب میں) چلکر ہم دیکھیں گے کہ جزئی تفرقی مساواتوں کو اختیاری مستقلوں کے یا اختیاری تفاعلوں کے اسقاط سے کس طرح بنایا جاسکتا ہے۔

۵ ۔ حل طلب مثالیں ۔

(۱) سادہ موسیقی حرکت کی مساوات لا = ا جم (ف ت - عہ) پر غور کرو۔ ہم اختیاری مستقلوں ا اور عہ کو ساقط کرینگے۔

تفرق کرنے پر، $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = -\text{ف ا جب (ف ت - عہ)}$

اور $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} = -\text{ف}^{2}\,\text{ا جم (ف ت - عہ)} = -\text{ف}^{2}\,\text{لا}$

اِس لیے مطلوبہ نتیجہ $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} = -\text{ف}^{2}\,\text{لا}$ ہے جو دوسرے رتبہ کی

ایک مساوات ہے۔ اِس کی تعبیر یہ ہے کہ اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے مبداء سے فاصلہ۔

(۲) اِس آخری نتیجہ سے ف کو ساقط کرو۔

پھر تفرق کرنے پر، $\frac{\text{فر}^3\text{لا}}{\text{فرت}^3} = -\text{ف}^2 \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

$$\therefore \frac{\frac{\text{فر}^3\text{لا}}{\text{فرت}^3}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}} = -\text{ف}^2 = \frac{\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}}{\text{لا}}$$ (آخری نتیجہ کی رو سے)

پس ضرب دینے پر، $\text{لا} \times \frac{\text{فر}^3\text{لا}}{\text{فرت}^3} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \times \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}$

جو تیسرے رتبہ کی مساوات ہے۔

(۳) (۳) اُن تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات حاصل کرو جن کا محور محور لا ہو۔

ایسے کسی مکافی کی مساوات کی شکل

$$\text{ما}^2 = ۴\text{ا}(\text{لا} - \text{ھ})$$

ہوگی۔ دوبار تفرق کرنے پر حاصل ہوگا

$$۲\,\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۴\text{ا}$$

یعنے $\text{ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\text{ا}$

اور $\text{ما}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = ۰$ جو دوسرے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

(۱) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$ ، (۲) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{جم}\,۳\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,۳\text{لا}$ ،

(۳) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{ب}\,\text{لا}}$ ، (۴) $\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^{۳}$

(۵) اگر $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ ، نیز اِس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۶) ثابت کرو کہ مبداء میں سے گذرنے والے کسی خطِ مستقیم کے لیے $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ ۔ اِس کی تعبیر بیان کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ خواہ کوئی خطِ مستقیم ہو اُس کے لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$ ۔ اِس کی تعبیر بیان کرو۔

۶ — ن اختیاری مستقلوں کو ساقط کرنے کے لیے (بالعموم) ن ویں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات ضروری ہوتی ہے۔

طالب علم دفعہ ۵ کی مثالوں سے اِس نتیجہ پر پہنچ چکا ہوگا۔ اگر ہم ایک مساوات کو جس میں ن اختیاری مستقل ہوں ن دفعہ تفرق کریں تو کل (ن + ۱) مساواتیں حاصل ہونگی اور اِن سے ن مستقل مقداروں کو ساقط کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ نتیجہ میں ن واں تفرقی سر شامل ہوتا ہے اِس لیے اِس کا رتبہ ن ہے[۱]۔

[۱] یہ استدلال وہی ہے جو عام طور پر دیا جاتا ہے لیکن اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو اِس استدلال میں چند خامیاں نظر آئیں گی۔ یہ بیان کہ کسی (ن + ۱) مساواتوں سے ن مقداروں کو ساقط کیا جا سکتا ہے خواہ اِن مساواتوں کی نوعیت کچھ ہی ہو،

۷ ۔ ن ویں رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے عام سے عام حل میں ن اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں۔ (۴۲)

یہ غالباً اوپر کے مسئلہ کے عکس سے جو یہ ہے کہ ن اختیاری مستقلوں کو ن ویں رتبہ کی ایک تفرقی مساوات سے بالعموم ساقط کیا جا سکتا ہے بالکل واضح نظر آئے لیکن اسکا باقاعدہ ثبوت آسان نہیں ہے۔

تاہم اگر یہ مان لیا جائے ف۱ کہ تفرقی مساوات کا حل ایسا ہے کہ

بقیہ صفحہ گذشتہ۔ بہت عام ہے۔ ضروری اور کافی شرطوں کا ٹھیک بیان بہت ہی پیچیدہ ہے۔

بعض اوقات (ن + ۱) سے کم مساواتوں کی ضرورت پڑتی ہے۔
ایک صریح مثال مساوات ما = (ا + ب) لا کی ہے جہاں دو اختیاری مستقل اس طریقہ پر واقع ہیں کہ وہ فی الحقیقت ایک مستقل مقدار کے مماثل ہیں۔
دوسری مثال ما^۲ = ۲ ا لا ما + ب لا^۲ ہے جو اسقدر صریح نہیں ہے۔
یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدا میں سے گذرتے ہیں، فرض کرو کہ یہ خطوطِ مستقیم ما = م۱ لا اور ما = م۲ لا ہیں، اِن میں سے ہر مساوات سے نتیجہ ما/لا = فرما/فرلا حاصل ہوتا ہے جو دوسرے رتبہ کی بجائے پہلے رتبہ کا ہے۔ ابتدائی مساوات کو تفرق کر کے اور ب کو ساقط کر کے طالب علم اِس نتیجہ کو حاصل کر سکتا ہے چنانچہ اس طرح حاصل ہو گا

(ما - لا فرما/فرلا)(ما - ا لا) = ۰

ف۱ آئندہ بابوں میں طالب علم کو معلوم ہو جائیگا کہ یہ مفروضہ ہمیشہ جائز نہیں ہے۔

اُس کو لا کی صعودی صحیح قوتوں کے ایک مستدق سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے تو یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اختیاری مستقلوں کی تعداد کیوں ن ہوتی ہے۔

مثلاً تیسرے رتبہ کی تفرقی مساوات $\frac{\text{ف}^{۳}\,\text{ما}}{\text{ف لا}^{۳}} = \frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ پر غور کرو۔

مان لو کہ $\text{ما} = \text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{۲}\frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}}} + \cdots$ ∞ تک۔

تب تفرقی مساوات میں درج کرنے پر حاصل ہوگا

$$\text{ا}_{۳} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا} + \text{ا}_{۵}\frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{\text{ن}-۳}}{|\underline{\text{ن}-۳}} = \text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳}\frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\frac{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}{|\underline{\text{ن}-۱}} + \cdots$$

اِس لیے

$$\text{ا}_{۳} = \text{ا}_{۱}،$$
$$\text{ا}_{۴} = \text{ا}_{۲}،$$
$$\text{ا}_{۵} = \text{ا}_{۳} = \text{ا}_{۱}،$$
$$\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}-۲} = \text{ا}_{\text{ن}-۴} = \text{وغیرہ}$$

پس $\text{ما} = \text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^{۳}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{|\underline{۵}} + \cdots\right) + \text{ا}_{۲}\left(\frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{|\underline{۴}} + \frac{\text{لا}^{۶}}{|\underline{۶}} + \cdots\right)$

$$= \text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{جبزلا} + \text{ا}_{۲}\,(\text{جمزلا} - ۱)$$

جس میں صرف تین اختیاری مستقل $\text{ا}_{۰}$، $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$ شامل ہیں۔

اِسی طرح کا استدلال مساوات

$$\frac{\text{فر}^{ن}\text{ما}}{\text{فرلا}^{ن}} = \text{ف}\left(\text{لا، ما، }\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\text{، }\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}\text{، }\ldots\text{، }\frac{\text{فر}^{ن-1}\text{ما}}{\text{فرلا}^{ن-1}}\right)$$

کے لیے بھی کیا جا سکتا ہے۔

حرکیات میں تفرقی مساواتیں عموماً دوسرے رتبہ کی ہوتی ہیں مثلاً $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ف}^{2}\text{ما} = 0$ جو سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے ۔ ایسا حل معلوم کرنے کے لیے جس میں اختیاری مستقل شامل نہ ہوں دو شرطوں کی ضرورت ہے مثلاً ما اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کی قیمتیں جبکہ ت = ۰ اِن سے ابتدائی ہٹاؤ اور رفتار معلوم ہوتے ہیں۔

۸ ۔ کامل ابتدائی ۔ خاص تکملہ ۔ نادر حل ۔

تفرقی مساوات کا وہ حل جس میں اختیاری مستقلوں کی پوری تعداد شامل ہو کامل ابتدائی کہلاتا ہے۔

کوئی حل جو کامل ابتدائی سے اِن مستقلوں کو مخصوص قیمتیں دیکر حاصل کیا گیا ہو خاص تکملہ کہلاتا ہے ۔

چنانچہ $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کا کامل ابتدائی (۵)

$$\text{ما} = \text{ا}_{0} + \text{ا}_{1}\,\text{جبزلا} + \text{ا}_{2}\,(\text{جمزلا} - 1)$$

یا $\text{ما} = \text{ج} + \text{ا}_{1}\,\text{جبزلا} + \text{ا}_{2}\,\text{جمزلا}$ جہاں $\text{ج} = \text{ا}_{0} - \text{ا}_{2}$

یا $\text{ما} = \text{ج} + \text{ا}\,\text{تو}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{تو}^{-\text{لا}}$ جہاں $\text{ا} = \frac{1}{2}(\text{ا}_{1} + \text{ا}_{2})$ اور $\text{ب} = \frac{1}{2}(\text{ا}_{2} - \text{ا}_{1})$

ہے ۔

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کامِل ابتدائی کو متعدد مختلف (لیکن حقیقت میں معادل) طریقوں پر اکثر لکھا جا سکتا ہے۔

حسب ذیل خاص تکملے ہیں:

ما = ۴ ، جبکہ ج = ۴ ، ا$_1$ = ا$_2$ = ۰ لیا جائے ،

ما = ۵ جیزلا ، جبکہ ا$_1$ = ۵ ، ج = ا$_2$ = ۰ ، لیا جائے ،

ما = ۶ جمزلا − ۴ ، جبکہ ا$_2$ = ۶ ، ا$_1$ = ۰ ، ج = −۴ لیا جائے ،

ما = ۲ + قو$^{\text{لا}}$ − ۳ قو$^{-\text{لا}}$ جبکہ ج = ۲ ، ا = ۱ ، ب = −۳ لیا جائے۔

بیشتر مساواتوں میں کامِل ابتدائی سے ہر حل اختیاری مستقلوں کو مناسب قیمتیں دیکر ماخوذ کیا جا سکتا ہے۔ لیکن بعض مستثنےٰ صورتوں میں ہمیں ایک ایسا حل حاصل ہوتا ہے جو مذکورۂ بالا طریقہ پر ماخوذ نہیں کیا جا سکتا۔ ایسے حل کو نادر حل کہتے ہیں۔ اِن پر چھٹے باب میں بحث کیجائے گی۔

حل طلب مثالیں

دفعہ ۷ کے طریقہ سے حل کرو:

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}$

(۲) $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = -\text{ما}$

(۳) ثابت کرو کہ یہ طریقہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$ کے لیے ناکام رہتا ہے۔

[لوک لا کو میکلارن کے سلسلہ میں نہیں پھیلایا جا سکتا]

(۴) ج کو ساقط کرکے اِس امر کی تصدیق کرو کہ ما = لا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}}$ کا

کامل ابتدائی ما = ج لا + $\frac{1}{ج}$ ہے۔ نیز تصدیق کرو کہ اِس تفرقی مساوات کا ایک حل $ما^2$ = ۴ لا ہے جس کو کامِل ابتدائی سے اخذ نہیں کیا جا سکتا (یعنے یہ حل نادر حل ہے)۔ ثابت کرو کہ یہ حل اُن خطوط کے نظام کا لفاف ہے جو کامِل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں۔ ترسیم سے اِس کو واضح کرو۔

۹۔ ترسیمی تعبیر۔ فرض کرو کہ لا اور ما کا ایک تفاعل ف (لا، ما) ہے جس کی قیمت لا اور ما کی محدود قیمتوں کے ہر زوج کے لیے کاملاً معین اور محدود[1] ہے۔ اب مساوات

$$\frac{فرما}{فرلا} = ف\ (لا، ما)$$

کے کامِل ابتدائی سے منحنیوں کا ایک قبیل تعبیر ہوگا۔ اِن منحنیوں کے قبیل کی عام شکل کو سرعت کے ساتھ مرتسم کرنے کے طریقہ[2] کی چند مثالیں ذیل میں دیجاتی ہیں۔ (۶)

اس قبیل کے منحنیوں کو مساوات کے مُمیّز (Characteristics) کہتے ہیں۔

مثال (۱) $\frac{فرما}{فرلا} = لا\ (ما - ۱)$

یہاں $\frac{فر^2 ما}{فرلا^2} = ما - ۱ + لا \frac{فرما}{فرلا} = (لا^2 + ۱)(ما - ۱)$

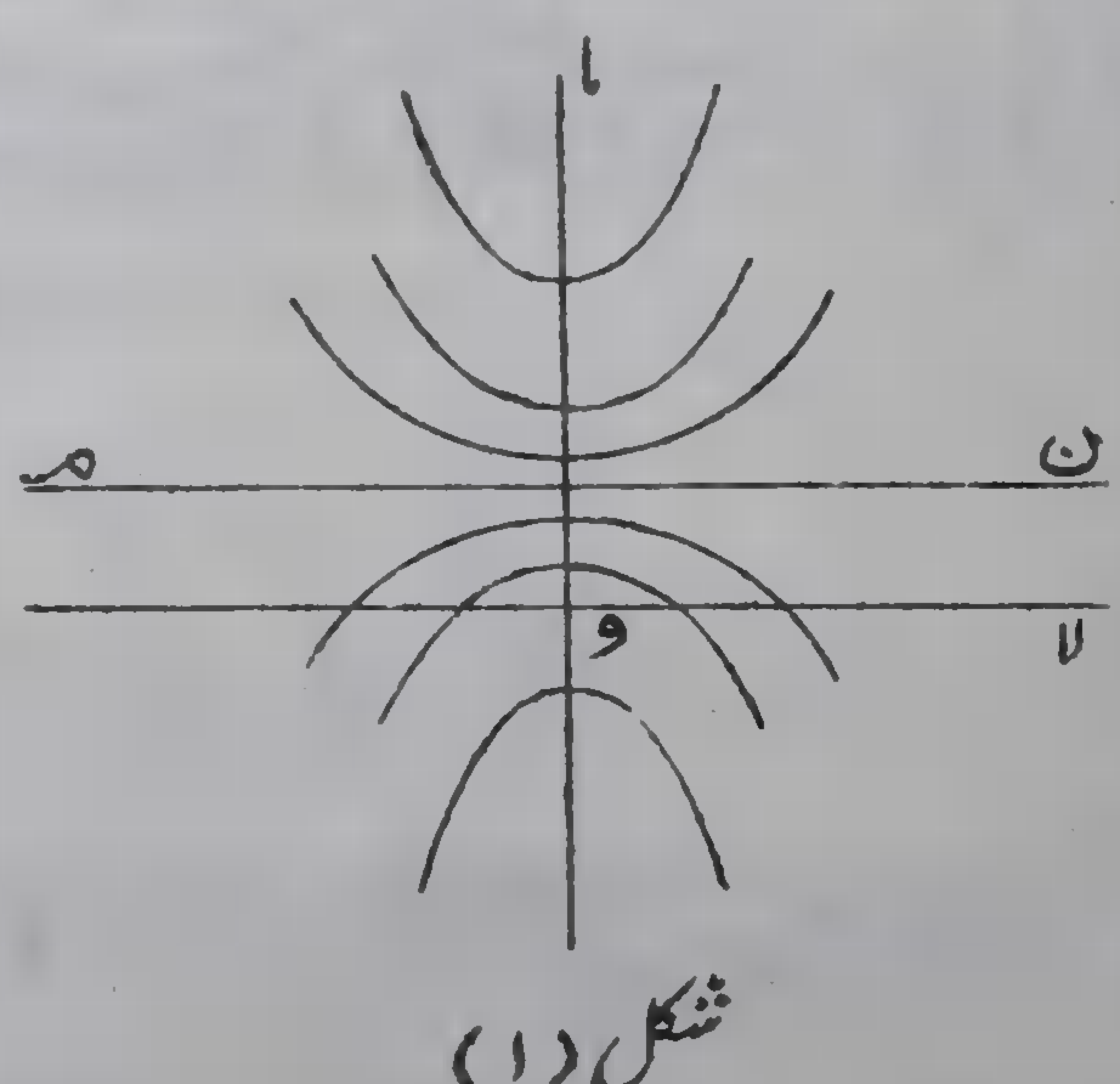
---

[1] یعنی وہ تفاعل جو $\frac{ما}{لا}$ کے مانند ہوں خارج ہو جاتے ہیں کیونکہ لا = ۰ اور ما = ۰ کے لیے وہ غیر متعین ہوتے ہیں۔

[2] یہ طریقہ ڈاکٹر ایس۔ براڈٹسکی (Brodetsky) اور پروفیسر ٹیکو واڈا (Takeo Wada) سے منسوب ہے۔

اب ہم جانتے ہیں کہ کسی منحنی کا تقعر اوپر دار ہوتا ہے جبکہ دوسرا تفرقی سر مثبت ہو۔ اس لئے مثال میں ممیز، ما = ۱ کے اوپر دار مقعر اور ما = ۱ کے نیچے نیچے دار مقعر ہونگے۔ اعظم یا اقل نقطے لا = ۰ پر واقع ہیں کیونکہ وہاں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0$ ۔ وہ ممیز جو ما = ۱ کے قریب ہیں اُن ممیزوں سے جو اِس سے دُور ہیں زیادہ چپٹے ہیں، اور ما = ۱ خود ایک ممیز ہے۔

اِن امور سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی عام شکل وہ ہے جس کو شکل (۱) میں دکھلایا گیا ہے:



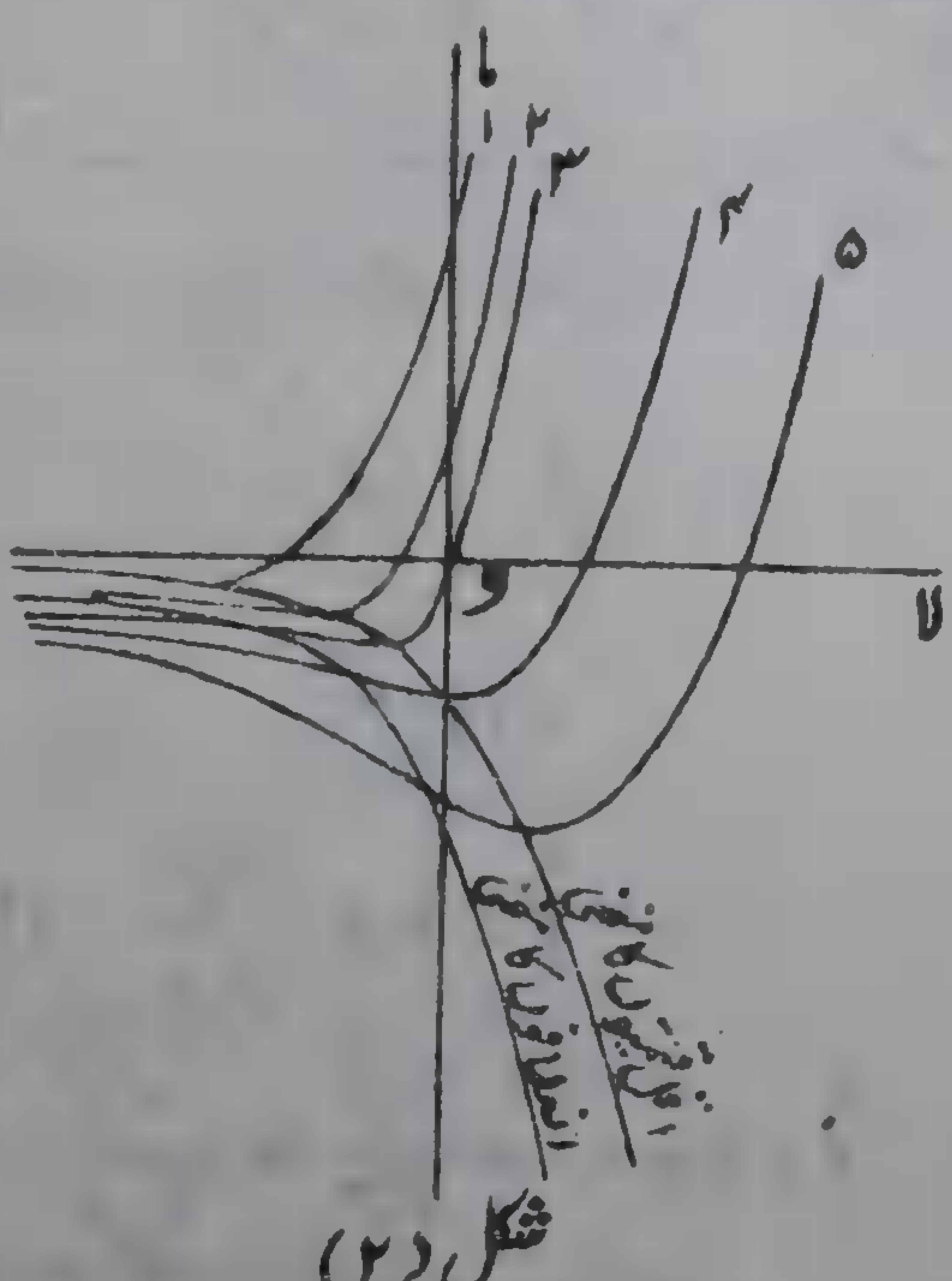
شکل (۱)

مثال (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما} + \text{قو}^{\text{لا}}$

یہاں $\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{قو}^{\text{لا}} = \text{ما} + 2\ \text{قو}^{\text{لا}}$

ہم اعظم اور اقل قیمتوں کے منحنی $\text{ما} + \text{قو}^{\text{لا}} = 0$ اور انعطافوں کے

منحنی ما + ۲ فوٓلا = ۰ کو مرتسم کرنے سے ابتدا کرتے ہیں - اس کے اُس میز پر
غور کرو جو مبدا میں سے گذرتا ہے - اِس نقطہ پر دونوں تفرقی سر مثبت
ہیں، اِس لیے جب لا بڑھتا ہے تو ما بھی بڑھتا ہے اور منحنی اوپر وار
مقعر ہے - اِس سے میز کا دائیں جانب کا حصہ معلوم ہوتا ہے جِس کو
شکل (۲) میں ۳ سے ظاہر کیا گیا ہے - اگر ہم اِس حصہ پر بائیں جانب (۷)
چلیں تو اقل قیمتوں کے منحنی سے گذر ینگے - نقطہ تقاطع پر مماس
و لا کے متوازی ہے - اس کے بعد پھر ہم چڑھینگے اور انعطافوں کے
منحنی پر پہنچینگے - اِس منحنی کو عبور کرنے کے بعد میز اوپر وار محدب
ہو جاتا ہے اور چڑھنا جاری رکھتا ہے - اب شکل سے یہ ظاہر ہے کہ
اگر وہ اقل قیمتوں کے منحنی کو مکرر قطع کرے تو مماس و لا کے متوازی نہیں
ہو سکتا اور اِس لیے میز و لا قطع ہی نہیں کر سکتا بلکہ اِس کا متقارب
بن جاتا ہے -



شکل (۲)

دوسرے میزوں کی نوعیت بھی اِس کے مشابہ ہے -

حل طلب مثالیں

(۱) فر ما / فر لا = ما (۱ - لا)،

(۲) فر ما / فر لا = لا² ما،

اور (۳) فر ما / فر لا = ما + لا²

کے ممیز مرتسم کرو۔

۱۰ — نادر نقطے — ایسی تمام مثالوں میں جو گذشتہ دفعہ کی مثالوں کی مانند ہوں مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہوا ایک اور صرف ایک ممیز حاصل ہوتا ہے۔ دو منحنیوں فر ما / فر لا = ۰ اور فر² ما / فر لا² = ۰ کو مرتسم کرکے ہم باسانی ایسے نظام کا نقشہ کھینچ سکتے ہیں۔

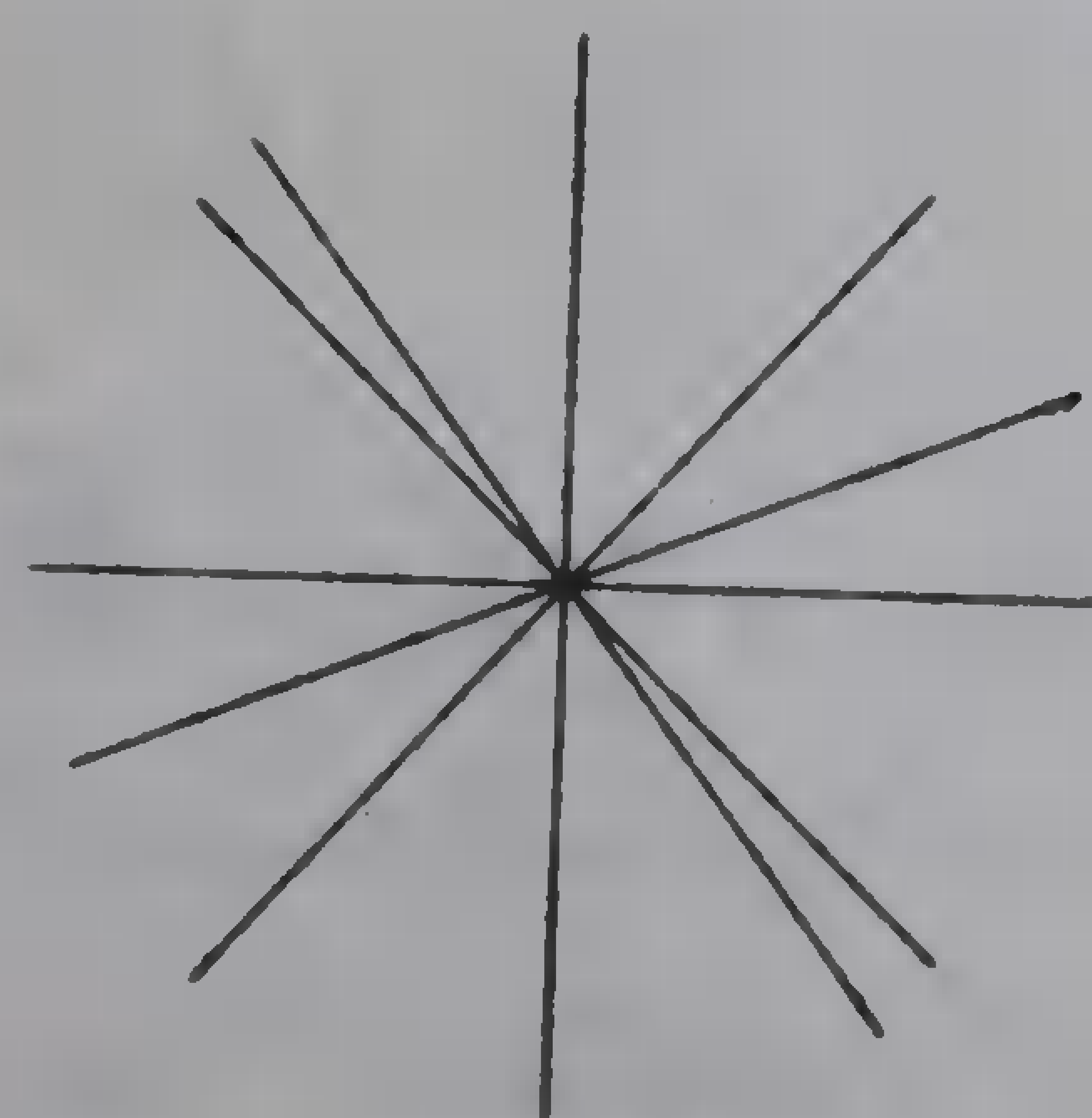
لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں کے لیے غیر متعین ہو جائے (ایسے نقطوں کو نادر نقطے کہا جاتا ہے) تو اِن نقطوں (۸) کے قرب میں نظام کا نقشہ کھینچنا اکثر بہت مشکل ہوتا ہے۔ تاہم حسب ذیل مثالوں پر ہندسی طریقہ سے بحث کیجا سکتی ہے۔ عام صورتوں میں پیچیدہ تحلیلی بحث کی ضرورت ہوتی ہے[۱۵]۔

---

۱۵ دیکھو پروفیسر ٹیکیو واڈا کا مضمون "ترسیمی حل" رسالہ Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University Vol. II No. 3, July 1917. — میں

مثال (۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

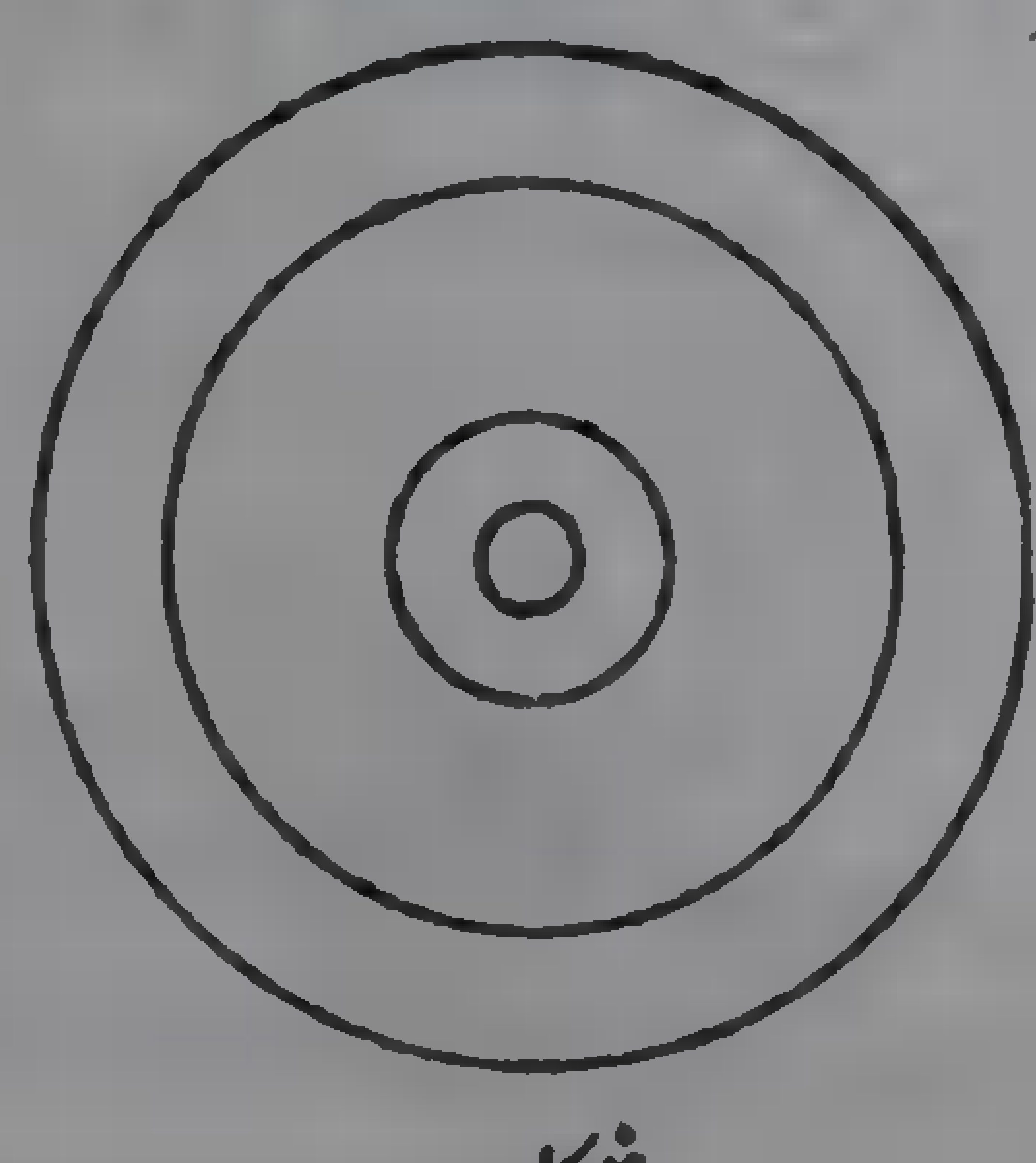
یہاں مبداء ایک نادر نقطہ ہے۔ اِس مساوات کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ سمتی نیم قطر اور مماس وہی میلان رکھتے ہیں اور یہ صرف مبداء میں سے گذرنے والے خطوطِ مستقیم کی صورت میں درست ہے۔



شکل (۳)

اب چونکہ اِن خطوطِ مستقیم کی تعداد لامتناہی ہے اِس لیے اِس صورت میں نادر نقطے میں سے نمیروں کی لامتناہی تعداد گذرتی ہے۔

مثال (۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ یعنی $\frac{\text{ما}}{\text{لا}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -۱$



شکل (۴)

اِس کا یہ مطلب ہے کہ سمتی نیم قطر اور مماس کے میلان ایسے ہیں کہ اُن کا حاصل ضرب ـ ۱ ہے یعنی سمتی نیم قطر اور مماس ایک دوسرے پر عمود ہیں ۔ اِس لیے ممیز کسی نصف قطر کے دائرے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے ۔ (۹)

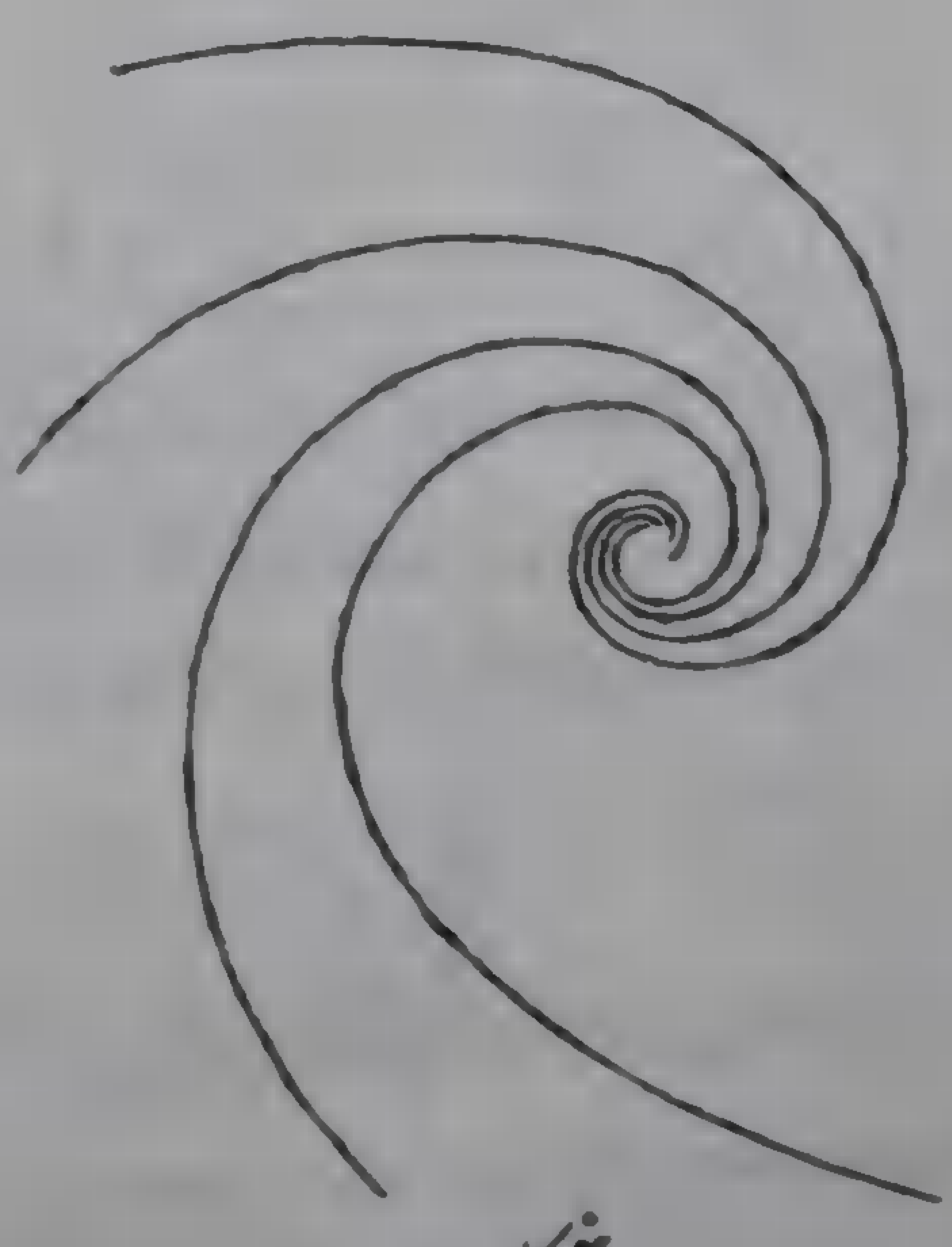
اِس صورت میں نادر نقطہ کو صفر نصف قطر کا ایک دائرہ سمجھا جا سکتا ہے جو اِس کے قریب کے ممیزوں کی انتہائی شکل ہے لیکن محدود ابعاد کا کوئی ممیز اِس میں سے نہیں گذرتا ۔

مثال (۳) $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما ـ ک لا}}{\text{لا + ک ما}}$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس سا}\text{، } \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{مس طہ}$$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس سا} = \frac{\text{مس طہ ـ ک}}{\text{۱ + ک مس طہ}}$$

یعنی $$\text{مس سا + ک مس سا مس طہ} = \text{مس طہ ـ ک}$$



شکل (۵)

یعنی (مس طہ - مس سا) / (۱ + مس طہ مس سا) = ک

یعنی مس (طہ - سا) = ک ، مستقل

اِس لیے ممیز مساوی الزاویہ مرغولے (Spirals) ہیں جنکا نادر نقطہ (مبداء) ماسکہ ہے -

اِن تین مثالوں میں تین نمونوں کی صورتیں پیش کی گئی ہیں - بعض اوقات ممیزوں کی ایک محدود تعداد ایک نادر نقطے میں سے گذرتی ہے لیکن اِس کی مثال اس قدر پیچیدہ ہوگی کہ اِس کا اندراج یہاں مناسب نہیں[۱] -

پہلے باب پر مختلف مثالیں (۱۰)

ذیل کی مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

۱ — ما = ا قو^لا + ب قو^-لا + ج

۲ — ما = ا قو^لا + ب قو^۲لا + ج قو^۳لا

[اُن چار مساواتوں سے جو متواتر تفرق سے حاصل ہوتی ہیں ا ، ب ، ج کو ساقط کرنے کے لیے مقطعہ استعمال کیا جا سکتا ہے]

۳ — ما = قو^لا (ا جم لا + ب جب لا)

۴ — ما = ج جمز (لا / ج) ، (زنجیرہ)

ذیل کی مثالوں میں تفرقی مساواتیں معلوم کرو :

---

[۱] دیکھو واڈا کا محولہ بالا مضمون -

۵ — وہ تمام مکافی جن کے محور، محور ما کے متوازی ہیں۔

۶ — نصف قطر ا کے تمام دائرے۔

۷ — وہ تمام دائرے جو مبدا و میں سے گزرتے ہیں۔

۸ — وہ تمام دائرے جن کے نصف قطر یا محل مستوی لا و ما میں خواہ کچھ ہی ہوں۔

[مثال ۶ کا نتیجہ استعمال کیا جا سکتا ہے]

۹ — ثابت کرو کہ ا کو

$$\text{۲ ما} = \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا لا} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

سے اور ب کو

$$\text{ما} = \text{لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ب لا}^{۲} \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

سے ساقط کیا جائے تو ہر صورت میں ذیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - \text{۲ لا} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{۲ ما} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

[مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے مساوات (۳) پوری ہونی چاہیئے کیونکہ (۳)، (۱) سے اخذ پذیر ہے۔ اِس ابتدائی میں ا اور نیز ایک اختیاری مستقل شامل ہوگا۔ پس وہ (۳) کا حل ہے کیونکہ اِس میں دو مستقل ہیں اور یہ دونوں مستقل جہاں تک کہ (۳) کا تعلق ہے اختیاری ہیں کیونکہ ا اِس مساوات میں شامل نہیں ہے۔ حقیقت میں اِس کو (۳) کا کامل ابتدائی ہونا چاہیئے۔ اسی طرح (۲) اور (۳) کے کامل ابتدائی وہی ہیں۔ پس (۱) اور (۲) ایک مشترک کامل ابتدائی رکھتے ہیں۔]

۱۰ — گذشتہ مثال کا طریقہ استعمال کرکے ثابت کرو کہ

$$\text{ما} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۲ ل قو}^{\text{لا}}$$

اور

$$\text{ما} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۲ ب قو}^{-\text{لا}}$$

کے کامل ابتدائی وہی ہیں ۔

۱۱ — مان لو کہ مثال ۹ کی پہلی دو مساواتوں کے کامل ابتدائی ایک ہی ہیں - اِس کو معلوم کرنے کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی دو قیمتوں کو (لا اور ما کی رقوم میں) مساوی رکھو - نیز تصدیق کرو کہ یہ کامل ابتدائی مثال ۹ کی مساوات (۳) کو پورا کرتا ہے ۔

۱۲ — اسی طرح مثال ۱۰ کی دو مساواتوں کا مشترک کامل ابتدائی معلوم کرو ۔

۱۳ — ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جو تفرقی مساوات (۱۱)

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱ + \text{لا} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} + \text{لا}^{۲} \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$$

کو پورا کرتے ہیں محور ما کو زاویہ °۴۵ پر قطع کرتے ہیں ۔

۱۴ — نقطہ (۱، ۲) پر اُن دو منحنیوں کا میلان محور لا کے ساتھ معلوم کرو جو اِس نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور مساوات

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} = \text{لا}^{۲} - \text{۲ لا} + \text{ما}^{۲}$$

کو پورا کرتے ہیں ۔

۱۵ — ثابت کرو کہ مثال ۱۴ کے منحنیوں میں سے کسی ایک کا نصف قطر انحنا، نقطہ (۱، ۲) پر ۴ ہے ۔

۱۶ — ثابت کرو کہ بالعموم دو منحنی جو تفرقی مساوات

$$\text{لا}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} - \text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱ = ۰$$

کو پورا کرتے ہیں کسی نقطہ میں سے گذرتے ہیں لیکن وہ ایک ایسے مکافی پر کے کسی نقطہ کے لیے ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، جو نظام کے منحنیوں کا لفاف ہے۔

۱۷ — ایک ایسے نقطہ کا طریق معلوم کرو کہ اس میں سے گذرنیوالے دو منحنی جو مثال (۱۶) کی تفرقی مساوات کو پورا کریں (۱) علی القوائم اور (۲) ۴۵° پر متقاطع ہوں۔

$$۱۸ — \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} + \text{ما}$$

کے میمز (براڈ شکی اور واڈا کے طریقہ سے) مرتسم کرو۔

۱۹ — حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے حل لا کی صعودی صحیح قوتوں کے سلسلوں میں (حسب دفعہ ۷) معلوم کرو (ان مثالوں میں $\text{ما}_۱$ اور $\text{ما}_۲$ علی الترتیب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}$ کو تعبیر کرتے ہیں)؛ —

(۱) $\text{ما}_۲ - \text{لا}\,\text{ما}_۱ - \text{ما} = ۰$، (۲) $\text{لا}\,\text{ما}_۲ + \text{لا}\,\text{ما}_۱ + \text{ما} = ۰$،

(۳) $\text{لا}^۲\,\text{ما}_۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{ما}_۱ + ۲\,\text{ما} = ۰$، (۴) $(۱ - \text{لا}^۲)\,\text{ما}_۲ + ۲\,\text{ما} = ۰$،

(۵) $(\text{لا} - \text{لا}^۲)\,\text{ما}_۲ + (۱ - ۵\,\text{لا})\,\text{ما}_۱ - ۴\,\text{ما} = ۰$۔

[جواب :

$$(۱)\quad \text{ما} = \text{ا}_۰\left(۱ + \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \frac{\text{لا}^۴}{۲\times۴} + \frac{\text{لا}^۶}{۲\times۴\times۶} + \cdots\right)$$

$$+\ \text{ا}_۱\left(\frac{\text{لا}}{۱} + \frac{\text{لا}^۳}{۱\times۳} + \frac{\text{لا}^۵}{۱\times۳\times۵} \cdots\cdots\right)$$

$$(۲)\quad \text{ما} = \text{ا}_۱\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۱!} + \frac{\text{لا}^۳}{۲!} - \frac{\text{لا}^۴}{۳!} + \cdots\right) = \text{ا}_۱\,\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{لا}}،$$

اِس میں چونکہ صرف ایک اختیاری مستقل ہے اس لیے وہ کامل ابتدائی نہیں ہے، اِس کا ایک دوسرا حل ہے جو اُس شکل کا نہیں ہے جس کو یہاں فرض کیا گیا ہے (دیکھو نواں باب)۔

(۳) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲}$

(۴) $\text{ما} = \text{ا}_{۰}\left(۱ - \text{لا}^{۲}\right) + \text{ا}_{۱}\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۱\times۳} - \frac{\text{لا}^{۵}}{۳\times۵} - \frac{\text{لا}^{۷}}{۵\times۷} - \dots\right)$

(۵) $\text{ما} = \text{ا}_{۰}\left(۱^{۲} + ۲^{۲}\,\text{لا} + ۳^{۲}\,\text{لا}^{۲} + \dots\right)$ دیکھو دفعہ ۹۷]

دوسرا باب

پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی مساواتیں

(۱۲)

۱۱ — اِس باب میں شکل

مر + ن (فرما / فرلا) = ۰

کی مساواتوں پر غور کیا جائیگا۔ اِس میں مر اور ن دونوں لا اور ما کے تفاعل ہیں۔

اِس مساوات کو اکثر زیادہ متشاکل شکل

مر فرلا + ن فرما = ۰

میں لکھا جاتا ہے[۱]۔

اِس شکل کی عام مساوات کو معلومہ تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں حل کرنا ممکن نہیں ہے لیکن ہم چند خاص نمونوں پر غور کرینگے جن کو حل کیا جا سکتا ہے۔

---

[۱] تفرقوں فرلا اور فرما کے استعمال کے باقاعدہ جواز کے لیے دیکھو ہارڈی کی کتاب "Pure Mathematics" دفعہ ۱۳۶ [دفعات ۱۵۴ تا ۱۵۵ دوسرے تا چھٹے اڈیشن میں، ۱۵۹ تا ۱۶۰ ساتویں اڈیشن میں]۔

اِن نمونوں کی تقسیم بالعموم حسب ذیل کیجاتی ہے :

(ا) ٹھیک مساواتیں

(ب) وہ مساواتیں جو متغیروں کو جدا کرنے سے حل کیجا سکتی ہیں

(ج) متجانس مساواتیں

(د) پہلے رتبہ کی خطی مساواتیں -

اِس باب میں خاص کروہ طریقے استعمال کئے گئے ہیں جن کو جان برنولی (باشندہ بال ۱۶۶۷ء تا ۱۷۴۸ء) اور اِس کے شاگرد یولر (باشندہ بال ۱۷۰۷ء تا ۱۷۸۳ء) نے اختیار کئے تھے - جان برنولی اپنے زمانہ کا بڑا عالم و فاضل شخص تھا اور اُس کے شاگرد یولر نے جبر و مقابلہ، علم مثلث، احصاء، استوار حرکیات، ماحرکیات، علم ہیئت اور دیگر مضامین میں بڑے زبردست مقالے لکھے ہیں -

۱۲ — ٹھیک مساواتیں [۱]

مثال (۱) جملہ ما فرلا + لا فرما ایک ٹھیک تفرقہ ہے -

اِس لیے مساوات ما فرلا + لا فرما = ۰

کو جس سے فر(مالا) = ۰ یعنی مالا = ج حاصل ہوتا ہے ٹھیک مساوات کہا جاتا ہے -

مثال (۲) مساوات مس ما × فرلا + مس لا × فرما = ۰ (۱۲)

پر غور کرو -

یہ اپنی اس شکل میں ٹھیک مساوات نہیں ہے لیکن اگر اِسکو جم لا جم ما سے ضرب دیا جائے تو وہ

جب ما جم لا فرلا + جب لا جم ما فرما = ۰

---

[۱] وہ ضروری اور کافی شرط کہ مد فرلا + ن فرما = ۰ ایک ٹھیک مساوات ہو ضمیمہ ۲ میں بیان کی گئی ہے -

ہو جاتی ہے جو ٹھیک مساوات ہے ۔

اِس کا حل جب ما جب لا = ج ہے ۔

۱۳ ۔ متکمل جزو ضربی ۔ گذشتہ دفعہ کی آخری مثال میں جم لا جم ما کو متکمل جزو ضربی کہتے ہیں کیونکہ جب دی ہوئی مساوات کو اِس سے ضرب دیا جاتا ہے تو ایک ٹھیک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کو فوراً حل کیا جا سکتا ہے ۔

مساواتوں کی مخصوص جماعتوں میں متکمل اجزائے ضربی کو متعین کرنے کے لیے بالعموم مختلف قاعدے دئے جاتے ہیں ۔ یہ قاعدے اِس باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں ملیں گے ۔ اِن قاعدوں کو ثابت کرنا دلچسپ ضرور ہے لیکن اِن کے بغیر ہی مثالوں کو زیادہ آسانی کے ساتھ بالعموم حل کیا جا سکتا ہے ۔

۱۴ ۔ متغیر جدائی پذیر ۔

مثال (۱) مساوات $\frac{\text{فر لا}}{\text{لا}}$ = مس ما فر ما میں دائیں جانب صرف لا اور بائیں جانب صرف ما شامل ہے، اِس لیے متغیر جدا ہیں ۔ تکمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

لوک لا = ۔ لوک جم ما + ج

یعنے لوک (لا جم ما) = ج

لا جم ما = ہو^ج = ا، فرض کرو

مثال (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۲ لا ما

اِس شکل میں متغیر جدا نہیں ہیں لیکن اِن کو آسانی سے جدا

کیا جا سکتا ہے۔ فرلا سے ضرب دو اور ما سے تقسیم کرو تو

فرما / ما = ۲ لا فرلا

تکمیل کرنے پر لوک ما = لا^{۲} + ج

چونکہ ج اختیاری ہے اس لیے اس کو لوک ا کے مساوی رکھا جا سکتا ہے جہاں ا دوسرا اختیاری مستقل ہے چنانچہ بالآخر حاصل ہوتا ہے

ما = ا و$^{لا^{۲}}$

مثالیں

۱ — (۱۲ لا + ۵ ما − ۹) فرلا + (۵ لا + ۲ ما − ۴) فرما = ۰

۲ — {جم لا مس ما + جم (لا + ما)} فرلا + {جب لا قط^{۲} ما
+ جم (لا + ما)} فرما = ۰

۳ — (قط لا مس لا مس ما − و^{لا}) فرلا + قط لا قط^{۲} ما فرما = ۰

۴ — (لا + ما) (فرلا − فرما) = فرلا + فرما

۵ — ما فرلا − لا فرما + ۳ لا^{۲} ما^{۲} و$^{لا^{۳}}$ فرلا = ۰

۶ — ما فرلا − لا فرما = ۰

۷ — (جب لا + جم لا) فرما + (جم لا − جب لا) فرلا = ۰

۸ — فرما / فرلا = لا^{۳} ما^{۲}

۹ — ما فرلا − لا فرما = لا ما فرلا

۱۰ — مس لا فرما = مم ما فرلا

۱۵ ۔ متجانس مساواتیں ۔ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس (۱۴)
مساوات وہ ہے جس کو شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

میں لکھا جا سکے ۔

اب اس کا امتحان کرنے کے لیے کہ آیا لا اور ما کا ایک تفاعل بائیں جانب کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{و} \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \text{و لا}$$

رکھنے سے سہولت پیدا ہوگی ۔

اگر اس ابدال سے نتیجہ کی شکل ف (و) ہو جائے یعنی اگر تمام لا خارج ہو جائیں تو مساوات متجانس ہوگی ۔

مثال (۱) مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}{\text{۲ لا}^{۲}}$ اوپر کے ابدال سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱ + \text{و}^{۲}}{۲}$ ہو جاتی ہے ۔ یہ مساوات متجانس ہے ۔

مثال (۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}$ اوپر کے ابدال سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا و}^{۳}$ ہو جاتی ہے ۔ یہ متجانس نہیں ہے ۔

۱۶ ۔ حل کا طریقہ ۔ چونکہ کسی متجانس مساوات کو اس کی بائیں جانب ما = و لا رکھ کر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف (و)}$ میں تحویل کیا جا سکتا ہے اس لیے اس ابدال کا اثر دائیں جانب کے جملہ پر معلوم کرنا فطری بات

ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ اِس ابدال سے مساوات کو ہمیشہ حل کیا[۱] جا سکیگا [دیکھو اِس باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں مثال ۱۰]۔

مثال (۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}}}$

رکھو $\text{ما} = \text{و لا}$

یعنے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و} + \text{لا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ (کیونکہ اگر ما، لا کا تفاعل ہے تو وبھی لا کا تفاعل ہے) اِس ابدال سے مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{و} + \text{لا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۱} + \text{و}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

یعنے $\text{۲}\,\text{لا فرو} = (\text{۱} + \text{و}^{\text{۲}} - \text{۲و})\,\text{فرلا}$

متغیروں کو جدا کرنے سے $\frac{\text{۲}\,\text{فرو}}{(\text{و}-\text{۱})^{\text{۲}}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$

تکمل کرنے پر $\frac{-\text{۲}}{\text{و}-\text{۱}} = \text{لوک لا} + \text{ج}$

لیکن $\text{و} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اسلیے $\frac{-\text{۲}}{\text{و}-\text{۱}} = \frac{-\text{۲}}{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}-\text{۱}} = \frac{-\text{۲}\,\text{لا}}{\text{ما}-\text{لا}} = \frac{\text{۲}\,\text{لا}}{\text{لا}-\text{ما}}$

پس لا - ما سے ضرب دینے پر

$$\text{۲}\,\text{لا} = (\text{لا} - \text{ما})(\text{لوک لا} + \text{ج})$$

مثال (۲)۔ $(\text{لا} + \text{ما})\,\text{فرما} + (\text{لا} - \text{ما})\,\text{فرلا} = \text{۰}$ (۱۵)

۱؎ "حل" سے ہماری مراد معمولی عمل تکمل میں تحویل کرنا ہے۔ بلاشبہ یہ ممکن ہے کہ ایسے تکملہ کو ہم معمولی ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان نہ کر سکیں۔

اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$$

رکھو $\text{ما} = \text{و}\,\text{لا}$ اور حسب سابق عمل کرو تو

$$\text{و} + \text{لا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و} - ۱}{\text{و} + ۱}$$

یعنے

$$\text{لا}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و} - ۱}{\text{و} + ۱} - \text{و} = -\frac{\text{و}^۲ + ۱}{\text{و} + ۱}$$

متغیروں کو جدا کرنے سے

$$-\frac{(\text{و} + ۱)\,\text{فرو}}{\text{و}^۲ + ۱} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

یعنے

$$-\frac{\text{و}\,\text{فرو}}{\text{و}^۲ + ۱} - \frac{\text{فرو}}{\text{و}^۲ + ۱} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

تکمیل کرنے پر

$$-\tfrac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{و}^۲ + ۱) - \text{مس}^{-۱}\,\text{و} = \text{لوک}\,\text{لا} + \text{ج}$$

یعنے

$$۲\,\text{لوک}\,\text{لا} + \text{لوک}\,(\text{و}^۲ + ۱) + ۲\,\text{مس}^{-۱}\,\text{و} + ۲\text{ج} = ۰،$$

$$\text{لوک}\,\text{لا}^۲(\text{و}^۲ + ۱) + ۲\,\text{مس}^{-۱}\,\text{و} + \text{ا} = ۰،$$ ۲ج = ا رکھنے

سے بالآخر $\text{و} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ رکھنے پر $\text{لوک}\,(\text{ما}^۲ + \text{لا}^۲) + ۲\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{ا} = ۰$

۱۷ — وہ مساواتیں جو متجانس مساواتوں میں تحویل پذیر ہیں

مثال (۱) مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا} + ۱}{\text{ما} + \text{لا} + ۵}$$

متجانس نہیں ہے۔

یہ مثال گذشتہ دفعہ کی مثال (۲) کے مشابہ ہے صرف اتنا فرق ہے کہ $\frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ کی بجائے $\frac{\text{ما} - \text{لا} + ۱}{\text{ما} + \text{لا} + ۵}$ ہے۔

اب ما - لا = ۰ اور ما + لا = ۰ دو خطوط مستقیم کو جو مبداء میں سے گذرتے ہیں تعبیر کرتے ہیں۔

خطوط ما - لا + ۱ = ۰ اور ما + لا + ۵ = ۰ کا نقطۂ تقاطع آسانی سے (-۲، -۳) معلوم ہو جاتا ہے۔

رکھو لا = ﻻ - ۲، ما = مَا - ۳ جس کا یہ مطلب ہے کہ نئے مبداء کو نقطہ (-۲، -۳) پر لیا گیا ہے اور نئے محور پرانے محوروں کے متوازی ہیں۔

تب　$\text{ما} - \text{لا} + ۱ = \text{مَا} - \text{ﻻ}$　اور　$\text{ما} + \text{لا} + ۵ = \text{مَا} + \text{ﻻ}$

نیز　$\text{فرلا} = \text{فرﻻ}$　اور　$\text{فرما} = \text{فرمَا}$

اس لیے مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرمَا}}{\text{فرﻻ}} = \frac{\text{مَا} - \text{ﻻ}}{\text{مَا} + \text{ﻻ}}$$

اور گذشتہ دفعہ کے مطابق اس کا حل ہے

$$\text{لوک}\,(\text{مَا}^{۲} + \text{ﻻ}^{۲}) + ۲\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{مَا}}{\text{ﻻ}} + \text{ا} = ۰$$

یعنے

$$\text{لوک}\left[(\text{ما} + ۳)^{۲} + (\text{لا} + ۲)^{۲}\right] + ۲\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{ما} + ۳}{\text{لا} + ۲} + \text{ا} = ۰$$

مثال (۳)　$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا} + ۱}{\text{ما} - \text{لا} + ۵}$　(۱۶)

اس مثال کو پچھلی مثال کی طرح حل نہیں کیا جا سکتا کیونکہ خطوط ما - لا + ۱ = ۰ اور ما - لا + ۵ = ۰ متوازی ہیں۔

چونکہ بائیں جانب کا جملہ ما - لا کا ایک تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے اس لیے رکھو ما - لا = ی

یعنے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۱ = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

تو مساوات ہو جاتی ہے

$$۱ + \frac{فری}{فرلا} = \frac{ی + ۱}{ی + ۵}$$

یعنی

$$\frac{فری}{فرلا} = \frac{-۴}{ی + ۵}$$

متغیروں کو جدا کرنے پر $(ی + ۵)\, فری = -۴\, فرلا$

تکمل کرنے پر $\frac{۱}{۲} ی^{۲} + ۵ی = -۴لا + ج$

یعنی $ی^{۲} + ۱۰ی + ۸لا = ۲ج$

ی کی بجائے درج کرنے پر $(ما - لا)^{۲} + ۱۰(ما - لا) + ۸لا = ۲ج$

یعنی $(ما - لا)^{۲} + ۱۰ما - ۲لا = د$ ($۲ج = د$ رکھنے سے)

مثالیں

(۱) $(۲لا - ما)\, فرما = (۲ما - لا)\, فرلا$ [Wales]

(۲) $(لا^{۲} - ما^{۲}) \frac{فرما}{فرلا} = لا ما$ [Sheffield]

(۳) $۲ \frac{فرما}{فرلا} = \frac{ما}{لا} + \frac{ما^{۲}}{لا^{۲}}$ [Math Tripos]

(۴) $لا \frac{فرما}{فرلا} = ما + \sqrt{لا^{۲} + ما^{۲}}$

(۵) $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۲لا + ۹ما - ۲۰}{۶لا + ۲ما - ۱۰}$

(۶) $(۱۲لا + ۲۱ما - ۹)\, فرلا + (۴۷لا + ۴۰ما + ۷)\, فرما = ۰$

(۷) $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۳لا - ۴ما - ۲}{۳لا - ۴ما - ۳}$

(۸) $(لا + ۲ما)(فرلا - فرما) = فرلا + فرما$

۱۸ — خطی مساواتیں

مساوات $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$

کو جس میں ف اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں لیکن ما کے تفاعل نہیں ہیں پہلے رتبہ کی خطی مساوات کہتے ہیں۔

اس کی ایک سادہ مثال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{ما} = \text{لا}^2$ ہے۔

اگر ہم اس کی ہر جانب کو لا سے ضرب دیں تو مساوات ہو جاتی ہے (۱۷)

$$\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = \text{لا}^3$$

یعنی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا ما}) = \text{لا}^3$$

اس لیے تکمیل کرنے پر $\text{لا ما} = \frac{1}{4}\,\text{لا}^4 + \text{ج}$

ہم نے اس مثال کو متکمل جزو ضربی لا کے استعمال سے حل کیا ہے جو دیکھنے سے ہی معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۹ — فرض کرو کہ ہم عام صورت میں متکمل جزو ضربی کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اگر ایسا جزو ضربی س ہے تو مساوات

$$\text{س}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{س ف ما} = \text{س ق}$$

کی دائیں جانب کا جملہ کسی حاصل ضرب کا تفرقی سر ہے اور پہلی رقم $\text{س}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ حاصل ضرب س ما ہونا چاہئے۔

اس لیے رکھو $\text{س}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{س ف ما} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{س ما}) = \text{س}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}}$

اِس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ر ف ما} = \text{ما} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر لا}}$

یعنے $\text{ف فرلا} = \frac{\text{فر ر}}{\text{ر}}$

یعنے $\int \text{ف فرلا} = \text{لوک ر}$

$\text{ر} = \text{قو}^{\int \text{ف فرلا}}$

پس حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$ کو حل کرنے کے لیے اِس کی ہر جانب کے جملہ کو $\text{قو}^{\int \text{ف فرلا}}$ سے جو اِس کا ایک متکمل جزو ضربی ہے ضرب دو۔

۲۰ ۔ مثالیں ۔

(۱) دفعہ ۱۸ میں بیان کردہ سادہ مثال

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{ما} = \text{لا}^{2}$$

پر غور کرو ۔

یہاں $\text{ف} = \frac{1}{\text{لا}}$، اِس لیے $\int \text{ف فرلا} = \text{لوک لا}$ اور $\text{قو}^{\text{لوک لا}} = \text{لا}$

اِس طرح قاعدہ سے وہی متکمل جزو ضربی حاصل ہوتا ہے جس کو ہم نے استعمال کیا تھا۔

(۲) $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2\,\text{لا ما} = 2\,\text{قو}^{-\text{لا}^{2}}$$

یہاں $\text{ف} = ۲\text{لا}$، $\int \text{ف}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{۲}$، اور متکمل جزوضربی $\text{و}^{\text{لا}^{۲}}$ ہے۔

(۱۸) اس سے ضرب دینے پر $\text{و}^{\text{لا}^{۲}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\,\text{ما} = ۲$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\text{ما}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}} \right) = ۲$

تکمل کرنے پر $\text{ما}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}} = ۲\text{لا} + \text{ج}$

$$\text{ما} = \left(۲\text{لا} + \text{ج} \right) \text{و}^{-\text{لا}^{۲}}$$

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{ما} = \text{و}^{۲\text{لا}}$

یہاں متکمل جزوضربی $\text{و}^{۳\text{لا}}$ ہے۔

اس سے ضرب دینے پر $\text{و}^{۳\text{لا}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{و}^{۳\text{لا}}\,\text{ما} = \text{و}^{۵\text{لا}}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\text{ما}\,\text{و}^{۳\text{لا}} \right) = \text{و}^{۵\text{لا}}$

تکمل کرنے پر $\text{ما}\,\text{و}^{۳\text{لا}} = \frac{۱}{۵}\,\text{و}^{۵\text{لا}} + \text{ج}$

$$\text{ما} = \frac{۱}{۵}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}\,\text{و}^{-۳\text{لا}}$$

۲۱ — وہ مساواتیں جو خطی مساواتوں میں تحویل پذیر ہیں —

مثال (۱)

$$\text{لا}\,\text{ما} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{۳}\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

ما۳ سے تقسیم کرو تاکہ بائیں جانب کا جملہ ما سے آزاد ہو چنانچہ

$$\text{لا} \times \frac{۱}{\text{ما}^{۲}} - \frac{۱}{\text{ما}^{۳}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

یعنے

$$\text{لا} \times \frac{۱}{\text{ما}^{۲}} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{۱}{\text{ما}^{۲}}\right) = \text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

رکھو $\frac{۱}{\text{ما}^{۲}} = \text{ی}$ تو $۲\,\text{لا}\,\text{ی} + \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۲\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$

یہ مساوات خطی ہے اور فی الحقیقت مثال (۲) کے مشابہ ہے کیونکہ اِس میں صرف ما کی بجائے ی ہے۔

پس حل ہے $\text{ی} = (۲\,\text{لا} + \text{ج})\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$

یا

$$\frac{۱}{\text{ما}^{۲}} = (۲\,\text{لا} + \text{ج})\,\text{قو}^{-\text{لا}^{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{ما} = \pm \frac{\text{قو}^{\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲}}}{\sqrt{۲\,\text{لا} + \text{ج}}}$$

یہ مثال برنولی کی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف}\,\text{ما} = \text{ق}\,\text{ما}^{\text{ن}}$$

کی جس میں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں ایک مخصوص صورت ہے۔ جیکب برنولی یا برنولی (باشندہ بال) نے اِس مساوات کی ۱۶۹۵ء میں تحقیق کی تھی۔

مثال (۲) $$(\text{۲لا} - \text{۱۰ما}^{۳})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$$ (19)

یہ موجودہ شکل میں خطی نہیں ہے لیکن اگر $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ سے ضرب دیں تو

$$\text{۲لا} - \text{۱۰ما}^{۳} + \text{ما}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۰$$

یعنے
$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{۲لا}}{\text{ما}} = \text{۱۰ما}^{۲}$$

یہ خطی ہے اگر ما کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے۔
حسب سابق عمل کرنے پر مکمل جزو ضربی $\text{ما}^{۲}$ حاصل ہوگا اور حل ہوگا

$$\text{ما}^{۲}\,\text{لا} = \text{۲ما}^{۵} + \text{ج}$$

یعنے
$$\text{لا} = \text{۲ما}^{۳} + \text{ج}\,\text{ما}^{-۲}$$

مثالیں۔

(۱) $$(\text{لا} + ۱)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{۳ما} = (\text{لا} + ۱)^{۵}$$ [Wales]

(۲) $$\text{لا جم لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}(\text{لا جب لا} + \text{جم لا}) = ۱$$ (Sheffield)

(۳) $$\text{لا لوک لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{۲ لوک لا}$$

(۴) $$\text{لا}^{۲}\text{ما} - \text{لا}^{۳}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{۴}\,\text{جم لا}$$

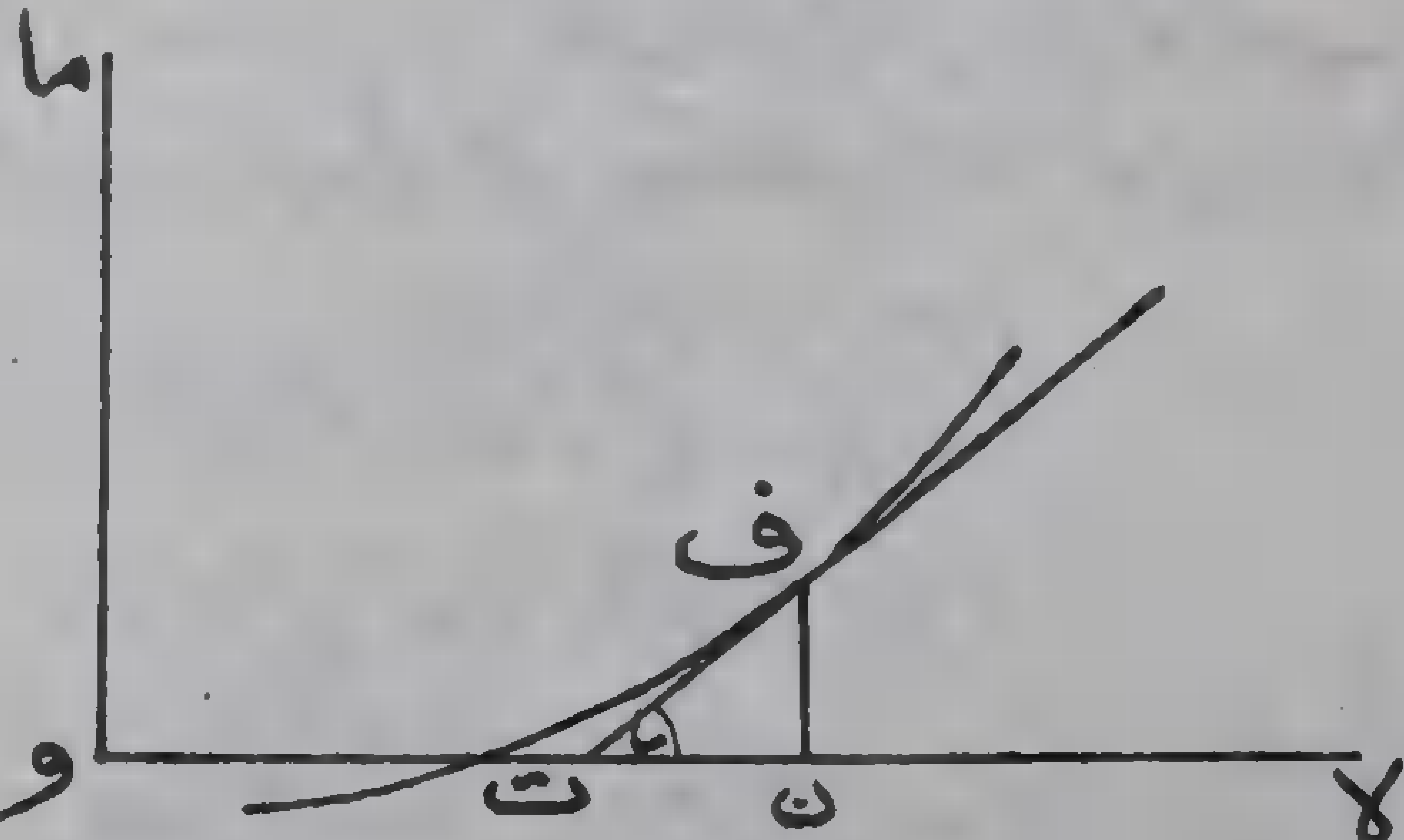
(۵) $$\text{ما} + ۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{۴}(\text{لا} - ۱)$$

(۶)   (لا + ۲ ما³) فرما/فرلا = ما

(۷)   فرلا + لا فرما = قو^ما قط² ما فرما

۲۲ ـ ہندسی مسئلے ـ قائم مرماۃ ـ اب ہم چند ہندسی مسئلوں پر جن سے تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں غور کرینگے۔

مثال (۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر مماس مستقل ہے ـ



شکل (۶)

زیر مماس ت ن = ف ن مم سا = ما فرلا/فرما

پس   ما فرلا/فرما = ک   (۲۰)

فرلا = ک فرما/ما

∴   لا + ج = ک لوک ما

∴ $\text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{ل}}{\text{ح}}}$ ، اختیاری مستقل ج کو ک لو ک ا کے مساوی رکھنے سے۔

مثال (۲)۔ ایسا منحنی معلوم کرو کہ کسی دو نقطوں ف، ق کے درمیان اس کا طول، ایک ثابت نقطہ و سے ف اور ق کے فاصلوں کے فرق کے متناسب ہو۔

اگر ف کو ثابت سمجھا جائے تو قوس ق ف ∝ وق منفی ایک مستقل۔

قطبی محددوں کو استعمال کرو چنانچہ و کو قطب اور و ف کو ابتدائی خط لو۔ تب اگر ق کے محدد (ر، ط) ہوں تو

$$\text{س} = \text{ک ر} - \text{ک ر}_{\text{.}}$$

لیکن علم احصا میں ثابت کیا گیا ہے کہ

$$(\text{فر س})^{۲} = (\text{ر فر ط})^{۲} + (\text{فر ر})^{۲}$$

پس $$\text{ک}^{۲}(\text{فر ر})^{۲} = (\text{ر فر ط})^{۲} + (\text{فر ر})^{۲}$$

یعنی $$\text{فر ط} = \pm \sqrt{\text{ک}^{۲} - \text{۱}}\ \frac{\text{فر ر}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\ \frac{\text{فر ر}}{\text{ر}}$$ ، فرض کرو

∴ $\text{ر} = \text{ج}\,\text{و}^{\text{ا ط}}$ ، مساوی الزاویہ مرغولہ

مثال (۳)۔ نیم کعبی مکافیوں $\text{ا ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$ کے قبیل کے قائم مرماۃ معلوم کرو۔ جہاں ا متغیر مبدل ہے۔

منحنیوں کے دو قبیلوں کو قائم مرماۃ اسوقت کہا جاتا ہے جبکہ ایک قبیل کا ہر رکن دوسرے قبیل کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرے۔

اول ہم ا کو ساقط کرکے دئے ہوئے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل کریں گے۔ چنانچہ

$$\text{ا ما}^{۲} = \text{لا}^{۳}$$

کو تفرق کرنے پر

$$۲\ \text{ا ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۳\ \text{لا}^{۲}$$

حاصل ہوتا ہے، اِس لیے تقسیم سے

$$\frac{۲}{\text{ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۳}{\text{لا}} \text{، } \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = مس سا جہاں سا، محور لا کے ساتھ مماس کا میلان ہے۔ مرماۃ کے لیے سا کی قیمت (فرض کرو سَا) مساوات

$$\text{سا} = \text{سَا} \pm \frac{۱}{۲} \pi$$

سے حاصل ہوتی ہے یعنے مس سا = ۔مم سَا

یعنے دئے ہوئے قبیل کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے مرماۃ کے لئے $-\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$، رکھنا چاہیئے۔

(۱) میں یہ تبدیلی کرنے سے حاصل ہوگا (۲۱)

$$-\frac{۲}{\text{ما}} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{۳}{\text{لا}}$$

$$\therefore\ ۲\ \text{لا فرلا} + ۳\ \text{ما فرما} = ۰$$

$$\therefore\ ۲\ \text{لا}^{۲} + ۳\ \text{ما}^{۲} = \text{ج}$$

جو متشابہ اور متشابہاً واقع ہونے والے ناقصوں کا ایک نظام ہے۔

مثال ۴۔ منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مرغولوں کے قبیل

ر = ا طہ کو ایک مستقل زاویہ عہ پر قطع کرے۔

حسب سابق ہم ا کو ساقط کرنے سے ابتدا کرتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ر}} \text{ ر } = \text{طہ}$$

اب $\frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ر}}$ = مس فہ جہاں فہ وہ زاویہ ہے جو مماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان ہے۔ اگر دوسرے قبیل کے لیے یہی زاویہ فَہ ہو تو

$$\text{فَہ} = \text{فہ} \pm \text{عہ}$$

$$\therefore \quad \text{مس فَہ} = \frac{\text{مس فہ} \pm \text{مس عہ}}{1 \mp \text{مس فہ مس عہ}} = \frac{\text{طہ} + \text{ک}}{1 - \text{ک طہ}}$$

جبکہ مس فہ کی بجائے حاصل شدہ قیمت رکھی جائے اور ± مس عہ کی بجائے ک لکھا جائے۔

اس طرح دوسرے قبیل کے لیے

$$\frac{\text{ر فر طہ}}{\text{فر ر}} = \frac{\text{طہ} + \text{ک}}{1 - \text{ک طہ}}$$

اس کا حل طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے۔

نتیجہ $\quad \text{ر} = \text{ج}\,(\text{طہ} + \text{ک})^{\text{ک}^2 + 1}\ \text{و}^{-\text{ک طہ}}$

حاصل ہوگا۔

حل طلب مثالیں۔

(۱) وہ منحنی معلوم کرو جس کا زیر عماد مستقل ہے۔

(۲) ایک منحنی کے کسی نقطہ ف پر کا مماس محور لا سے ت پر

ملتا ہے۔ وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے و ف = ف ت، جہاں و مبداء ہے۔

(۳) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے کسی نقطہ پر مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ سمتی زاویہ کا دوچند ہے۔

(۴) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے معین کا ظلِ عماد پر مستقل ہے۔

منحنیوں کے حسب ذیل قبیلوں کے قائم مرماۃ معلوم کرو:

(۵) $\text{لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}$، (۶) $\text{لا}^{\frac{۲}{۳}} + \text{ما}^{\frac{۲}{۳}} = \text{ا}^{\frac{۲}{۳}}$

(۷) $\text{ف لا}^{۲} + \text{ق ما}^{۲} = \text{ا}^{۲}$، (ف اور ق مستقل)

(۸) $\text{ر ط} = \text{ا}$ (۹) $\text{ر} = \frac{\text{ا ط}}{۱ + \text{ط}}$

(۱۰) منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو مستقل زاویہ عہ پر قطع کرتے ہیں۔

دوسرے باب پر متفرق مثالیں (۲۲)

(۱) $(۳\,\text{ما}^{۲} - \text{لا})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$

(۲) $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} + ۲\sqrt{\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$

(۳) $\text{مس لا جم ما فرما} + \text{جب ما فرلا} + \text{قو}^{\text{جب لا}}\,\text{فرلا} = ۰$

(۴) $\text{لا}^{۳}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{ما}^{۲} = \text{لا ما}^{۲}$ [Sheffield]

(۵) $\text{لا}^{۳}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{۳} + \text{ما}^{۲}\sqrt{\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$

(۶) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{د لا + ھ ما + گ}}{\text{ھ لا + ب ما + ف}}$$

مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ما فرلا − ۲ لا فرما = ۰

مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے محور اور راس پر کے مماس مشترک ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ مساوات

(۴ لا + ۳ ما + ۱) فرلا + (۳ لا + ۲ ما + ۱) فرما = ۰

زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے متقارب خطوط

لا + ما = ۰ اور ۲ لا + ما + ۱ = ۰

ہیں۔

(۹) اگر

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{۲ ما مس لا} = \text{جب لا}$$

اور ما = ۰ جبکہ لا = $\frac{۱}{۲}\pi$ تو ثابت کرو کہ ما کی اعظم قیمت $\frac{۱}{۸}$ ہے۔

[Math Tripos]

(۱۰) ثابت کرو کہ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی عام متجانس مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

کا حل

$$\text{لوک لا} = \int \frac{\text{فر و}}{\text{ف(و)} - \text{و}} + \text{ج}$$

ہے جہاں و = $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

(۱۱) ثابت کرو کہ ف ما فرلا + ق لا فرما + $\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}}$ (ر ما فرلا + س لا فرما) = ۰

کا ایک متکمل جزو ضربی $\text{لا}^{\text{ھ}}\,\text{ما}^{\text{ک}}$ ہے اگر

$$\frac{\text{ھ+۱}}{\text{ف}} = \frac{\text{ک+۱}}{\text{ق}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ھ+م+۱}}{\text{ر}} = \frac{\text{ک+ن+۱}}{\text{س}}$$

اِس طریقہ کو مساوات

$$\text{۳ ما فرلا} - \text{۲ لا فرما} + \text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{-۱}\,(\text{۱۰ ما فرلا} - \text{۶ لا فرما}) = ۰$$

کے حل کرنے میں استعمال کرو۔

(۱۲) مساوات $\displaystyle\int \frac{\text{ف(لا ما)} + \text{فا(لا ما)}}{\text{ف(لا ما)} - \text{فا(لا ما)}}\,\frac{\text{فر(لا ما)}}{\text{لا ما}} + \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ج}$

کو تفرق کر کے تصدیق کرو کہ

$$\text{ف (لا ما) ما فرلا} + \text{فا (لا ما) لا فرما} = ۰$$

کا ایک متکمل جزو ضربی (۲۴)

$$\frac{۱}{\text{لا ما}\{\text{ف (لا ما)} - \text{فا (لا ما)}\}}$$

ہے۔

اِس سے مساوات $(\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} + \text{لا ما} + ۱)\,\text{ما فرلا} - (\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - \text{لا ما} + ۱)\,\text{لا فرما} = ۰$

کو حل کرو۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر مساوات $\text{م فرلا} + \text{ن فرما} = ۰$ ٹھیک ہے تو

$$\frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$$

[اِس کے عکس کا ثبوت ضمیمہ ۱ میں دیکھو]

(۱۴) تصدیق کرو کہ ٹھیک مساوات کی شرط

$$(\text{ف فرلا} + \text{ق فرما})\,\text{ہو}^{\int \text{ف (لا) فرلا}} = ۰$$

سے پوری ہوتی ہے اگر

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} + \text{ق ف (لا)}$$

اِس سے ثابت کرو کہ $\text{ف فرلا} + \text{ق فرما} = ۰$ کے لیے ہمیشہ ایک متکمل جزو ضربی معلوم کیا جا سکتا ہے اگر

$$\frac{\text{ا}}{\text{ق}}\left[\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right]$$

صرف لا کا تفاعل ہو۔

اِس طریقہ سے $(\text{لا}^{۳} + \text{لا ما}^{۲})\ \text{فرلا} + ۲\ \text{ما}^{۳}\ \text{فرما} = ۰$

کو حل کرو۔

(۱۵) وہ منحنی معلوم کرو (۱) جس کا قطبی زیر مماس مستقل ہے،
(۲) جس کا قطبی زیر عماد مستقل ہے۔

(۱۶) وہ منحنی معلوم کرو جو مبداء میں سے گذرتا ہے اور جس کے لیے وہ رقبہ جو منحنی، معین، اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے معین کے مکعب کا ک گُنا ہے۔

(۱۷) ایک منحنی کا عماد ف گ محور لا سے گ پر ملتا ہے۔ اگر مبداء سے گ کا فاصلہ ف کے فصلہ کا دوچند ہو تو ثابت کرو کہ منحنی ایک قائم زائد ہے۔

(۱۸) وہ منحنی معلوم کرو جس کے لیے لا کے محور کا وہ حصہ جو مبداء اور کسی نقطہ پر کے مماس کے درمیان منقطع ہوتا ہے اس نقطہ کے معین کے متناسب ہے۔

(۱۹) منحنیوں کے حسب ذیل قبیلوں کے قائم مرماۃ معلوم کرو:

(۱) $(\text{لا} - ۱)^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\ \text{ا لا} = ۰$

(۲) $\text{ر} = \text{ا}\ \text{طہ}$،

(۳) $\text{ر} = \text{ا} + \text{جم ن طہ}$

پہلے نتیجہ کی ہندسی تعبیر معلوم کرو۔

(۲۰) ہم ماسکی مخروطیوں

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲} + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲} + \text{لہ}} = ۱$$

کے نظام کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔ اِس لیے ثابت کرو کہ یہ نظام خود اپنا آپ قائم مرماۃ ہے۔

(۲۱) منحنیوں کا وہ قبیل معلوم کرو جو مکافیوں $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ کے قبیل کو ۴۵° پر قطع کرے۔

(۲۲) اگر ع + خ و = ف (لا + خ ما) جہاں ع، و، لا، ما تمام حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ قبیل ع = مستقل، و = مستقل قائم مرماۃ ہیں۔ (۲۴)

نیز ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ع}}{\text{جف ما}^2} = 0 = \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2}$$

[یہ مسئلہ برق سکونیات میں قوت کے خطوط اور مستقل قوہ کے خطوط یا ماحرکیات میں بہاؤ کے خطوط حاصل کرنے میں بہت کارآمد ہے، ع اور و کو مزدوج تفاعل کہتے ہیں۔]

(۲۳)۔ ریڈیم کے انحطاط کی شرح ماںقی مقدار کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کسی وقت ت پر اِس کی مقدار

$$\text{ا} = \text{ا}_0\,\text{قو}^{-\text{ک ت}}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲۴) اگر $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ج}\left(1 - \frac{\text{و}^2}{\text{ک}^2}\right)$ اور و = ۰ جبکہ ت = ۰ تو ثابت کرو کہ

$$\text{و} = \text{ک مسنز}\,\frac{\text{ج ت}}{\text{ک}}$$

[اس سے ہوا میں گرتے ہوے جسم کی رفتار حاصل ہوتی ہے جبکہ ہوا کی مزاحمت کو و^2 کے متناسب لیا جائے۔ جیسے ت بڑھتا جاتا ہے و انتہائی قیمت ک کے قریب آتا جاتا ہے۔ اِس کے مشابہ ایک مساوات

گیس کی روانیت معلوم ہوتی ہے جبکہ اِس کو وقت ت تک روانی اثر کے تحت رکھا گیا ہو۔]

(۲۵) دو مائع ایک برتن میں جوش کھا رہے ہیں۔ یہ معلوم ہوا کہ کسی لمحہ پر بھاپ کی شکل میں اِن کی جو مقداریں اُڑ جاتی ہیں اِن کی نسبت اُن مقداروں کی نسبت کے متناسب ہے جو ابھی مائع کی حالت میں باقی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ مقداریں (فرض کرو لا اور ما) شکل ذیل کے ایک رشتہ میں مربوط ہیں:

ما = ج لا^ک

[پارٹنگٹن کی "Higher Mathematics for Students of Chemistry" سے یہ مثال لی گئی ہے۔]

تیسرا باب

مستقل سروں والی خطی مساواتیں

۲۳ ۔ اس باب میں ہم ایسی مساواتوں پر غور کریں گے جن کی شکل

$$\text{ب}_{\circ}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}+\text{ب}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-۱}}+\text{ب}_{۲}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-۲}}+\cdots\cdots$$

$$\text{ب}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{فر ما}}{\text{فرلا}}+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}=\text{ف}\,(\text{لا})\text{،}\quad\cdots\cdots\cdots(۱)$$

ہوتی ہے جہاں ف (لا)، لا کا ایک تفاعل ہے اور تمام ب مستقل ہیں ۔

یہ مساواتیں تمام قسموں کے ارتعاش یعنے حیلی، برقی، یا صوتی ارتعاشوں کے مطالعہ میں بہت اہم ہیں ۔ اِن کی مثالیں ہم اِس باب کے ختم پر مختلف سوالوں کی صورت میں دینگے ۔

نیچے جو طریقے درج ہیں یولر اور ڈلمبرٹ[*] سے بالعموم منسوب کئے جاتے ہیں۔

نیز ہم اِس شکل کی ہمزاد مساواتوں کے نظاموں پر اور اُن

[*] جین لی راند ڈلمبرٹ (پیرس، ۱۷۱۷ء تا ۱۷۸۳ء) سب سے زیادہ اُس اُصول کی وجہ سے مشہور ہے جو علم حرکت میں "ڈلمبرٹ کا اصول" کہلاتا ہے۔ اِس اُصول کو سیالوں کی حرکت پر استعمال کر کے وہ جزئی تفرقی مساواتوں پر پہنچا تھا۔

مساواتوں پر غور کرینگے جو اِس شکل میں ایک سادہ استحالہ کے ذریعہ تحویل پذیر ہوں۔

۲۴۔ سادہ ترین صورت۔ پہلے رتبہ کی مساواتیں۔

اگر ہم ن = ۱ اور ف (لا) = ۰ لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ب_۰ \frac{فر\,ما}{فر\,لا} + ب_۱\, ما = ۰ \quad ......(۲)$$

یعنے $ب_۰ \frac{فر\,ما}{ما} + ب_۱\, فرلا = ۰$

یا $ب_۰\, لوک\, ما + ب_۱\, لا =$ مستقل

اس لیے $لوک\, ما = -\frac{ب_۱\, لا}{ب_۰} +$ مستقل

$= -\frac{ب_۱\, لا}{ب_۰} + لوک\, ا$ (فرض کرو)

$$ما = ا\, و^{-\frac{ب_۱ لا}{ب_۰}}$$

۲۵۔ دوسرے رتبہ کی مساواتیں۔

اگر ہم ن = ۲ اور ف (لا) = ۰ لیں تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ب_۰ \frac{فر^۲\, ما}{فر\, لا^۲} + ب_۱ \frac{فر\,ما}{فر\,لا} + ب_۲\, ما = ۰ \quad ......(۳)$$

مساوات (۲) کے حل سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ حل $ما = ا\, و^{م لا}$

جہاں م کوئی خاص مستقل ہے شاید (۳) کو پورا کر سکے۔ (۲۶)

چنانچہ ما کی اِس قیمت سے مساوات (۳)

$$ا\, و^{م لا} (ب_۰ م^۲ + ب_۱ م + ب_۲) = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

اس طرح اگر م مساوات

$$\text{ب}_۰\,\text{م}^۲ + \text{ب}_۱\,\text{م} + \text{ب}_۲ = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

کی ایک اصل ہو تو $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{م لا}}$ مساوات (۳) کا ایک حل ہے خواہ ا کی قیمت کچھ ہی ہو۔

فرض کرو کہ مساوات (۴) کی اصلیں عہ اور بہ ہیں۔ تب اگر عہ اور بہ غیر مساوی ہیں تو مساوات (۳) کے دو حل ہیں یعنے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{عہ لا}} \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{ب}\,\text{قو}^{\text{بہ لا}}$$

اب اگر ہم مساوات (۳) میں $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{عہ لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{\text{بہ لا}}$ درج کریں تو حاصل ہوگا

$$\text{ا}\,\text{قو}^{\text{عہ لا}}\left(\text{ب}_۰\,\text{عہ}^۲ + \text{ب}_۱\,\text{عہ} + \text{ب}_۲\right) + \text{ب}\,\text{قو}^{\text{بہ لا}}\left(\text{ب}_۰\,\text{بہ}^۲ + \text{ب}_۱\,\text{بہ} + \text{ب}_۲\right) = ۰$$

جو صریحاً درست ہے کیونکہ عہ اور بہ مساوات (۴) کی اصلیں ہیں۔

اِس طرح دو حلوں کے حاصل جمع سے ایک تیسرا حل حاصل ہوتا ہے [یہ اِس واقعہ سے فوراً ظاہر ہے کہ مساوات (۳) خطی ہے]۔ چونکہ اِس تیسرے حل میں دو اختیاری مستقل ہیں جن کی تعداد مساوات کے رتبہ کے مساوی ہے اِس لیے ہم اِس حل کو عام حل سمجھینگے۔

مساوات (۴) کو "امدادی مساوات" کہتے ہیں۔

مثال۔

$$۲\,\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^۲} + ۵\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$$

کو حل کرنے کے لیے آزمایشی حل $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{م لا}}$ فرض کرو۔

چنانچہ اِس سے حاصل ہوگا

$$\text{ا قو}^{\text{م لا}}\left(\text{۲م}^{\text{۲}}+\text{۵م}+\text{۲}\right)=\text{۰}$$

یہ م = - ۲ یا - $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ سے پوری ہوتی ہے۔ اِس لیے عام حل

$$\text{ما}=\text{ا قو}^{\text{-۲ لا}}+\text{ب قو}^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ لا}}$$

ہے۔

۲۶ ۔ ترمیم جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں خیالی یا ملتف ہوں۔

جب امدادی مساوات (۴) کی اصلیں شکل ف + خ ق، ف - خ ق کی ہوتی ہیں، جہاں $\text{خ}^{\text{۲}}$ = -۱ تو حل

$$\text{ما}=\text{ا قو}^{\text{(ف + خ ق) لا}}+\text{ب قو}^{\text{(ف - خ ق) لا}}$$

میں ترمیم کرنا مناسب ہے تاکہ اُس میں خیالی مقداریں شامل نہ ہونے پائیں۔ اِس کے لیے ہم مسئلوں

$$\text{قو}^{\text{خ ق لا}}=\text{جم ق لا}+\text{خ جب ق لا}،$$

$$\text{قو}^{\text{-خ ق لا}}=\text{جم ق لا}-\text{خ جب ق لا}$$

کا (جو کسی علم مثلث تحلیلی کی کتاب میں مل سکتے ہیں) استعمال کرتے ہیں۔ چنانچہ مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$\text{ما}=\text{قو}^{\text{ف لا}}\left\{\text{ا (جم ق لا + خ جب ق لا) + ب (جم ق لا - خ جب ق لا)}\right\}$$

$$=\text{قو}^{\text{ف لا}}\left\{\text{ع جم ق لا + ف جب ق لا}\right\}،\ \text{ا + ب کی بجائے}$$

ع اور خ (ا - ب) کی بجائے ف رکھنے سے۔

ع اور ف بالکل ویسے ہی اختیاری مستقل ہیں جیسے ا اور ب ہیں۔ پہلی نظر میں شائد یہ معلوم ہو کہ ف کو خیالی ہونا چاہئے (۲۷)
لیکن اِس کا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر ا = ۱ + ۲ خ،
ب = ۱ - ۲ خ تو ع = ۲ اور ف = - ۴

مثال۔ $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - ۶\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۱۳\ \text{ما} = ۰$

امدادی مساوات $\text{م}^{2} - ۶\,\text{م} + ۱۳ = ۰$ ہے جس کی اصلیں
م = ۳ ± ۲ خ ہیں،

حل کو $\text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{(۳+۲\text{خ})\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{(۳-۲\text{خ})\text{لا}}$ لکھا جا سکتا ہے یا

$$\text{ما} = \text{ج}\ \text{و}^{۳\text{لا}}\ \text{جم}\ (۲\text{لا} - \text{عہ})$$

جہاں ج جم عہ = ع اور ج جب عہ = ف

اِس لئے $\text{ج} = \sqrt{\text{ع}^{2} + \text{ف}^{2}}$ اور مس عہ = $\frac{\text{ع}}{\text{ف}}$

۲۷ — مساوی اصلوں کی صورت۔

جب امدادی مساوات میں مساوی اصلیں عہ = بہ ہوں تو حل

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{عہ لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{\text{بہ لا}}$$

حل $\text{ما} = (\text{ا} + \text{ب})\,\text{و}^{\text{عہ لا}}$

میں تحویل ہوتا ہے۔

اب دو اختیاری مستقلوں کا مجموعہ ا + ب فی الحقیقت صرف ایک اختیاری مستقل ہے۔ اِس لیے اِس حل کو عام ترین حل نہیں کہا جا سکتا۔

ہم آیندہ [دفعہ ۳۴] ثابت کرینگے کہ عام حل

$$ما = (ا + ب\ لا)\ قو^{عہ\ لا}$$

ہے۔

۲۸ ـ دو سے اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں پر توسیع۔

دفعات ۲۵ اور ۲۶ کے طریقے مساوات (۱) پر اطلاق پذیر ہیں خواہ ن کی قیمت کچھ ہی ہو بشرطیکہ ف (لا) = ۰ ۔

مثال (۱) $$\frac{فر^{۳}ما}{فر لا^{۳}} - ۶\frac{فر^{۲}ما}{فر لا^{۲}} + ۱۱\frac{فر ما}{فر لا} - ۶ ما = ۰$$

امدادی مساوات $م^{۳} - ۶ م^{۲} + ۱۱ م - ۶ = ۰$ ہے جس کی اصلیں

م = ۱، ۲ یا ۳ ہیں۔

اِس لیے $$ما = ا\ قو^{لا} + ب\ قو^{۲لا} + ج\ قو^{۳لا}$$

مثال (۲) $$\frac{فر^{۳}ما}{فر لا^{۳}} - ۸ ما = ۰$$

امدادی مساوات $م^{۳} - ۸ = ۰$ ہے یعنی

$$(م - ۲)(م^{۲} + ۲م + ۴) = ۰$$

$$\therefore\ م = ۲،\ یا\ -۱ \pm خ\sqrt{۳}$$

$$\therefore\ ما = ا\ قو^{۲لا} + قو^{لا}(ع\ جم\ لا\sqrt{۳} + ف\ جب\ لا\sqrt{۳})$$

یا $$ما = ا\ قو^{۲لا} + ج\ قو^{لا}\ جم(لا\sqrt{۳} - عہ)$$

حل طلب مثالیں

(۲۸) حل کرو:

(۱) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\,\text{ما} = ۰$، (۲) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۴\,\text{ما} = ۰$،

(۳) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۷\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۱۲\,\text{ما} = ۰$، (۴) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۵\,\text{ما} = ۰$،

(۵) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فرت}^{۲}} + ۴\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} + ۱۳\,\text{س} = ۰$، (۶) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فرت}^{۲}} + ۴\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = ۰$،

(۷) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} + ۲\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲\,\text{ما} = ۰$

(۸) مثال (۷) کا حل کیا ہو جائیگا اگر ابتدائی شرطیں

$\text{ما} = ۱،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ جبکہ $\text{لا} = ۰$

ہوں یا اگر ما محدود رہے جبکہ $\text{لا} = +\infty$

حل کرو

(۹) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} + ۱۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۳۶\,\text{ما} = ۰$، (۱۰) $\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} - ۱۳\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۳۶\,\text{ما} = ۰$،

(۱۱) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} + ۸\,\text{ما} = ۰$، (۱۲) $\frac{\text{فر}^{۶}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۶}} - ۶۴\,\text{ما} = ۰$،

(۱۳) $\text{ل}\frac{\text{فر}^{۲}\text{طہ}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ج}\,\text{طہ} = ۰$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{طہ} = \text{عہ}$ اور $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} = ۰$ جبکہ $\text{ت} = ۰$۔

[یہ تقریبی مساوات طول ل کے ایک ایسے سادہ رقاص کے چھوٹے اہتزازوں کے لیے ہے جس کی حرکت سکون کے محل سے جس کا میلان افق کے ساتھ عہ تھا شروع ہوئی تھی]

(۱۴) وہ شرط معلوم کرو کہ

$\text{م}\frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ک}\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} + \text{ج}\,\text{س} = ۰$

کے حل میں مثلثی رقمیں شامل ہوں۔

[یہ مساوات کمیت م کے ایک ذرہ کی حرکت کی ہے جبکہ ذرہ اپنے خطِ حرکت کے ایک ثابت نقطہ کی جانب ایک قوت سے جو اُس نقطہ سے اِس کے فاصلہ کا ج گنا ہے جذب ہوتا ہے اور رگڑ کی ایک مزاحمت سے جو اِس کی رفتار کا ک گنا ہے قصر پاتا ہے۔ مطلوبہ شرط سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اہتزازی ہونی چاہئے مثلاً سُر کا دو شاخہ جو ہوا میں مرتعش ہو جہاں لچک کی قوت جو اُس کو توازن کے محل کی طرف مسترد کرنے کا میلان رکھتی ہے ہٹاؤ کے متناسب ہے اور ہوا کی مزاحمت رفتار کے متناسب ہے۔]

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر ک اسقدر چھوٹا ہو کہ $\frac{\text{ک}^{2}}{\text{م ج}}$ قابل نظر انداز ہے تو مثال (۱۴) کی مساوات کا حل اُس حل کا تقریباً $\text{قو}^{\frac{\text{ک ت}}{\text{۲م}}}$ گنا ہے جو حاصل ہوتا اگر ک صفر ہوتا۔

[اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خفیف قصر سے تعدد میں عملاً کوئی تبدیلی نہیں ہوتی لیکن متواتر ارتعاشوں کا حیط ایک سلسلہ ہندسیہ میں گھٹتا ہے]

(۲۹) (۱۶) $\text{ل}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ق}}{\text{فرت}^{2}} + \text{ر}\,\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} + \frac{\text{ق}}{\text{ج}} = ۰$ کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ق} = \text{ق}_{۰}$ اور $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}} = ۰$ جبکہ $\text{ت} = ۰$ اور یہ کہ $\text{ج ر}^{2} < ۴\,\text{ل}$۔

[ق وہ بار ہے جو وقت ت پر گنجائش ج کے ایک لیڈنی مرتبان کے ایک کوٹ پر ہوتا ہے جب کہ مرتبان کے کوٹ وقت ت = ۰ پر ایک تار سے جس کی مزاحمت ر اور ذاتی امالہ کی قدر

ل سے مربوط کیئے گئے ہوں -]

۲۹ - متمم تفاعل اور خاص تکملہ -

اب تک ہم نے صرف ایسی مثالوں پر بحث کی ہے جن میں مساوات (۱) کا تفاعل ف (لا) صفر کے مساوی تھا - اب ہم اُس رشتہ کو بیان کریں گے جو اِس مساوات کے اُس حل میں جبکہ ف (لا) صفر کے مساوی نہ ہو اور اُس حل میں جو ف (لا) کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے پایا جاتا ہے - ہم ایک سادہ مثال سے ابتدا کرتے ہیں چنانچہ مساوات

$$۲\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۵\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\text{ما} = ۵ + ۲\text{لا}$$

پر غور کرو -

یہ ظاہر ہے کہ اِس کا ایک حل ما = لا ہے - ایسا کوئی حل جس میں اختیاری مستقل شامل نہ ہوں **خاص تکملہ** کہلاتا ہے -

اب اگر ہم ما = لا + و لکھیں تو تفرقی مساوات ہو جاتی ہے

$$۲\frac{\text{فر}^{۲}\text{و}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۵\left(۱ + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\right) + ۲(\text{لا} + \text{و}) = ۵ + ۲\text{لا}$$

یعنے

$$۲\frac{\text{فر}^{۲}\text{و}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۵\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + ۲\text{و} = ۰$$

جس سے

$$\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{-۲\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\frac{۱}{۲}\text{لا}}$$

$$\therefore \quad \text{ما} = \text{لا} + \text{ا}\,\text{قو}^{-۲\text{لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\frac{۱}{۲}\text{لا}}$$

وہ رقمیں جن میں اختیاری مستقل شامل ہوں متمم تفاعل کہلاتی ہیں -

اِس کی تعمیم آسانی سے کیجا سکتی ہے - چنانچہ اگر

$$\text{ب}_{۰}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}+\text{ب}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-۱}}+\cdots\cdots+\text{ب}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ما}$$
$$=\text{ف}(\text{لا})\text{،}\quad\ldots\ldots(۶)$$

کا ایک خاص تکملہ ما = ع ہو تو

$$\text{ب}_{۰}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ع}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}+\text{ب}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\text{ع}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-۱}}+\cdots\cdots+\text{ب}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}+\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{ع}$$
$$=\text{ف}(\text{لا})\text{،}\quad\ldots(۷)$$

اب مساوات (۶) میں ما = ع + و رکھو اور مساوات (۷) کو تفریق کرو تو

$$\text{ب}_{۰}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{و}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}+\text{ب}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\text{و}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-۱}}+\cdots\cdots+\text{ب}_{\text{ن}-۱}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$
$$+\,\text{ب}_{\text{ن}}\,\text{و}=۰\text{،}\quad\ldots\ldots(۸)$$

اگر (۸) کا حل و = فا(لا) ہو جس میں ن اختیاری مستقل شامل ہوں تو (۶) کا عام حل

$$\text{ما}=\text{ع}+\text{فا}(\text{لا})$$

ہے اور فا(لا) متمم تفاعل ہے۔

پس معلوم ہوا کہ مستقل سروں والی ایک خطی تفرقی مساوات کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا حاصل جمع ہوتا ہے جہاں متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو دی ہوئی تفرقی مساوات میں لا کے تفاعل کی بجائے صفر رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

حل طلب مثالیں

مثالوں (۱) تا (۳) میں اس امر کی تصدیق کرو کہ دئے ہوئے تفاعل اِن کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکملے ہیں، نیز عام حل معلوم کرو:

(۱) قو^لا ، فر^۲ ما / فر لا^۲ − ۲ فر ما / فر لا + ۲ ما = قو^لا

(۲) ۳ ، فر^۲ ما / فر لا^۲ − ۱۲ فر ما / فر لا + ۱۲ ما = ۳۶

(۳) ۲ جب ۳ لا ، فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۴ ما = − ۱۰ جب ۳ لا

حسب ذیل مثالوں میں مستقلوں کی وہ قیمتیں معلوم کرو جن کے لیے دئے ہوئے تفاعل اِن کے ساتھ لکھی ہوئی مساواتوں کے خاص تکملے ہو جائیں:

(۴) ا قو^(ب لا) ، فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۱۳ فر ما / فر لا + ۴۲ ما = ۱۱۲ قو^لا

(۵) ا قو^(ب ت) ، فر^۲ س / فر ت^۲ + ۹ س = ۶۰ قو^ت

(۶) ا جب پ لا ، فر^۲ ما / فر لا^۲ + ما = ۱۲ جب ۲ لا

(۷) ا جب پ لا + ب جم پ لا ، فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۴ فر ما / فر لا + ۳ ما = ۸ جم لا
− ۶ جب لا

(۸) ا ، فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۵ فر ما / فر لا + ۶ ما = ۱۲

حسب ذیل مساواتوں کے خاص تکملے آزمایش سے معلوم کرو:

(۹) فر^۲ ما / فر لا^۲ + ۲ فر ما / فر لا + ۵ ما = ۸۰ قو^(۳ لا)

$$(\text{۱۰})\quad \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۳۷}\,\text{ما} = \text{۳۰۰}\,\text{قو}^{\text{لا}}$$

$$(\text{۱۱})\quad \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۸}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲۵}\,\text{ما} = \text{۵۰}$$

۳۰ ـ عامل عف اور جبر و مقابلہ کے اساسی قانون۔

جب خاص تکملہ اوپر کے طریقوں سے معلوم نہ ہو سکے تو بعض دیگر طریقے جن میں عامل عف شامل ہوتا ہے استعمال کئے جاتے ہیں۔ عامل عف سے $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ مراد ہے۔ یہ عامل متمم تفاعل کی شکل کو جبکہ امدادی تفاعل کی اصلیں مساوی ہوں متعین کرنے میں بھی کار آمد ہے۔

عف$^{\text{۲}}$ ، $\frac{\text{فر}^{\text{۲}}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}$ کی بجائے اور عف$^{\text{۳}}$ ، $\frac{\text{فر}^{\text{۳}}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}}$ کی بجائے استعمال کیا جائے گا، علیٰ ہذا القیاس۔

اب جملہ $\text{۲}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۵}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲}\,\text{ما}$ کو شکل

$$\text{۲عف}^{\text{۲}}\text{ما} + \text{۵عف ما} + \text{۲ما}$$

میں لکھا جاسکتا ہے یا شکل

$$(\text{۲عف}^{\text{۲}} + \text{۵عف} + \text{۲})\,\text{ما}$$

میں۔ ہم اس کو اجزائے ضربی کی شکل

$$(\text{۲عف} + \text{۱})(\text{عف} + \text{۲})\,\text{ما}$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں، ہم نے یہاں عف کے جملہ کے اجزائے ضربی یہ سمجھ کر معلوم کئے ہیں گویا کہ عف ایک معمولی جبریہ مقدار ہے۔ کیا یہ جائز ہے؟

وہ عمل جو معمولی جبر و مقابلہ میں کئے جاتے ہیں تین قانونوں پر

مبنی ہیں :

۱- قانون تقسیمی، م (ا + ب) = م ا + م ب

۲- قانون تبدیلی، ا ب = ب ا

۳- قانون قوت نما، $ا^{م} \times ا^{ن} = ا^{م+ن}$

اب عف اِن میں سے پہلے اور تیسرے قانونوں کو پورا کرتا ہے کیونکہ

عف (ع + و) = عف ع + عف و

اور $عف^{م} \times عف^{ن} ع = عف^{م+ن} ع$ (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

اب رہا دوسرا قانون تو اِس کے متعلق عف (ج ع) = ج (عف ع) درست ہے اگر ج ایک مستقل ہے لیکن درست نہیں اگر ج متغیر ہے - نیز

$عف^{م} (عف^{ن} ع) = عف^{ن} (عف^{م} ع)$، (م اور ن مثبت صحیح اعداد)

پس ہم دیکھتے ہیں کہ عف جبر و مقابلہ کے اساسی قانونوں کو پورا کرتا ہے، صرف وہ قانون تبدیلی کو متغیروں کی صورت میں پورا نہیں کرتا۔ آئندہ ہم لکھینگے

$$فا(عف) \equiv ب\,عف^{ن} + ب_{۱}\,عف^{ن-۱} + ب_{۲}\,عف^{ن-۲} + \ldots\ldots$$
$$+ ب_{ن-۱}\,عف + ب_{ن}$$

جہاں تمام ب مستقل ہیں اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے - ہم اس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں یا کوئی اور عمل جو جبر و مقابلہ کے

اساسی قانونوں پر منحصر ہوں استعمال میں لاسکتے ہیں ایسی مثال کے لئے جس میں عاملوں کے لیے قانون قوت نما درست نہیں رہتا جبکہ عف کی منفی قوتیں واقع ہوتی ہیں دیکھو دفعہ ۲۷ کی مثال (۳) -

۳۱ - فا(عف) قو^ال = قو^ال فا(ا)

چونکہ عف قو^ال = ا قو^ال

عف^۲ قو^ال = ا^۲ قو^ال

اور علیٰ ہذا اس لیے

فا(عف) قو^ال = (ب عف^ن + ب۱ عف^(ن-۱) + ... + ب(ن-۱) عف + ب(ن)) قو^ال

= (ب ا^ن + ب۱ ا^(ن-۱) + ... + ب(ن-۱) ا + ب(ن)) قو^ال

= قو^ال فا(ا)

(۲ **۳۲ - فا(عف) {قو^ال و} = قو^ال فا(عف + ا) و جہاں و، لا کا کوئی تفاعل ہے -**

حاصل ضرب کے ن ویں تفرقی سر کے لئے لیب نیز کا جو مسئلہ ہے اُس کی رُو سے

عف^ن {قو^ال و} = (عف^ن قو^ال) و + ن (عف^(ن-۱) قو^ال) (عف و)

+ ۱/۲ ن (ن-۱) (عف^(ن-۲) قو^ال) (عف^۲ و) + ...

+ قو^ال (عف^ن و)

$$= \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{و} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-۱}\,\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{عف}\,\text{و} + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ن}(\text{ن}-۱)\,\text{ا}^{\text{ن}-۲}\,\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{عف}^{۲}\,\text{و} + \ldots\ldots + \text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{و}$$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}}\left(\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-۱}\,\text{عف} + \tfrac{۱}{۲}\,\text{ن}(\text{ن}-۱)\,\text{ا}^{\text{ن}-۲}\,\text{عف}^{۲} + \ldots\ldots + \text{عف}^{\text{ن}}\right)\text{و}$$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}}\,(\text{عف} + \text{ا})^{\text{ن}}\,\text{و}$$

اسی طرح $\text{عف}^{\text{ن}-۱}\{\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{و}\} = \text{فو}^{\text{ا لا}}(\text{عف}+\text{ا})^{\text{ن}-۱}\,\text{و}$ ، علیٰ ہٰذ القیاس

اس لیے $\text{فا}(\text{عف})\{\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{و}\} = (\text{ب}\,\text{عف}^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{عف}^{\text{ن}-۱} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{عف} + \text{ب}_{\text{ن}})\{\text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{و}\}$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}}\{\text{ب}(\text{عف}+\text{ا})^{\text{ن}} + \text{ب}_{۱}(\text{عف}+\text{ا})^{\text{ن}-۱} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}(\text{عف}+\text{ا}) + \text{ب}_{\text{ن}}\}\,\text{و}$$

$$= \text{فو}^{\text{ا لا}}\,\text{فا}(\text{عف}+\text{ا})\,\text{و}$$

۳۲۔ $\text{فا}(\text{عف}^{۲})\,\text{جم}\,\text{ا لا} = \text{فا}(-\text{ا}^{۲})\,\text{جم}\,\text{ا لا}$

چونکہ $\text{عف}^{۲}\,\text{جم}\,\text{ا لا} = -\text{ا}^{۲}\,\text{جم}\,\text{ا لا}$

$$\text{عف}^{۴}\,\text{جم}\,\text{ا لا} = (-\text{ا}^{۲})^{۲}\,\text{جم}\,\text{ا لا}$$

. . . .

اِس لیے $\text{فا}(\text{عف}^{۲})\,\text{جم}\,\text{ا لا} = (\text{ب}\,\text{عف}^{۲\text{ن}} + \text{ب}_{۱}\,\text{عف}^{۲\text{ن}-۲} + \ldots\ldots + \text{ب}_{\text{ن}-۱}\,\text{عف}^{۲} + \text{ب}_{\text{ن}})\,\text{جم}\,\text{ا لا}$

= { ب. (-ا^۲)^ن + ب۱ (-ا^۲)^(ن-۱) + ... + ب ن-۱ (-ا^۲)

+ ب ن } جم ا لا

= فا (-ا^۲) جم ا لا

اسی طرح فا (عف^۲) جب ا لا = فا (-ا^۲) جب ا لا

۳۴ - متمم تفاعل جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں -

جب امدادی مساوات کی اصلیں عہ اور عہ مساوی ہوتی ہیں تو اِس کو شکل

م^۲ - ۲ م عہ + عہ^۲ = ۰

میں لکھا جا سکتا ہے۔ تب ابتدائی تفرقی مساوات

فر^۲ ما / فر لا^۲ - ۲ عہ فر ما / فر لا + عہ^۲ ما = ۰

یعنی (عف^۲ - ۲ عہ عف + عہ^۲) ما = ۰

(عف - عہ)^۲ ما = ۰، .... (۹)

ہو گی۔

ہم پہلے معلوم کر چکے ہیں کہ ما = ا قو^(عہ لا) ایک حل ہے۔ عام حل معلوم کرنے کے لیے ما = قو^(عہ لا) و رکھو جہاں و، لا کا ایک تفاعل ہے۔

دفعہ ۳۲ کی رُو سے

(عف - عہ)^۲ { قو^(عہ لا) و } = قو^(عہ لا) (عف - عہ + عہ)^۲ و = قو^(عہ لا) عف^۲ و

پس مساوات (۹) ہو جاتی ہے

$$\text{عف}^{۲}\,\text{و} = ۰$$

یعنے $$\text{و} = \text{ا} + \text{ب لا}$$

اِس لیے $$\text{ما} = \text{قو}^{\text{عہ لا}}\,(\text{ا} + \text{ب لا})$$

(۳۳ اسی طرح مساوات $$(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\,\text{ما} = ۰$$

مساوات $$\text{عف}^{\text{پ}}\,\text{و} = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و} = (\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ا}_{\text{پ}}\,\text{لا}^{\text{پ}-۱})$$

اور $$\text{ما} = \text{قو}^{\text{عہ لا}}\,(\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + \ldots + \text{ا}_{\text{پ}}\,\text{لا}^{\text{پ}-۱})$$

جب متعدد مساوی اصلیں ہوں مثلاً

$$(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\,(\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}}\,(\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}}\,\text{ما} = ۰، \ldots\ (۱۰)$$

توچونکہ عاملوں پر قانون تبدیلی جاری کیا جا سکتا ہے اِس لیے ہم اِس مساوات کو شکل

$$(\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}}\,(\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}}\,\{(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\,\text{ما}\} = ۰$$

میں لکھ سکتے ہیں اور یہ مساوات، سادہ تر مساوات

$$(\text{عف} - \text{عہ})^{\text{پ}}\,\text{ما} = ۰، \ldots\ (۱۱)$$

کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

اسی طرح مساوات (۱۰)

$$(\text{عف} - \text{بہ})^{\text{ق}}\,\text{ما} = ۰، \ldots\ (۱۲)$$

یا

$$(\text{عف} - \text{جہ})^{\text{ر}}\,\text{ما} = ۰، \ldots\ (۱۳)$$

کے کسی حل سے پوری ہوتی ہے۔

مساوات (۱۰) کا عام حل مساواتوں (۱۱)، (۱۲)، اور (۱۳) کے عام حلوں کا مجموعہ ہے اور اِس میں (پ + ق + ر) اختیاری مستقل شامل ہوں گے۔

مثال (۱) حل کرو (عف^{۴} - ۸ عف^{۲} + ۱۶) ما = ۰

یعنے (عف^{۲} - ۴)^{۲} ما = ۰

امدادی مساوات (م^{۲} - ۴)^{۲} = ۰ ہے

جس کی اصلیں م = ۲ (دو مرتبہ)، یا م = -۲ (دو مرتبہ) ہیں -

اِس لیے قاعدہ کی رو سے حل ہے

ما = (ا + ب لا) قو^{۲لا} + (ع + ف لا) قو$^{-۲لا}$

مثال (۲) حل کرو (عف^{۲} + ۱)^{۲} ما = ۰

امدادی مساوات (م^{۲} + ۱)^{۲} = ۰ ہے

∴ م = خ (دو مرتبہ) یا م = -خ (دو مرتبہ)

∴ ما = (ا + ب لا) قو$^{خ لا}$ + (ع + ف لا) قو$^{-خ لا}$

یا ما = (پ + ق لا) جم لا + (ر + س لا) جب لا

حل طلب مثالیں -

(۱) (عف^{۴} + ۲ عف^{۳} + عف^{۲}) ما = ۰،

(۲) (عف^{۶} + ۳ عف^{۴} + ۳ عف^{۲} + ۱) ما = ۰

(۳) (عف^{۴} - ۲ عف^{۳} + ۲ عف^{۲} - ۲ عف + ۱) ما = ۰،

(۴) (۴ عف^{۵} - ۳ عف^{۳} - عف^{۲}) ما = ۰

(۵) ثابت کرو کہ

فا(عف^{۲})(پ جمزا لا + ق جبزا لا) = ف(ا^{۲})(پ جمزا لا + ق جبزا لا)

(٦) ثابت کرو کہ (عف - ا)$^{\text{ن}}$ (قو$^{\text{الا}}$ جب ب لا) = ب$^{\text{ن}}$ قو$^{\text{الا}}$ جب ب لا

۳۵ - خاص تکملہ کو معلوم کرنے کے لیے علامتی طریقے جبکہ فا (لا) = قو$^{\text{الا}}$ -

حسب ذیل طریقے عامل عف کو اس طرح استعمال کرنے پر مبنی ہیں گویا کہ وہ ایک معمولی جبریہ مقدار ہے - اول ہم کسی جبریہ عمل کو جو مناسب معلوم ہو اختیار کریں گے اور جب اس کی تکمیل سے نتیجہ حاصل ہو جائے تو اس نتیجہ کی تصدیق راست تفرق کے عمل سے کیجائے گی - ترقیم

$$\frac{1}{\text{فا (عف)}}\ \text{ف (لا)}$$

کو مساوات فا (عف) ما = ف (لا)

کے خاص تکملہ کے لیے استعمال کیا جائے گا۔

(ا) اگر ف (لا) = قو$^{\text{الا}}$ تو دفعہ ۳۱ کے نتیجہ

$$\text{فا (عف) قو}^{\text{الا}} = \text{قو}^{\text{الا}}\ \text{فا (ا)}$$

سے یہ اندازہ ہوتا ہے کہ $\frac{1}{\text{فا(عف)}}$ قو$^{\text{الا}}$ کی ایک قیمت $\frac{1}{\text{فا (ا)}}$ قو$^{\text{الا}}$

ہو سکتی ہے جب تک کہ فا (ا) ≠ ۰ -

اِس کی تصدیق بآسانی ہو جاتی ہے کیونکہ

$$\text{فا (عف)} \left\{ \frac{1}{\text{فا (ا)}}\ \text{قو}^{\text{الا}} \right\} = \frac{\text{قو}^{\text{الا}}\ \text{فا (ا)}}{\text{فا (ا)}}$$ ، بموجب دفعہ ۳۱

$$= \text{قو}^{\text{الا}}$$

(۲) اگر فا(ا) = ۰ تو (عف ـ ا) کو فا(عف) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہئے۔

فرض کرو کہ فا(عف) = (عف ـ ا)^ب فہ(عف) جہاں فہ(ا) ≠ ۰

اب دفعہ ۳۲ کے نتیجہ

$$\text{فا(عف)}\left\{\text{قو}^{\text{ا لا}}\,\text{و}\right\} = \text{قو}^{\text{ا لا}}\,\text{فا(عف + ا)}\,\text{و}$$

سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر و = ۱ تو

$$\frac{1}{\text{فا(عف)}}\,\text{قو}^{\text{ا لا}} = \frac{1}{(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\,\text{فہ(عف)}} \times \text{قو}^{\text{ا لا}} = \frac{1}{(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ا لا}} \times 1}{\text{فہ(ا)}}\right\}$$

$$= \frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{فہ(ا)}}\,\frac{1}{\text{عف}^{\text{ب}}} \times 1 = \frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{فہ(ا)}} \times \frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\lfloor\text{ب}}$$

درست ہو سکتا ہے جبکہ ہم یہ صریح مفروضہ اختیار کریں کہ $\frac{1}{\text{عف}}$ وہ عامل ہے جو عف کا مقلوب ہے یعنے وہ عامل جو لا کے لحاظ سے تکمل کرتا ہے، اسی طرح $\frac{1}{\text{عف}^{\text{ب}}}$، لا کے لحاظ سے ب مرتبہ تکمل کرتا ہے۔

نیز اس نتیجہ کی جو آزمایشی طریقہ سے حاصل ہوا ہے آسانی سے تصدیق ہوسکتی ہے کیونکہ

$$\text{فا(عف)}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{فہ(ا)}}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\lfloor\text{ب}}\right\} = (\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\,\text{فہ(عف)}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{فہ(ا)}}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\lfloor\text{ب}}\right\}$$

$$= \text{فہ(عف)}\left[(\text{عف}-\text{ا})^{\text{ب}}\left\{\frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{فہ(ا)}}\,\frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\lfloor\text{ب}}\right\}\right]$$

$$= \text{فہ(عف)} \left[\frac{\text{فو}^{\text{الا}}}{\text{فہ(ا)}} \text{عف}^{\text{ب}} \frac{\text{لا}^{\text{ب}}}{\text{اب}} \right]$$ حسب دفعہ ۳۲

$$= \text{فہ(عف)} \left[\frac{\text{فو}^{\text{الا}}}{\text{فہ(ا)}} \times ۱ \right]$$

$$= \text{فو}^{\text{الا}}$$ حسب دفعہ ۳۱

(۳۵) عددی مثالوں کو حل کرنے میں آزمائشی طریقوں کی بار بار تصدیق کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

مثال (۱) $(\text{عف} + ۳)^۲ \,\text{ما} = ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$

خاص تکملہ

$$\frac{۱}{(\text{عف} + ۳)^۲} \times ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} = \frac{۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}}{(۲ + ۳)^۲} = ۲ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$$

ہے۔ متمم تفاعل کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = ۲ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} + (\text{ا} + \text{ب لا}) \,\text{فو}^{-۳\text{لا}}$$

مثال (۲) $(\text{عف} - ۲)^۲ \,\text{ما} = ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$

اگر $\frac{۱}{(\text{عف} - ۲)^۲} \times ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$ میں عف کی بجائے ۲ درج کیا جائے تو نتیجہ لاتناہی حاصل ہوتا ہے۔ لیکن دوسرا طریقہ استعمال کرنے سے

$$\frac{۱}{(\text{عف} - ۲)^۲} \times ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} = ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} \frac{۱}{\text{عف}^۲} \times ۱ = ۵۰ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} \times \frac{۱}{۲} \text{لا}^۲$$

$$= ۲۵ \,\text{لا}^۲ \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$$

متمم تفاعل جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = ۲۵ \,\text{لا}^۲ \,\text{فو}^{۲\text{لا}} + (\text{ا} + \text{ب لا}) \,\text{فو}^{۲\text{لا}}$$

حل طلب مثالیں۔

حل کرو:

(۱) (عف^{۲} + ۶ عف + ۲۵) ما = ۱۰۴ قو^{۳لا}،

(۲) (عف^{۲} + ۲ ب عف + ب^{۲} + ق^{۲}) ما = قو$^{ا لا}$،

(۳) (عف^{۲} - ۹) ما = ۵۴ قو^{۳لا}، (۴) (عف^{۳} - عف) ما = قو^{لا} + قو$^{-لا}$

(۵) (عف^{۲} - ب^{۲}) ما = ا جنر ب لا، (۶) (عف^{۳} + ۴ عف^{۲} + ۴ عف) ما

= ۸ قو$^{-۲لا}$

۳۶ — خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = جم ا لا

دفعہ ۳۴ کی رو سے

ف (عف^{۲}) جم ا لا = ف (- ا^{۲}) جم ا لا

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہم خاص تکملہ کو اس طرح حاصل کرسکتے ہیں کہ جہاں جہاں عف^{۲} واقع ہے اس کی بجائے - ا^{۲} درج کریں۔

مثال (۱) (عف^{۲} + ۳ عف + ۲) ما = جم ۲ لا

$$\frac{۱}{\text{عف}^{۲} + ۳\,\text{عف} + ۲}\ \text{جم ۲ لا} = \frac{۱}{-۴ + ۳\,\text{عف} + ۲}\ \text{جم ۲ لا} = \frac{۱}{۳\,\text{عف} - ۲}\ \text{جم ۲ لا}$$

نسب نما میں عف^{۲} لانے کے لیے نسب نما اور شمار کنندہ کو ۳ عف + ۲ سے ضرب دو جیسا کہ اصم مقداروں کی صورت میں کیا جاتا ہے تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۳\,\text{عف} - ۲} = \frac{۳\,\text{عف} + ۲}{۹\,\text{عف}^{۲} - ۴}$$

جس سے

(۳ عف + ۲)/(-۳۶ - ۴) جم ۲ لا = - ۱/۴۰ (۳ عف جم ۲ لا + ۲ جم ۲ لا)

= - ۱/۴۰ (-۶ جب ۲ لا + ۲ جم ۲ لا)

= ۱/۲۰ (۳ جب ۲ لا - جم ۲ لا)

مثال (۲) (عف^۳ + ۶ عف^۲ + ۱۱ عف + ۶) ما = ۲ جب ۳ لا (۳۶)

۱/(عف^۳ + ۶ عف^۲ + ۱۱ عف + ۶) ۲ جب ۳ لا = ۲ · ۱/(-۹ عف - ۵۴ + ۱۱ عف + ۶) ۲ جب ۳ لا

= ۱/(عف - ۲۴) جب ۳ لا

= (عف + ۲۴)/(عف^۲ - ۵۷۶) جب ۳ لا

= - ۱/۵۸۵ (۳ جم ۳ لا + ۲۴ جب ۳ لا)

= - ۱/۱۹۵ (جم ۳ لا + ۸ جب ۳ لا)

اب ہم راست تفرق کے عمل سے یہ بتلا سکتے ہیں کہ حاصل شدہ نتیجے درست ہیں -

اگر اس طریقہ کو

[فہ (عف^۲) + عف قہ (عف^۲)] ما = ب جم ا لا + ج جب ا لا

پر استعمال کیا جائے جہاں ب اور ج مستقل ہیں تو حاصل ہوگا

فہ (-ا^۲) (ب جم ا لا + ج جب ا لا) + ا قہ (-ا^۲) (ب جب ا لا - ج جم ا لا)

{فہ (-ا^۲)}^۲ + ا^۲ {قہ (-ا^۲)}^۲

یہ بتلانا بہت آسان ہے کہ جملۂ بالا فی الحقیقت ایک خاص تکملہ ہے بشرطیکہ نسب نما معدوم نہ ہو - اس مستثنیٰ صورت پر آیندہ بحث کی جائے گی (دفعہ ۳۸) -

حل طلب مثالیں

حل کرو:

(۱) (عف + ۱) ما = ۱۰ جب ۲ لا،

(۲) (عف^{۲} - ۵ عف + ۶) ما = ۱۰۰ جب ۴ لا

(۳) (عف^{۲} + ۸ عف + ۲۵) ما = ۴۸ جم لا - ۱۶ جب لا،

(۴) (عف^{۲} + ۲ عف + ۱۰۱) ما = جب ۲۰ لا + ۴۰ جم ۲۰ لا

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فر ت}^{۲}}$ + ۲ ک $\frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}}$ + ب^{۲}س = ا جم ج ت

کے خاص تکملہ کو شکل پ جم (ج ت - صہ)

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں پ = $\frac{\text{ا}}{\{(\text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲})^{۲} + ۴\text{ک}^{۲}\text{ج}^{۲}\}^{\frac{۱}{۲}}}$ اور

$$\text{مس صہ} = \frac{۲\text{ک ج}}{\text{ب}^{۲} - \text{ج}^{۲}}$$

پس ثابت کرو کہ اگر ج متغیر ہو اور ک، ب، اور ا مستقل ہوں تو پ

بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ک بہت چھوٹا ہو اور ج = $\sqrt{\text{ب}^{۲} - ۲\text{ک}^{۲}}$ تقریباً - اس

صورت میں صہ = $\frac{\pi}{۲}$ تقریباً اور پ = $\frac{\text{ا}}{۲\text{ک ب}}$ تقریباً -

[یہ تفرقی مساوات ایک مرتعش نظام کے لیے ہے جس میں ایک قوت سے جو رفتار کے متناسب ہے قصر ہوتا ہے اور جو ایک بیرونی

دَوری قوت کے زیرِ عمل ہے۔ خاص تکملہ سے قسری ارتعاش حاصل ہوتے ہیں اور متمم تفاعل سے وہ آزاد ارتعاش جن کا قسر جلد عمل میں آجاتا ہے [دیکھو مثال ۱۵ دفعہ ۲۸ کے بعد]۔ اِن قسری ارتعاشوں کا حیطہ بڑے سے بڑا ہوگا اگر بیرونی قوت کا دَور $\frac{۲\pi}{ج}$ آزاد ارتعاشوں کے

دَور [جو $\frac{۲\pi}{\sqrt{ب^۲ - ک^۲}} = \frac{۲\pi}{ب}$ تقریباً ہے] کے تقریباً مساوی ہو اور تب (۳۷)

ہد جو بیرونی قوت اور جواب کے درمیان ہیئت کا فرق ہے تقریباً $\frac{\pi}{۲}$ ہوتا ہے۔ یہ گمک کا اہم مظہر ہے جس کے اطلاق آواز، تعمیرات اور بے تار ٹیلیغراف میں بہت اہم ہیں)۔]

۳۷ — خاص تکملہ جبکہ ف (لا) = $لا^م$ جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اِس صورت میں آزمائشی طریقہ، $\frac{۱}{فا(عف)}$ کو عف کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں پھیلاتا ہے۔

مثال (۱) $\frac{۱}{عف^۲ + ۴} لا^۲ = \frac{۱}{۴}(۱ + \frac{۱}{۴} عف^۲)^{-۱} لا^۲$

$$= \frac{۱}{۴}(۱ - \frac{۱}{۴} عف^۲ + \frac{۱}{۱۶} عف^۴ \ldots) لا^۲$$

$$= \frac{۱}{۴}(لا^۲ - \frac{۱}{۲})$$

پس متمم تفاعل کو جمع کرنے سے

$$(عف^۲ + ۴) ی = لا^۲$$

کا حل $ی = \frac{۱}{۴}(لا^۲ - \frac{۱}{۲}) + ا\ جم\ ۲لا + ب\ جب\ ۲لا$ ہے۔

مثال (۲)

$\frac{1}{\text{عف}^2 - 4\,\text{عف} + 3}\,\text{لا}^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\text{عف}} - \frac{1}{3-\text{عف}}\right)\text{لا}^3$، جزئی کسروں میں

$= \frac{1}{2}\left\{(1+\text{عف}+\text{عف}^2+\text{عف}^3+\cdots) - \frac{1}{3}\left(1+\frac{\text{عف}}{3}+\frac{\text{عف}^2}{9}+\frac{\text{عف}^3}{27}+\cdots\right)\right\}\text{لا}^3$

$= \left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\,\text{عف} + \frac{13}{27}\,\text{عف}^2 + \frac{40}{81}\,\text{عف}^3 + \frac{121}{243}\,\text{عف}^4 + \cdots\right\}\text{لا}^3$

$= \frac{1}{3}\,\text{لا}^3 + \frac{4}{3}\,\text{لا}^2 + \frac{26}{9}\,\text{لا} + \frac{80}{27}$

متمم تفاعل جمع کرنے پر

$(\text{عف}^2 - 4\,\text{عف} + 3)\,\text{ی} = \text{لا}^3$

کا حل $\text{ی} = \frac{1}{3}\,\text{لا}^3 + \frac{4}{3}\,\text{لا}^2 + \frac{26}{9}\,\text{لا} + \frac{80}{27} + \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{3\text{لا}}$ ہے۔

مثال (۳) $\frac{1}{\text{عف}^2(\text{عف}^2+4)}\,96\,\text{لا}^2 = 96 \times \frac{1}{\text{عف}^2}\left\{\frac{1}{\text{عف}^2+4}\,\text{لا}^2\right\}$

$= 96 \times \frac{1}{\text{عف}^2} \times \frac{1}{4}\left(\text{لا}^2 - \frac{1}{2}\right)$ مثال (۱) سے

$= 96 \times \frac{1}{4}\left(\frac{\text{لا}^4}{12} - \frac{\text{لا}^2}{4}\right)$

$= 2\,\text{لا}^4 - 6\,\text{لا}^2$

اس لیے $\text{عف}^2(\text{عف}^2+4)\,\text{ی} = 96\,\text{لا}^2$ کا حل

$$\text{ما} = 2\,\text{لا}^{4} - 6\,\text{لا}^{2} + \text{ا}\,\text{جم}\,2\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,2\,\text{لا} + \text{ع} + \text{غ}\,\text{لا}$$

ہونا چاہیئے ۔

متبادل طریقہ

$$\frac{1}{\text{عف}^{2}(\text{عف}^{2}+4)}\,96\,\text{لا}^{2} = \frac{96}{\text{عف}^{2}} \times \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\text{عف}^{2} + \frac{1}{16}\text{عف}^{4} - \dots\right)\text{لا}^{2}$$

$$= \left(24\,\text{عف}^{-2} - 6 + \frac{3}{2}\text{عف}^{2} - \dots\right)\text{لا}^{2}$$

$$= 2\,\text{لا}^{4} - 6\,\text{لا}^{2} + 3$$

اِس میں ایک زائد رقم ۳ ہے لیکن یہ رقم اوپر کے حل کے متمم (۳۸)
تفاعل میں شامل ہے ۔

وہ طریقہ[1] درست ہے جس کو ہم نے مثالوں (۱) اور (۲) میں جنہیں عف، تفاعل فا (عف) میں جزو ضربی کے طور پر شریک نہیں ہے اختیار کیا ہے ۔ اِس کی وجہ حسب ذیل ہے ۔ فرض کرو کہ پھیلاؤ معمولی طویل تقسیم کے ذریعہ حاصل کئے جا چکے ہیں ۔ یہ امر ہمیشہ ممکن ہے اگرچہ جزئی کسروں کا استعمال عملاً زیادہ سہولت بخش ہو سکتا ہے ۔ اگر تقسیم کا عمل جاری رکھا جائے یہاں تک کہ خارج قسمت میں $\text{عف}^{\text{م}}$ آجائے تو باقی میں $\text{عف}^{\text{م}+1}$ جزو ضربی کے طور پر شریک رہے گا ۔ فرض کرو کہ باقی $\text{فہ}(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1}$ ہے ۔ تب

$$\frac{1}{\text{فا}(\text{عف})} = \text{ج}_{0} + \text{ج}_{1}\,\text{عف} + \text{ج}_{2}\,\text{عف}^{2} + \dots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{عف}^{\text{م}} + \frac{\text{فہ}(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1}}{\text{فا}(\text{عف})} \qquad \dots\dots(1)$$

[1] اِس دفعہ کا مابقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کیا جا سکتا ہے ۔

یہ ایک جبریہ متماثلہ مساوات ہے اور اِس لیے

$$1 = \text{فا}(\text{عف})\left\{\text{ج}_{0} + \text{ج}_{1}\,\text{عف} + \text{ج}_{2}\,\text{عف}^{2} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{عف}^{\text{م}}\right\} + \text{ف}(\text{عف}) \times \text{عف}^{\text{م}+1}, \quad \ldots (2)$$

مساوات (۲) درست ہے اگر عف ایک جبریہ مقدار ہو۔ یہ مساوات شکل میں سادہ ہے اور صرف معمولی جبریہ قانونوں کے تابع ہے جن کے متعلق ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وہ عامل عف پر اطلاق پذیر ہیں۔ اِس میں اُن مشکلوں سے واسطہ نہیں پڑتا جو عف کے تفاعلوں سے تقسیم کرنے کی صورت میں پیش آتی ہیں۔ اِس لیے مساوات (۲) اُس وقت بھی درست ہے جبکہ مساوات کی ہر جانب کو ایک عامل متصور کیا جائے۔ $\text{لا}^{\text{م}}$ پر عمل کرنے سے

$$\text{لا}^{\text{م}} = \text{فا}(\text{عف})\left\{(\text{ج}_{0} + \text{ج}_{1}\,\text{عف} + \text{ج}_{2}\,\text{عف}^{2} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{عف}^{\text{م}})\,\text{لا}^{\text{م}}\right\}, \quad \ldots (3)$$

کیونکہ $\text{عف}^{\text{م}+1}\,\text{لا}^{\text{م}} = 0$۔ اِس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مساوات (۱) کے بائیں جانبی پھیلاؤ سے $\text{فا}(\text{عف})\,\text{ما} = \text{لا}^{\text{م}}$ کا خاص تکملہ حاصل ہوتا ہے اگر باقی کو نظر انداز کیا جائے۔

یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ یہ طریقہ اُس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ پھیلاؤ عف کی جبریہ قیمتوں کے لیے متسع ہو۔

مثال (۳) کی مانند صورتوں میں پہلے طریقہ کی تصدیق کرنے کے لیے ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{1}{\text{عف}^{\text{ر}}} \times \left\{(\text{ج}_{0} + \text{ج}_{1}\,\text{عف} + \text{ج}_{2}\,\text{عف}^{2} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{عف}^{\text{م}})\,\text{لا}^{\text{م}}\right\}$$

یعنی $(\text{ج}_{0}\,\text{عف}^{-\text{ر}} + \text{ج}_{1}\,\text{عف}^{-\text{ر}+1} + \text{ج}_{2}\,\text{عف}^{-\text{ر}+2} + \cdots + \text{ج}_{\text{م}}\,\text{عف}^{-\text{ر}+\text{م}})\,\text{لا}^{\text{م}}$

{ فا(عف) × عفَ^{ر} } ما = لا^{م} کا ایک خاص تکملہ ہے یعنی یہ کہ

{فا(عف) × عفَ^{ر} }{(ج عفَ$^{-ر}$ + ج$_{۱}$ عفَ$^{-ر+۱}$ + ج$_{۲}$ عفَ$^{-ر+۲}$

+ . . . . + ج$_{م}$ عفَ$^{-ر+م}$) لا^{م}} = لا^{م} . . . (۴)

اب { فا(عف) × عفَ^{ر} } ۶ = فا(عف) {عفَ^{ر} ۶ }

نیز عفَ^{ر} {(ج$_{س}$ عفَ$^{-ر+س}$) لا^{م} } = (ج$_{س}$ عفَ^{س}) لا^{م}

اس لیے مساوات (۴) کی دائیں جانب کا جملہ ہو جاتا ہے

فا(عف) {(ج + ج$_{۱}$ عف + ج$_{۲}$ عفَ^{۲} + . . . + ج$_{م}$ عفَ^{م}) لا^{م} } = لا^{م} بموجب (۳)

اور یہی ثابت کرنا تھا۔

متبادل طریقہ میں ہمیں خاص تکملہ میں ر زائد رقمیں ملیں گی، فرض کرو کہ یہ رقمیں

ج$_{م+۱}$ عفَ$^{-ر+م+۱}$ + ... + ج$_{م+ر}$ عفَ^{م}) لا^{م}

ہیں۔ ان میں ایسی رقمیں شریک ہیں جن میں لا کی (ر-۱) ویں اور اس سے کمتر قوتیں آتی ہیں۔ لیکن یہ سب کی سب متمم تفاعل میں واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے پہلے طریقہ کو ترجیح حاصل ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگر عفَ$^{-۱}$ ۶، ۶ کے تکملہ کی سادہ ترین شکل کو (۳۹)
تعبیر کرے اور اس میں کوئی اختیاری مستقل نہ آئے تو

عفَ$^{-۱}$ (عف × ۱) = عفَ$^{-۱}$ × ۰ = ۰

لیکن عف (عفَ$^{-۱}$ × ۱) = عف × لا = ۱

اس لیے عف (عفَ$^{-۱}$ × ۱) ≠ عفَ$^{-۱}$ (عف × ۱)

اسی طرح عف$^{-۱}$ (عف$^{-م}$ × لا^{ن}) ≠ عف$^{-م}$ (عف$^{-۱}$ × لا^{ن}) اگر م > ن

پس جب عف کی منفی قوتیں زیر بحث ہوتی ہیں تو جبر و مقابلہ کے قانون ہمیشہ پورے نہیں ہوتے - اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مثال (۳) میں اختیار کردہ دو مختلف طریقوں سے کیوں مختلف نتیجے حاصل ہوتے ہیں -

حل طلب مثالیں -

حل کرو:

(۱) (عف + ۱) ما = لا^{۳}،   (۲) (عف^{۲} + ۲عف) ما = ۲۴ لا،

(۳) (عف^{۲} - ۶عف + ۹) ما = ۵۴ لا + ۱۸،

(۴) (عف^{۴} - ۶عف^{۳} + ۹ عف^{۲}) ما = ۵۴ لا + ۱۸،

(۵) (عف^{۲} - عف - ۲) ما = ۴۴ - ۷۶ لا - ۴۸ لا^{۲}،

(۶) (عف^{۳} - عف^{۲} - ۲ عف) ما = ۴۴ - ۷۶ لا - ۴۸ لا^{۲}،

۳۸ - خاص تکملے دوسری سادہ صورتوں میں -

اب ہم سادہ صورتوں میں خاص تکملوں کو محسوب کرنے کی چند ایسی نمونہ کی مثالیں درج کرتے ہیں جن پر گزشتہ دفعوں میں بحث نہیں ہوئی ہے -

مثال (۱) (عف^{۲} + ۴) ما = جب ۲ لا

یہاں ہم $\frac{۱}{\text{عف}^{۲} + ۴}$ جب ۲ لا کی قیمت کو عف^{۲} کی بجائے - ۲^{۲}ی لکھکر معلوم نہیں کر سکتے کیونکہ اِس اندراج سے نسب نما صفر کے مساوی ہو جاتا ہے -

لیکن فو$^{۲خ لا}$ کا خیالی حصہ خ جب ۲ لا ہے اور

$$\frac{1}{\text{عف}^2+4}\,\text{فو}^{2\text{خلا}} = \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{(\text{عف}+2\text{خ})^2+4}\times 1 \text{، حسب دفعہ ۳۵}$$

$$= \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{\text{عف}(\text{عف}+4\text{خ})}\times 1 \text{،}$$

$$= \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{4\text{خ}\times\text{عف}}\left(1+\frac{\text{عف}}{4\text{خ}}\right)^{-1}\times 1$$

$$= \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{4\text{خ}\,\text{عف}}\left\{1-\frac{\text{عف}}{4\text{خ}}+\frac{\text{عف}^2}{4^2\text{خ}^2}-\cdots\right\}\times 1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$= \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{4\text{خ}\,\text{عف}}\times 1 = \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{\text{لا}}{4\text{خ}}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\text{خ}\,\text{لا}\,(\text{جم}\,2\text{لا}+\text{خ}\,\text{جب}\,2\text{لا})$$

$$\left[\text{یا}\ \frac{1}{\text{عف}^2+4}\,\text{فو}^{2\text{خلا}} = \frac{1}{\text{عف}-2\text{خ}}\left(\frac{1}{\text{عف}+2\text{خ}}\,\text{فو}^{2\text{خلا}}\right)\right.$$

$$\left. = \frac{1}{\text{عف}-2\text{خ}}\left(\frac{1}{4\text{خ}}\,\text{فو}^{2\text{خلا}}\right) = \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{1}{\text{عف}}\times\frac{1}{4\text{خ}} = \text{فو}^{2\text{خلا}}\,\frac{\text{لا}}{4\text{خ}}\right]$$

(۴۰) اِس لیے خیالی حصہ الگ کرنے پر

$$\frac{1}{\text{عف}^2+4}\,\text{جب}\,2\text{لا} = -\frac{1}{4}\,\text{لا}\,\text{جم}\,2\text{لا}$$

متمم تفاعل جمع کرنے سے حل حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{جم}\,2\text{لا}+\text{ب}\,\text{جب}\,2\text{لا}-\frac{1}{4}\,\text{لا}\,\text{جم}\,2\text{لا}$$

مثال (۲)۔ $(\text{عف}^2-5\,\text{عف}+6)\,\text{ما} = \text{فو}^{2\text{لا}}\,\text{لا}^3$

$$\frac{1}{\text{عف}^2-5\,\text{عف}+6}\,\text{فو}^{2\text{لا}}\,\text{لا}^3 = \left(\frac{1}{\text{عف}-3}-\frac{1}{\text{عف}-2}\right)\text{فو}^{2\text{لا}}\,\text{لا}^3$$

$$= \text{قو}^{\text{۲لا}}\left(-\frac{۱}{\text{عف}} - \frac{۱}{۱-\text{عف}}\right)\text{لا}^{۳}$$

$$= \text{قو}^{\text{۲لا}}\left(-\frac{۱}{\text{عف}} - ۱ - \text{عف} - \text{عف}^{۲} - \text{عف}^{۳} - \text{عف}^{۴} - \dots\right)\text{لا}^{۳}$$

$$= \text{قو}^{\text{۲لا}}\left(-\frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} - ۶\,\text{لا} - ۶\right)$$

تتمم تفاعل جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{۳لا}} - \text{قو}^{\text{۲لا}}\left(\frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲} + ۶\,\text{لا} - \text{ب}\right)$$

جس میں رقم ب قو^۲لا میں - ۶ قو^۲لا شامل ہے۔

مثال (۳) $(\text{عف}^{۲} - ۶\,\text{عف} + ۱۳)\,\text{ما} = ۸\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا}$

$$\frac{۱}{\text{عف}^{۲} - ۶\,\text{عف} + ۱۳} \times ۸\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا} = ۸\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\,\frac{۱}{\{(\text{عف}+۳)^{۲} - ۶(\text{عف}+۳) + ۱۳\}}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا}$$

$$= ۸\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\,\frac{۱}{\text{عف}^{۲}+۴}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا}$$

$$= ۸\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\left(-\frac{۱}{۴}\,\text{لا}\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}\right)$$ ، دیکھو مثال (۱)

$$= -۲\,\text{لا}\,\text{قو}^{\text{۳لا}}\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}$$

تتمم تفاعل جمع کرنے پر

$$\text{ما} = \text{قو}^{\text{۳لا}}\left(\text{ا}\,\text{جم}\,۲\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا} - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}\right)$$

یہ طریقے تقریباً ایسے تمام خاص تکملوں کی قیمت معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں جن سے طالب علم کو واسطہ پڑ سکتا ہے۔ دیگر تمام صورتوں میں

اُس طریقہ پر غور کیا جا سکتا ہے جس کو اِس باب کے ختم پر مثالوں (۳۳) اور (۳۴) میں واضح کیا گیا ہے۔

حل طلب مثالیں۔

حل کرو :

(۱) (عف^{۲} + ۱) ما = ۴ جم لا ، (۲) (عف − ۱) ما = (لا + ۳) قو^{۲لا}

(۳) (عف^{۳} − ۳ عف − ۲) ما = ۵۴۰ لا^{۳} قو$^{-لا}$ ،

(۴) (عف^{۲} + ۲ عف + ۲) ما = ۲ قو$^{-لا}$ جب لا

(۵) (عف^{۲} + ۱)^{۲} ما = ۲۴ لا جم لا ،

(۶) (عف^{۵} − عف) ما = ۱۲ قو^{لا} + ۸ جب لا − ۲ لا

(۷) (عف^{۲} − ۶ عف + ۲۵) ما = ۲ قو^{۳لا} جم ۴ لا + ۸ قو^{۳لا} (۱ − ۲ لا) جب ۴ لا

۳۹ ۔ متجانس خطی مساوات ۔

یہ نام شکل

(ب. لا^{ن} عف^{ن} + ب$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ عف$^{ن-۱}$ + ... + ب$_{ن}$) ما = ف (لا)

کی مساوات کو دیا جاتا ہے ۔

اِس میں اگر ہم لا = قو^{ت} رکھیں تو وہ اُس نمونہ میں تحویل ہو جاتی ہے جس پر پہلے غور کیا جا چکا ہے ۔

(۴۱) مثال ۔ (لا^{۳} عف^{۳} + ۳ لا^{۲} عف^{۲} + لا عف) ما = ۲۴ لا^{۲}

رکھو لا = قو^{ت}

$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$ = قو^{ت} = لا

اِس لیے $\text{عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} = \frac{1}{\text{لا}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$

$$\text{عف}^{2} = \text{عف}\left(\frac{1}{\text{لا}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\right) = -\frac{1}{\text{لا}^{2}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{1}{\text{لا}} \text{عف} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$$

$$= \frac{1}{\text{لا}^{2}}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\right)$$

$$\text{عف}^{3} = \text{عف} \frac{1}{\text{لا}^{2}}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\text{لا}^{3}}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\right) + \frac{1}{\text{لا}^{2}} \text{عف}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\text{لا}^{3}}\left(-\frac{\text{فر}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}}\right) + \frac{1}{\text{لا}^{3}}\left(-\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{3}}{\text{فرت}^{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{لا}^{3}}\left(2 \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} - 3 \frac{\text{فر}^{2}}{\text{فرت}^{2}} + \frac{\text{فر}^{3}}{\text{فرت}^{3}}\right)$$

اِس طرح دی ہوئی تفرقی مساوات $\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرت}^{3}} = 24\, \text{قو}^{2\text{ت}}$ میں تحویل ہوتی ہے اور اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا} + \text{ب}\,\text{ت} + \text{ج}\,\text{ت}^{2} + 3\, \text{قو}^{2\text{ت}}$$

$$= \text{ا} + \text{ب}\,\text{لوک لا} + \text{ج}\,(\text{لوک لا})^{2} + 3\,\text{لا}^{2}$$

دوسرا طریقہ اِس باب کے ختم پر متفرق مثالوں ۲۸ تا ۳۰ میں بیان کیا گیا ہے۔

مساوات

$$\text{ب}_{0}(\text{ا} + \text{ب لا})^{\text{ن}} \text{عف}^{\text{ن}} \text{ما} + \text{ب}_{1}(\text{ا} + \text{ب لا})^{\text{ن}-1} \text{عف}^{\text{ن}-1} \text{ما} + \dots + \text{ب}_{\text{ن}} \text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$$

کو متجانس خطی شکل میں ی = ا + ب لا رکھ کر تحویل کیا جا سکتا ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\text{عف ما} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}\cdot\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} = \text{ب}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}$$

حل طلب مثالیں۔

(۱) $\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - 2\,\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2\,\text{ما} = 4\,\text{لا}^{3}$

(۲) $\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 9\,\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 25\,\text{ما} = 50$

(۳) $\text{لا}^{3}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}} + 3\,\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 8\,\text{ما} = 65\,\text{جم}\,(\text{لوک لا})$

(۴) $\text{لا}^{4}\,\frac{\text{فر}^{4}\text{ما}}{\text{فر لا}^{4}} + 2\,\text{لا}^{3}\,\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}} + \text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = \text{لوک لا}$

(۵) $(1+2\,\text{لا})^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - 6\,(1+2\,\text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 16\,\text{ما} = 8\,(1+2\,\text{لا})^{2}$

(۶) $(1+\text{لا})^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + (1+\text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = 4\,\text{جم لوک}\,(1+\text{لا})$

۴۰ ۔ مستقل سروں والی ہمزاد خطی مساواتیں ۔ (۴۲)

طریقہ کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔ یہاں دو تابع متغیر ما اور ی اور ایک غیر تابع متغیر لا ہے۔ عف حسب سابق $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے استعمال کیا جائیگا۔

$$(5\,\text{عف} + 4)\,\text{ما} - (2\,\text{عف} + 1)\,\text{ی} = \text{قو}^{-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (1)$$

(عف + ۸) ما - ۳ ی = ۵ قوَ^لا ، .... (۲)

پر غور کرو -

ی کو اُسی طرح ساقط کرو جس طرح جبرو مقابلہ کی ہمزاد خطی مساواتوں میں کیا جاتا ہے - اِس کے لیے مساوات (۱) کو ۳ سے ضرب دو اور مساوات (۲) پر (۲عف + ۱) سے عمل کرو -

نتیجوں کو تفریق کرنے پر

{۳(۵عف + ۴) - (۲عف + ۱) (عف + ۸)} ما = ۳ قوَ^لا - (۲عف + ۱) ۵ قوَ^لا

یعنی (- ۲عف^۲ - ۲ عف + ۴) ما = ۸ قوَ^لا

یا (عف^۲ + عف - ۲) ما = - ۴ قوَ^لا

اِس کو معمولی طریقہ پر حل کرنے سے

ما = ۲ قوَ^لا + ا قو^لا + ب قوَ^۲لا

اِس مخصوص مثال میں ی حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ یہ ہے کہ مساوات (۲) کو استعمال کیا جائے جس میں ی کا کوئی تفرقی سر شامل نہیں ہے - (۲) میں ما کی بجائے اندراج کرنے سے

۴ ا قوَ^لا + ۹ ا قو^لا + ۶ ب قوَ^۲لا - ۳ ی = ۵ قوَ^لا

∴ ی = ۳ قوَ^لا + ۳ ا قو^لا + ۲ ب قوَ^۲لا

لیکن اگر مساواتوں سے اس قدر آسان طریقہ پر ی معلوم نہ ہو سکے تو ہم ما کو ساقط کر سکتے ہیں چنانچہ اوپر کی صورت میں ما ساقط کرنے پر

{- (عف + ۸) (۲عف + ۱) + ۳ (۵عف + ۴)} ی

= (عف + ۸) قوَ^لا − (۵ عف + ۴) ۵ قوَ^لا

یعنی (−۲ عف^۲ − ۲ عف + ۴) ی = ۱۲ قوَ^لا

∴ ی = ۳ قوَ^لا + ع قوِ^لا + ف قوَ^۲لا

چار مستقل ا، ب، ع اور ف میں ربط معلوم کرنے کے لیے ابتدائی مساواتوں میں سے کسی ایک میں اندراج کرو، فرض کرو کہ مساوات (۲) میں اندراج کیا گیا ہے تو

(عف + ۸)(۲ قوَ^لا + ا قوِ^لا + ب قوَ^۲لا) − ۳(۳ قوَ^لا + ع قوِ^لا + ف قوَ^۲لا)

= ۵ قوَ^لا

∴ ع = ۳ ا اور ف = ۲ ب

∴ ی = ۳ قوَ^لا + ع قوِ^لا + ف قوَ^۲لا = ۳ قوَ^لا + ۳ ا قوِ^لا + ۲ ب قوَ^۲لا حسب سابق

حل طلب مثالیں

(۱) عف ما − ی = ۰

(عف − ۱) ما − (عف + ۱) ی = ۰

(۲) (عف − ۱۷) ما + (۲ عف − ۸) ی = ۰

(۱۳ عف − ۵۳) ما − ۲ ی = ۰

(۳) (۲ عف^۲ − عف + ۹) ما − (عف^۲ + عف + ۳) ی = ۰

(۲ عف^۲ + عف + ۷) ما − (عف^۲ − عف + ۵) ی = ۰

(۴۳) (۴) (عف + ۱) ما = ی + قوِ^لا

(عف + ۱) ی = ما + قوِ^لا

(۵) (عف^۲ + ۵) ما − ۴ ی = −۳۶ جم ۷ لا

ما + عف^۲ ی = ۹۹ جم ۷ لا

(۶) (۲عف + ۱) ما + (عف + ۳۲) ی = ۹۱ قو$^{-لا}$ + ۱۴۷ جب ۲ لا
+ ۱۳۵ جم ۲ لا

ما - (عف - ۸) ی = ۲۹ قو$^{-لا}$ + ۷۴ جب ۲ لا + ۲۳ جم ۲ لا

تیسرے باب پر متفرق مثالیں

حل کرو:

(۱) (عف - ۱)^{۳} ما = ۱۶ قو^{۳لا}

(۲) (۴ عف^{۲} + ۱۲ عف + ۹) ما = ۱۴۴ لا قو$^{-\frac{۳}{۲}لا}$

(۳) (عف^{۴} + ۶ عف^{۳} + ۱۱ عف^{۲} + ۶ عف) ما = ۲۰ قو$^{-۲لا}$ جب لا

(۴) (عف^{۳} - عف^{۲} + ۴ عف - ۴) ما = ۶۸ قو^{لا} جب ۲ لا

(۵) (عف^{۴} - ۶ عف^{۲} - ۸ عف - ۳) ما = ۲۵۶ (لا + ۱) قو^{۳لا}

(۶) (عف^{۴} - ۸ عف^{۲} - ۹) ما = ۵۰ جبز ۲ لا

(۷) (عف^{۴} - ۲ عف^{۲} + ۱) ما = ۴۰ جمز لا

(۸) (عف - ۲)^{۲} ما = ۸ (لا^{۲} + قو^{۲لا} + جب ۲ لا)

(۹) (عف - ۲)^{۲} ما = ۸ لا^{۲} قو^{۲لا} جب ۲ لا

(۱۰) (عف^{۲} + ۱) ما = ۳ جم^{۲} لا + ۲ جب^{۳} لا

(۱۱) (عف^{۴} + ۱۰ عف^{۲} + ۹) ما = ۹۶ جب ۲ لا جم لا

(۱۲) (عف - ا)^{ن} ما = ا^{لا}، ن مثبت صحیح عدد ہے

(۱۳) فر^{۲} ما / فر لا^{۲} + (۱ / لا) (فر ما / فر لا) = ۱۲ لوگ لا / لا^{۲}

(۱۴) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \frac{۲}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱۰$

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = \frac{۶\,\text{ما}}{\text{لا}^{۳}}$

(۱۶) $(\text{لا}+۱)^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + (\text{لا}+۱)\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (۲\text{لا}+۳)(۲\text{لا}+۴)$

(۱۷) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} - ۴\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۴\text{لا} = \text{ما}$ ،

$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} + ۴\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + ۴\text{ما} = ۲۵\text{لا} + ۱۶\,\text{و}^{\text{ت}}$

(۱۸) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۲\text{ما}$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۲\text{ی}$ ، $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = ۲\text{لا}$

(۱۹) $\text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ما} = ۰$ ، $\text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لا} = ۰$

(۲۰) $\text{ت}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ت}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲\text{ما} = ۰$ ،

$\text{ت}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} + \text{ت}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} - ۲\text{لا} = ۰$

(۲۱) ثابت کرو کہ $(\text{عف}^{۲\text{ن}+۱} - ۱)\,\text{ما} = ۰$ کا حل $۱\,\text{و}^{\text{لا}}$ اور شکل

$\text{و}^{\text{ج لا}}\,(\text{ب}_{\text{ر}}\,\text{جم س لا} + \text{ج}_{\text{ر}}\,\text{جب س لا})$

کی رقموں کے ن زوجوں پر مشتمل ہے جہاں

$\text{ج} = \text{جم}\,\frac{۲\pi\,\text{ر}}{۲\text{ن}+۱}$ اور $\text{س} = \text{جب}\,\frac{۲\pi\,\text{ر}}{۲\text{ن}+۱}$

اور ر علی الترتیب قیمتیں ۱، ۲، ۳، ... ن اختیار کرتا ہے۔

(۲۲) اگر (عف - ۱) ع = ۰ ،

(عف - ۱) و = ۰ ،

اور (عف - ۱) ما = ۰

تو ع ، و ، اور ما کو علی الترتیب معلوم کرو اور (عف - ۱)^{۳} ما = ۰ کو حل کرو۔

(۴۴) (۲۳) ثابت کرو کہ

(عف - ۱)(عف - ۱ - ہ)(عف - ۱ - ۲ہ) ما = ۰

کے حل کو ا و^{لا} + ب و^{لا} $\frac{(و^{ہلا} - ۱)}{ہ}$ + ج و^{لا} $\frac{(و^{۲ہلا} - ۲و^{ہلا} + ۱)}{ہ^{۲}}$

لکھا جا سکتا ہے۔

اس لیے (عف - ۱)^{۳} ما = ۰ کا حل اخذ کرو۔

[یہ طریقہ ڈلمبرٹ سے منسوب ہے۔ اعلیٰ ریاضی کے طالب علم کو فوراً یہ محسوس ہوگا کہ یہ حل بغیر مزید بحث کے قابلِ اطمینان نہیں ہے۔ یہ واضح ہے کہ دوسری تفرقی مساوات پہلی مساوات کی انتہا ہے لیکن یہ واضح نہیں ہے کہ دوسری مساوات کا حل پہلی مساوات کے حل کی انتہا بھی ہے۔]

(۲۴) اگر (عف - ۱)^{۳} و$^{م لا}$ کو ی سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

ی ، $\frac{جف\ ی}{جف\ م}$ ، اور $\frac{جف^{۲}\ ی}{جف\ م^{۲}}$ سب معدوم ہوتے ہیں جبکہ م = ۱ ۔

پس ثابت کرو کہ و^{لا} ، لا و^{لا} ، اور لا^{۲} و^{لا} سب (عف - ۱)^{۳} ما = ۰

کے حل ہیں۔

[دیکھو کہ عامل (عف - ۱)^{۳} اور $\frac{جف}{جف\ م}$ تبدیلی پذیر ہیں]

(۲۵) ثابت کرو کہ (عف^{۲} + ۱^{۲}) ما = جم (۱ + ہ) لا

$$\frac{\text{جم ا لا} - \text{جم} (\text{ا} + \text{ھ}) \text{لا}}{(\text{ا} + \text{ھ})^{۲} - \text{ا}^{۲}}$$ کا ایک حل

ہے۔

پس $(\text{عف}^{۲} + \text{ا}^{۲})\ \text{ما} = \text{جم ا لا}$ کا خاص تکملہ اخذ کرو۔

[اِس پر وہی اعتراض وارد ہوتا ہے جو مثال (۲۳) کی صورت میں ہوا تھا]

(۲۶) ثابت کرو کہ اگر و، لا کا ایک تفاعل ہو اور فا (عف) سے وہی معمولی مفہوم لیا جائے تو

$$(\text{۱})\quad \text{عف}^{\text{ن}} [\text{لا و}] = \text{لا عف}^{\text{ن}} \text{و} + \text{ن عف}^{\text{ن}-۱} \text{و}$$

$$(\text{۲})\quad \text{فا(عف)} [\text{لا و}] = \text{لا فا(عف) و} + \text{فاَ(عف) و}$$

$$(\text{۳})\quad \frac{۱}{\text{فا(عف)}} [\text{لا و}] = \left\{\text{لا} - \frac{۱}{\text{فا(عف)}} \times \text{فاَ(عف)}\right\} \frac{۱}{\text{فا(عف)}} \text{و}$$

$$(\text{۴})\quad \frac{۱}{\text{فا(عف)}} [\text{لا}^{\text{ن}} \text{و}] = \left\{\text{لا} - \frac{۱}{\text{فا(عف)}} \times \text{فاَ(عف)}\right\}^{\text{ن}} \frac{۱}{\text{فا(عف)}} \text{و}$$

اِن ضابطوں کو استعمال کرنے کی سفارش نہیں کیجاتی کیونکہ غلط نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں اگر اعمال کی ترتیب میں کافی احتیاط نہ کی جائے۔

$$(\text{۲۷})\quad (\text{۱})\quad (\text{عف} - ۱)\ \text{ما} = \text{لا و}^{۲\,\text{لا}}$$

اور $(\text{۲})\quad (\text{عف} + ۱)\ \text{ما} = \text{لا}^{۲}\ \text{جم لا}$

کے خاص تکملے پچھلی مثال کے نتیجوں (۳) اور (۴) کو استعمال کرکے حاصل کرو۔

(۲۸) ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\ \text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} = \text{طہ} (\text{طہ} - ۱)(\text{طہ} - ۲) \ldots (\text{طہ} - \text{ن} + ۱)\ \text{ما}$$

جہاں طہ کو $\text{لا} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

(۲۹) ثابت کرو کہ

(۱) فا(ط) لا^{م} = لا^{م} فا(م)

(۲) $\frac{1}{\text{فا(ط)}}$ لا^{م} = $\frac{\text{لا}^{\text{م}}}{\text{فا(م)}}$ ، بشرطیکہ فا(م) ≠ ۰

(۳) $\frac{1}{\text{فا(ط)}}$ [لا^{م} و] = لا^{م} $\frac{1}{\text{فا(ط + م)}}$ و

جہاں و، لا کا ایک تفاعل ہے۔

(۳۰) پچھلی مثال کے نتیجوں کو استعمال کر کے ثابت کرو کہ (۴۵)

لا^{۲} $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ − ۴ لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ۶ ما = لا^{۵}

کا حل $\frac{1}{6}$ لا^{۵} + ا لا^{ا} + ب لا^{ب}

ہے جہاں ا اور ب، م(م − ۱) − ۴م + ۶ = ۰ کی اصلیں ہیں یعنے ۲ اور ۳۔

(۳۱) اگر یہ دیا گیا ہو کہ (عف − ۱) ما = تو$^{۲ لا}$

تو ثابت کرو کہ (عف − ۱) (عف − ۲) ما = ۰

دوسری تفرقی مساوات کا عام حل (جس میں دو نامعلوم مستقل شریک ہوں) لکھ کر اور پہلی مساوات میں اندراج کر کے اِن مستقلوں میں سے ایک کی قیمت معلوم کرو اور اس طرح پہلی مساوات کا حل حاصل کرو۔

(۳۲) پچھلی مثال کے طریقہ سے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ + ب^{۲} ما = جب ا لا کو حل کرو۔

(۳۳) اگر ع$_{۱}$ سے تو$^{ا لا}$ ∫ ع تو$^{− ا لا}$ فرلا،

ع$_{۲}$ سے تو$^{ب لا}$ ∫ ع$_{۱}$ تو$^{− ب لا}$ فرلا،

تعبیر کئے جائیں تو ثابت کرو کہ فا (عف) ما = ء کے حل کو جہاں فا (عف) ان اجزائے ضربی (عف - ا) (عف - ب) .... کا حاصل ضرب ہے

ما = ءن

لکھا جا سکتا ہے۔

یہ درست ہے اگر فا (عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف نہ بھی ہوں۔

پس (عف - ا) (عف - ب) ما = قو^لا لوک لا کو حل کرو۔

(۳۴) $\frac{1}{\text{فا (عف)}}$ کو جزئی کسور میں رکھ کر ثابت کرو کہ فا (عف) ما = ء کے حل کو شکل

$$\sum \frac{1}{\text{فا}' (\text{ا})} \text{قو}^{\text{ا لا}} \int \text{ء قو}^{-\text{ا لا}} \text{فر لا}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے بشرطیکہ فا (عف) کے اجزائے ضربی سب کے سب مختلف ہوں۔

[اگر فا (عف) کے اجزائے ضربی مختلف نہ ہوں تو تکملوں کے عمل تکرار پائیں گے]

اس مثال اور گذشتہ مثال کے طریقوں سے کسی خطی مساوات کو جس کے سر مستقل ہوں نظری طور پر حل کیا جا سکتا ہے۔ لیکن جب تک کہ ء اُن سادہ تفاعلوں (قوت نماؤں، جیوب اور جیوب التمام، اور کثیر الارکان کے حاصل ضرب) میں سے ایک نہ ہو جن پر اس کتاب میں بحث کی گئی ہے اسوقت تک محولہ بالا حل میں ایک ایسے غیر محدود عمل تکمل سے واسطہ پڑیگا جس کی تکمیل نہیں ہو سکے گی۔

اگر ء = ف (لا) تو قو^لا $\int$ ء قو^-لا فر لا کو شکل

$$\int^{\text{لا}} \text{ف (ت) قو}^{(\text{لا} - \text{ت})} \text{فر ت}$$

یں لکھا جا سکتا ہے جہاں زیریں حد ک ایک اختیاری مستقل ہے۔

(۳۵) (آ) اِس کی تصدیق کرو کہ (۴۶)

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ب}^{2}\,\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا})$$

کا خاص تکملہ $\text{ما} = \frac{1}{\text{ب}} \int_{0}^{\text{لا}} \text{ف}\,(\text{ت})\ \text{جب ب}\,(\text{لا} - \text{ت})\ \text{فرت}$

ہے۔

[یاد رہے کہ اگر ا اور ب، لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فا}\,(\text{لا}،\text{ت})\ \text{فرت} = \text{فا}\,(\text{لا}،\text{ب})\,\frac{\text{فرب}}{\text{فرلا}} - \text{فا}\,(\text{لا}،\text{ا})\,\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}$$

$$+ \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{فرفا}\,(\text{لا}،\text{ت})}{\text{فرلا}}\ \text{فرت} \Big]$$

(ب) اِس خاص تکملہ کو پچھلی مثال کا نتیجہ استعمال کرکے حاصل کرو۔

(ج) پس حل کرو $(\text{عف}^{2} + 1)\ \text{ما} = \text{قم لا}$

(د) ثابت کرو کہ اِس طریقہ سے

$$(\text{عف}^{2} + 1)\ \text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا})$$

کا حل بھی حاصل ہوگا (ایسی شکل میں جس میں عمل تکمیل کی علامتیں داخل نہیں ہونگی) اگر ف (لا)، تفاعلوں مس لا، مم لا، قطلا میں سے کوئی ایک ہو۔

(۳۶)۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرت}^{2}} + \text{ب}^{2}\,\text{ما} = \text{ک جم ب ت}$ کا خاص تکملہ ایک اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے جس کا حیطہ لا انتہا بڑھتا جاتا ہے۔

[یہ گمگمک کا مظہر ہے جس کا ذکر پہلے آچکا ہے [دیکھو مثال ۵، دفعہ ۳۶]۔ بلاشبہ اِس نمونہ کی طبیعی مساواتیں صرف تقریبی ہوتی ہیں، اِس لیے یہ نہیں مان لینا چاہیئے کہ اہتزاز فی الواقع لامتناہی ہوجاتا ہے۔ تاہم وہ اِسقدر بڑا ہوسکتا ہے کہ خطرہ سے خالی نہ ہو۔ یہی وجہ ہے کہ

فوج جب پُل پر سے گذرتی ہے تو اُس کو بے قاعدہ ہو کر قدم رکھنے کی ہدایت کیجاتی ہے تاکہ ان کے قدم پُل کی ساخت کے فطری اہتزاز کے ساتھ سُر میں نہ ہونے پائیں]

(۳۷) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + 2\,\text{ھ}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + (\text{ھ}^2 + \text{ب}^2)\,\text{ما} = \text{ک}\,\text{قو}^{-\text{ھ}\text{ت}}\,\text{جم}\,\text{ب}\,\text{ت}$$

کا خاص تکملہ متغیر حیطہ $\frac{\text{ک}}{2\,\text{ب}}\,\text{ت}\,\text{قو}^{-\text{ھ}\text{ت}}$ کے اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔

اِس حیطہ کی اعظم قیمت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ بہت بڑا ہوتا ہے اگر ھ بہت چھوٹا ہو۔ لامتناہی وقت کے بعد اِس حیطہ کی کیا قیمت ہوگی؟

[یہ ایک نظام کے قسری ارتعاش کو تعبیر کرتا ہے جبکہ نظام قاسر فاعلیت کے ساتھ تھمک میں ہو اور دونوں میں تقصیر رگڑ کی وجہ سے ہو۔ نتیجہ سے یہ ظاہر ہے کہ اگر رگڑ خفیف ہے تو قسری ارتعاش جلد بڑے ہو جاتے ہیں اگرچہ پچھلی مثال کی طرح لامتناہی نہیں ہو جاتے۔ بعض صورتوں میں اِس سے استفادہ کیا جاتا ہے۔ اگر بے تار تیلیغراف کے موصولی آلے ہرٹیزی امواج کے ساتھ تھمک میں نہ ہوں تو اثرات اِسقدر ضعیف ہوں گے کہ اُن کو شناخت کرنا مشکل ہوگا۔]

(۳۸) حل کرو $\frac{\text{فر}^4\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^4} - \text{ن}^4\,\text{ما} = 0$ (۴۷)

[اس سے ایک پتلے انتصابی دُہرے کے، جو تیز گردِش میں ہو کسی حصہ کا جانبی ہٹاؤ معلوم ہوتا ہے، لا زیر بحث حصہ کا انتصابی ارتفاع ہے]

(۳۹) اگر پچھلی مثال میں

$$\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} = \text{ما} = 0 \quad \text{جبکہ}\quad \text{لا} = 0 \quad \text{اور} \quad \text{لا} = \text{ل}$$

تو ثابت کرو کہ

ما = ع (جم ن لا - جمزن لا) + ف (جب ن لا - جبزن لا)

اور جم ن ل جمزن ل = ا

[اِس کا یہ مطلب ہے کہ دُہرا دو نقطوں پر سہارا گیا ہے جن میں سے ایک، دوسرے کے اوپر ل ارتفاع پر ہے اور دُہرا اِن نقطوں پر انتصابی رہنے پر مجبور ہے۔ آخری مساوات سے ن معلوم ہوگا جبکہ ل معلوم ہو]

(۴۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3} + ۳ \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + ۴ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$$

کا متمم تفاعل ناقابل قدر ہو جاتا ہے جبکہ لا کافی طور پر بڑا ہو، لیکن

$$\frac{\text{فر}^3\,\text{ما}}{\text{فر لا}^3} - \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + ۲\,\text{ما} = ۴۰$$

کا متمم تفاعل لا انتہا بڑھتے ہوئے حیطہ کے ساتھ اہتزاز کرتا ہے۔

[اِس نمونہ کی مساوات بھاپ ٹربان کے حاکم کی زاویائی رفتار کے لیے تقریباً درست ہوتی ہے۔ پہلی مساوات گردش کی ایک قائم حرکت کے متناظر ہے اور دوسری، جو بیندگی یا غیر قائم حرکت سے۔ دیکھو Perry's "Steam Engine" کا ضمیمہ]

(۴۱) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

$$\text{م} \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر ت}^2} = \text{و ز} - \text{ھ ز} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$$

$$\text{م} \frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر ت}^2} = \text{ھ ز} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}$$

کا عام حل جہاں م، و، ھ اور ز مستقل ہیں،

لا = ا + ب جم (سہ ت - عہ)،

$$ما = \frac{و}{ھ} ت + ج + ب \text{ جب } (سہ ت - عہ)$$

ہے جہاں $سہ = \frac{ھ ز}{م}$ اور ا، ب، ج، عہ اختیاری مستقل ہیں۔

اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{فرما}{فرت} = لا = ما = ۰$ جبکہ $ت = ۰$، تو ثابت کرو کہ یہ حل

$$لا = \frac{و}{سہ ھ} (۱ - جم\, سہ ت)،$$

$$ما = \frac{و}{سہ ھ} (سہ ت - جب\, سہ ت)$$ (خط تدویر کی مساواتیں)

میں تحویل ہوتا ہے۔

(۴۸ [اِن مساواتوں سے کمیت م اور بار ز کے ایک ایسے جُسیمہ کا راستہ معلوم ہوتا ہے جو ایک بالا بنفشئی نور سے منور جست کی منفی طور پر بار شدہ چادر سے سطح کے متوازی مقناطیسی میدان ھ کے تحت دفع ہوتا ہو۔ و، بار کی ہوئی سطح کی وجہ سے برقی حدت ہے۔ تجربہ سے لا کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کر کے سر جے۔ جے تھامسن نے $\frac{۲ و}{سہ ھ}$ کی قیمت معلوم کی اور اس سے نسبت $\frac{م}{ز}$ محسوب کی جا سکتی ہے جبکہ و اور ھ معلوم ہوں۔ دیکھو (Phil. Mag.) جلد ۴۸ صفحہ ۵۴۷، سنہ ۱۸۹۹]

(۲۴) اگر ہمزاد مساواتیں

$$ل_۱ \frac{فر^۲ ع_۱}{فرت^۲} + م \frac{فر^۲ ع_۲}{فرت^۲} + \frac{ع_۱}{ج_۱} = ںاب\ جم\ ب ت ،$$

$$ل_۲ \frac{فر^۲ ع_۲}{فرت^۲} + م \frac{فر^۲ ع_۱}{فرت^۲} + \frac{ع_۲}{ج_۲} = ۰$$

دی گئی ہوں جہاں ل$_1$، ل$_2$، م، ج$_1$، ج$_2$، ن اور ب مستقل ہیں
تو ثابت کرو کہ ع$_1$ کی شکل

ا$_1$ جم ب ت + ا$_1$ جم (م ت - عہ) + ب$_1$ جم (ن ت - بہ)

اور ع$_2$ کی شکل

ا$_2$ جم ب ت + ا$_2$ جم (م ت - عہ) + ب$_2$ جم (ن ت - بہ)

ہے جہاں

ا$_1$ = $\frac{\text{ع}}{\text{ک}}$ ب ج$_1$ (۱ - ب^2 ج$_2$ ل$_2$)

ا$_2$ = $\frac{\text{ع م}}{\text{ک}}$ ب^3 ج$_1$ ج$_2$

ک جملہ (ل$_1$ ل$_2$ - م^2) ج$_1$ ج$_2$ ب^4 - (ل$_1$ ج$_1$ + ل$_2$ ج$_2$) ب^2 + ۱ کو
تعبیر کرتا ہے، م اور ن خاص محدود مستقل ہیں، ا$_1$، ب$_1$، عہ اور بہ اختیاری مستقل ہیں، ا$_2$ کو ا$_1$ کی رقوم میں اور ب$_2$ کو ب$_1$ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ م اور ن حقیقی ہیں اگر ل$_1$، ل$_2$، م، ج$_1$ اور ج$_2$ حقیقی اور مثبت ہوں، اور ل$_1$ ل$_2$ > م^2

[ان مساواتوں سے ایک مبدل میں ابتدائی اور ثانوی رَوئیں ع$_1$ اور ع$_2$ معلوم ہوتی ہیں جبکہ دَوروں میں گنجائش ج$_1$ اور ج$_2$ کے کثیفے ہوں۔ ل$_1$ اور ل$_2$ ذاتی امالہ کی قدریں ہیں اور م باہمی امالہ کی قدر ہے۔ مزاحمتوں کو (جو بالعموم بہت خفیف ہوتی ہیں) نظرانداز کیا گیا ہے۔

تر جب ب ت ابتدائی رَو کی عاملہ قوت محرکہ برق ہے]

ہمزاد مساواتوں کے لیے متبادل طریقے - مثال ۲

صفحہ (۷۹) میں ما معلوم کر لینے کے بعد ہم ی کو بغیر عمل تکمل کے اس طرح معلوم کر سکتے ہیں کہ دی ہوئی مساواتوں پر علی الترتیب عف اور (عف + ۲) سے عمل کریں اور تفریق کریں - اگر عف میں کوئی دو کثیر رقمی ف (عف) اور فا (عف) دئے گئے ہوں اور ان میں کوئی مشترک جزو ضربی جس میں عف ہو موجود نہ ہو تو ہم دوسرے ایسے کثیر رقمی فہ (عف) اور سا (عف) معلوم کر سکتے ہیں کہ

فہ (عف) ف (عف) - سا (عف) فا (عف) = ۱

(دیکھو اسمتھ کا جبر و مقابلہ دفعہ ۱۰۰)

سادہ صورتوں میں ہم فہ (عف) اور سا (عف) کو صرف معائنہ سے ہی معلوم کر سکتے ہیں

ہم مثال ۳ کی دی ہوئی مساواتوں کی بجائے اِن کا مجموعہ اور فرق رکھ سکتے ہیں - اِسی طرح مثال ۴ میں عمل کر کے ہم ما + ی اور ما - ی کو نئے متغیروں کے طور پر لے سکتے ہیں -

چوتھا باب

سادہ تفرقی مساواتیں

۴۱ ۔ اِس باب میں حسب ذیل امور پر غور کیا جائے گا: جزئی تفرقی مساواتیں کِس طرح پیدا ہوتی ہیں، سادہ خاص حل کِس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں، اور اِن خاص حلوں کے لامتناہی سلسلوں کے ذریعہ زیادہ دقیق اور مشکل حل کِس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ نیز فوریر کے سلسلہ کا استعمال سمجھایا جائیگا جس سے ایسے دقیق اور مشکل حل دی ہوئی شرطوں کو پورا کر سکیں گے۔

اِس باب میں جن مساواتوں پر غور کیا گیا ہے اُن میں وہ مساواتیں شامل ہیں جو حرارت کے ایصال، ڈوریوں کے ارتعاش، برقی سکونیات، تجاذب، ٹیلیفون، برقی مقناطیسی موجوں، اور محللوں کے نفوذ کے مسئلوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ زیادہ تر یولر، ڈلمبرٹ، اور لگرانج[1] کے طریقے استعمال کئے گئے ہیں۔

---

[1] جوزف لوئی لگرانج (باشندہ ٹیورن ۱۷۳۶ء تا ۱۸۱۳ء) اٹھارویں صدی میں سب سے بڑا ریاضی داں گذرا ہے۔ اُس نے ریاضی کی ہر شاخ میں بڑے بڑے اضافے کئے۔ تغیرات کے علم الاحصا کی بنیاد اُس نے ڈالی اور جزئی تفرقی مساواتوں کے مضمون میں بڑی توسیع کی۔ [illegible] کو بڑی ترقی دی۔

۴۲ ۔ اختیاری تفاعلوں کا اسقاط ۔

پہلے باب میں ہم یہ بتلا چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کے اسقاط سے معمولی تفرقی مساواتیں کس طرح بنائی جاتی ہیں۔ جزئی تفرقی مساواتوں کو اختیاری تفاعلوں کے اسقاط سے اکثر بنایا جا سکتا ہے۔

مثال (۱) ما = ف (لا - ا ت) + فا (لا + ا ت) ....(۱)

سے اختیاری تفاعلوں ف اور فا کو ساقط کرو۔

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \text{فَ (لا - ا ت) + فاَ (لا + ا ت)}$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف لا}^2} = \text{فً (لا - ا ت) + فاً (لا + ا ت)} \quad ...(۲)$$

اسی طرح $$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = \text{- ا فَ (لا - ا ت) + ا فاَ (لا + ا ت)}$$

اور $$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف ت}^2} = \text{ا}^2\text{ فً (لا - ا ت) + ا}^2\text{ فاً (لا + ا ت)}$$

(۲) اور (۳) سے (۵۰)

$$\frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} \frac{\text{جف}^2\text{ ما}}{\text{جف ت}^2} \quad ....(۴)$$

یہ دوسرے رتبہ کی جزئی تفرقی مساوات ہے[1]

مثال (۲) $$\text{ی = ف} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

---

[1] یہ مساوات ایک تنی ہوئی ڈوری کے عرضی ارتعاشوں کے لئے صادق آتی ہے۔ اِس کا عام ترین حل مساوات (۱) ہے جو دو موجوں کو تعبیر کرتی ہے جو رفتار ا سے حرکت کر رہی ہیں جن میں سے ایک دائیں جانب اور دوسری بائیں جانب۔

سے اختیاری تفاعل ف کو ساقط کرو۔

جف ی / جف لا = − (ما / لا^۲) فَ (ما / لا)

اور جف ی / جف ما = − (۱ / لا) فَ (ما / لا)

اِس لیے لا (جف ی / جف لا) + ما (جف ی / جف ما) = ۰

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو:

(۱) ی = ف (لا + ا ما)

(۲) ی = ف (لا + خ ما) + فا (لا − خ ما)، جہاں خ^۲ = −۱

(۳) ی = ف (لا جم عہ + ما جب عہ − ا ت) + فا (لا جم عہ + ما جب عہ + ا ت)

(۴) ی = ف (لا^۲ − ما^۲)،

(۵) ی = و^(ا لا + ب ما) ف (ا لا − ب ما)

(۶) ی = لا^ن ف (ما / لا)

۴۳ — اختیاری مستقلوں کا اسقاط۔

ہم پہلے باب میں دیکھ چکے ہیں کہ اختیاری مستقلوں کو معمولی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ کس طرح ساقط کیا جا سکتا ہے۔ یہ جزئی تفرقی مساواتوں کے ذریعہ بھی کیا جا سکتا ہے۔

مثال (۱) ی = ا و^(ب ت) جب ب لا

سے ا اور ب کو ساقط کرو۔

$$\therefore \quad \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = -\text{ب}^2\ \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ب ت}}\ \text{جب ب لا}$$

اور
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ت}^2} = \text{ب}^2\ \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ب ت}}\ \text{جب ب لا}$$

اِس لیے
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ت}^2} = ۰$$

مثال (۲) $\text{ی} = \text{ا}(\text{لا} + \text{ما}) + \text{ب}(\text{لا} - \text{ما}) + \text{ا ب ت} + \text{ج}$

سے ا، ب، اور ج کو ساقط کرو ۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{ا} + \text{ب}\ ،$$

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ا} - \text{ب}\ ،$$

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}} = \text{ا ب}$$

لیکن $(\text{ا} + \text{ب})^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2 = ۴\,\text{ا ب}$ (۵۱)

اِس لیے
$$\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)^2 - \left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right)^2 = ۴\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$$

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کرو:

(۱) $\text{ی} = \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ب}^2\,\text{ت}}\ \text{جم ب لا}$

(۲) $\text{ی} = \text{ا}\ \text{قو}^{\text{ب ت}}\ \text{جم ق لا جب ر ما}$، جہاں $\text{ب}^2 = \text{ق}^2 + \text{ر}^2$

(۳) ی = ل لا + (۱ - ل) ما + ب

(۴) ی = ل لا + ب ما + ل^{۲} + ب^{۲}

(۵) ی = (لا - ل)^{۲} + (ما - ب)^{۲}

(۶) ل ی + ب = ل^{۲} لا + ما

۴۴ — جزئی تفرقی مساواتوں میں خاص مشکلیں۔

ہم پہلے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ ن ویں رتبہ کی ہر معمولی تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ ایک ایسے حل سے ماخوذ ہوتی ہے جس میں ن اختیاری مستقل ہوتے ہیں[۱]۔ اِس سے شائد یہ فرض کر لیا جائے کہ ن ویں رتبہ کی ہر جزئی تفرقی مساوات بھی اُسی طرح ایک حل سے جس میں ن اختیاری تفاعل شامل ہوں اخذ پذیر ہے۔ لیکن یہ صحیح نہیں ہے۔ عام طور پر یہ ناممکن ہے کہ ن اختیاری تفاعلوں کے حاصل اسقاط کو ن ویں رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے طور پر بیان کیا جائے۔ اِس سے اعلیٰ تر رتبہ کی مساوات مطلوب ہوتی ہے اور نتیجہ یگانہ نہیں ہوتا[۲]۔ اِس باب میں صرف خاص حلوں کو معلوم کرنے پر اکتفا کیا جائیگا۔

[۱] آئندہ (چھٹا باب) یہ تبلایا جائیگا کہ بعض مستثنےٰ صورتوں میں معمولی تفرقی مساوات کے نادر حل ہوتے ہیں جو اُس حل کے علاوہ ہوتے ہیں جس میں اختیاری مستقل ہوا کرتے ہیں۔ یہ نادر حل معمولی حل سے اِن مستقلوں کو مخصوص قیمتیں دیکر اخذ نہیں کئے جا سکتے اور وہ بالکل مختلف شکل کے ہوتے ہیں۔

[۲] دیکھو ایڈورڈ کی کتاب Differential Calculus دفعات ۵۱۲ اور ۵۱۳ یا ولیمسن کی کتاب Differential Calculus دفعہ ۳۱۷۔

اِن کے ذریعہ ہم اُن مسئلوں کو حل کر سکیں گے جو طبیعاتی تحوالیل میں بالعموم وقوع پذیر ہوتے ہیں[۴۳]۔ ہمیں اِس امر کا اعتراف ہے کہ ہم عام ترین حل معلوم کرنے کے ناقابل ہیں لیکن ہماری اِس ناقابلیت کا بدال کچھ اِس خیال سے ہو جاتا ہے کہ اُن صورتوں میں جنہیں عام ترین حل معلوم کیے جا چکے ہیں یہ انتہائی مشکل ہے کہ اُن کو کسی مخصوص مسئلہ پر استعمال کیا جائے[۴۴]۔

۴۵ ـ سادہ خاص حل ۔ (۵۲)

مثال (۱): مساوات
$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ی}}{\text{جف لا}^{2}} = \frac{1}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}$$

---

[۴۳] عالم طبیعات ممکن ہے یہ سمجھ لے کہ ہر ایسے مسئلہ کا ایک حل ہوتا ہے اور مزید برین ایسا حل یگانہ ہوتا ہے لیکن نظری ریاضیات میں اِن میں سے پہلے واقعہ کا ثابت کرنا بہت مشکل ہے، اِس کا ثبوت حال ہی میں تکملی مساواتوں کے نظریہ کی مدد سے دیا گیا ہے [دیکھو ہیوڈ اور فریشا کی کتاب

(L' Equation de Fredholm et ses applications à la Physique Mathematique)

[۴۴] مثلاً وہٹیکر نے یہ ثابت کیا ہے کہ لاپلاس کی مساوات
$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف ما}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف ی}^{2}} = 0$$

کا حل
$$\text{و} = \int_{0}^{2\pi} \text{ف}\,(\text{لا جم ت} + \text{ما جب ت} + \text{خریٔ ت})\,\text{فرت}$$
ہے۔

لیکن اگر ہم ایسا حل معلوم کرنا چاہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر بعض خاص شرطوں کو پورا کرے تو ہم بالعموم وہ حل استعمال کرتے ہیں جو ایک لامتناہی سلسلہ کی شکل میں ہوتا ہے۔

پر غور کرو (اس سے حرارت کا ایصال ایک بعد میں معلوم ہوتا ہے)۔
یہ مساوات خطی ہے۔ اب معمولی خطی مساواتوں کی بحث میں ہم نے قوت نماؤں کو بہت مفید پایا ہے۔ چنانچہ مساوات بالا کا آزمائشی حل $\text{ی} = \text{و}^{\text{م لا + ن ت}}$ ہے۔ تفرقی مساوات میں درج کرنے پر

$$\text{م}^2\,\text{و}^{\text{م لا + ن ت}} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\text{ن}\,\text{و}^{\text{م لا + ن ت}}$$

حاصل ہوتا ہے جو درست ہے اگر $\text{ن} = \text{م}^2\,\text{ا}^2$

پس $\text{و}^{\text{م لا} + \text{م}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$ ایک حل ہے۔

م کی علامت بدلنے پر $\text{و}^{-\text{م لا} + \text{م}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$ بھی ایک حل ہے۔

مثال (۲): اوپر کی مساوات کا وہ حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ $\text{ت} = +\infty$۔

پچھلے حل میں ت، $\text{و}^{\text{م}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$ میں واقع ہے۔ یہ ت کے ساتھ بڑھتا ہے کیونکہ $\text{م}^2\,\text{ا}^2$ مثبت ہے اگر م اور ا حقیقی ہوں۔ $\text{و}^{\text{م}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$ کو گھٹانے کے لئے $\text{م} = \text{خ پ}$ رکھو تو $\text{م}^2\,\text{ا}^2 = -\text{پ}^2\,\text{ا}^2$۔ چنانچہ اس سے حل $\text{و}^{\text{خ پ لا} - \text{پ}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $\text{و}^{-\text{خ پ لا} - \text{پ}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}$

بھی ایک حل ہے۔

پس چونکہ تفرقی مساوات خطی ہے اسلئے $\text{و}^{-\text{پ}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}\left(\text{ا}\,\text{و}^{\text{خ پ لا}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{خ پ لا}}\right)$

ایک حل ہے جس کی بجائے ہم حسب معمول

$$\text{و}^{-\text{پ}^2 \text{ا}^2 \text{ت}}\left(\text{ع جم پ لا} + \text{ف جب پ لا}\right)$$

رکھتے ہیں۔

مثال (۳): $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2} = ۰$ کا وہ حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ ما = + ∞ اور نیز جبکہ لا = ۰ ۔

ی = $\text{قو}^{\text{م لا + ن ما}}$ رکھنے سے $(\text{م}^2 + \text{ن}^2)\,\text{قو}^{\text{م لا + ن ما}} = ۰$ حاصل ہوتا ہے، اِس لیے $\text{م}^2 + \text{ن}^2 = ۰$ ۔

وہ شرط جبکہ ما = + ∞ اِس امر کی متقاضی ہے کہ ن حقیقی اور منفی ہو، فرض کرو ن = - پ، تب

م = ± خ پ

اِس لیے $\text{قو}^{-\text{پ ما}}\,(\text{ا}\,\text{قو}^{\text{خ پ لا}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\text{خ پ لا}})$ ایک حل ہے

یعنے $\text{قو}^{-\text{پ ما}}$ (ع جم پ لا + ف جب پ لا) ایک حل ہے

لیکن ی = ۰ اگر لا = ۰، اس لیے ع = ۰

اس لیے مطلوبہ حل ف $\text{قو}^{-\text{پ ما}}$ جب پ لا ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) $\frac{\text{جف}^2 \text{ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}^2 \text{ما}}{\text{جف ت}^2}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۰ جبکہ لا = + ∞ اور نیز جبکہ ت = + ∞ ۔

(۲) $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ما}^2}\,\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ ما اگر یہ دیا گیا ہو کہ ی (لا یا ما کی کسی حقیقی قیمتوں کے لیے) کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ ی = ۰ جبکہ لا = ۰ یا ما = ۰ ۔

(۳) $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{لا}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \cdot$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ی کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \cdot$ جبکہ $\text{لا} = \text{ما} = \cdot$

(۴) $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ی}^2} = \cdot$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{و} = \cdot$ جبکہ $\text{لا} = +\infty$ ، جبکہ $\text{ما} = -\infty$ ، اور نیز جبکہ $\text{ی} = \cdot$

(۵) $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما جف ی}}$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ و کبھی بھی لامتناہی نہیں ہوتا اور یہ کہ $\text{و} = \text{ج}$ اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} = \cdot$ جبکہ $\text{لا} = \text{ما} = \text{ی} = \cdot$

(۶) $\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{و} = \cdot$ جبکہ $\text{ت} = +\infty$ ، جبکہ $\text{لا} = \cdot$ ، یا ل ، اور جبکہ $\text{ما} = \cdot$ یا ل

۴۶ - زیادہ پیچیدہ ابتدائی اور حدودی شرطیں۔[۱]

دفعہ ۴۵ کی مثال (۳) میں

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \cdot$$

کا ایک حل $\text{ف}\ \text{قو}^{\text{پ ما}}\ \text{جب پ لا}$ حاصل ہوا ہے جو اِن شرطوں کو پورا کرتا ہے کہ

[۱] چونکہ ت سے بالعموم وقت تعبیر ہوتا ہے اور لا اور ما سے قائم محدد اِس لیے وہ شرط کہ $\text{ی} = \cdot$ جبکہ $\text{ت} = \cdot$ ابتدائی شرط کہلاتی ہے اور وہ شرط کہ $\text{ی} = \cdot$ اگر $\text{لا} = \cdot$ یا $\text{ما} = \text{لا}$ حدودی شرط کہلاتی ہے۔

ی = ۰ اگر ما = + ∞ یا اگر لا = ۰.

اب فرض کرو کہ ہم دو زائد شرطیں عائد کرتے ہیں[1] مثلاً ی = ۰ اگر لا = ل، اور ی = ل لا − لا^{2} اگر ما = ۰، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو صفر اور ل کے درمیان ہیں۔

پہلی شرط سے حاصل ہوتا ہے جب پ ل = ۰.

یعنے پ ل = ن π جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

سہولت کے مدنظر ہم اول ل = π لیں گے جس سے پ = ن حاصل ہوتا ہے یعنی ایک صحیح عدد۔

دوسری شرط سے ف جب پ لا = π لا − لا^{2}، لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو صفر اور π کے درمیان ہیں۔ یہ ناممکن ہے۔

تاہم اُس حل کی بجائے جس میں صرف ایک رقم ہے ہم حسب ذیل حل لے سکتے ہیں:

ف$_{1}$ قو$^{-ما}$ جب لا + ف$_{2}$ قو$^{-۲ما}$ جب ۲لا + ف$_{3}$ قو$^{-۳ما}$ جب ۳لا + ...

کیونکہ مساوات خطی ہے (اگر یہ واضح نہ ہو تو دیکھو تیسرا باب دفعہ ۲۵)، پ کو قیمتیں ۱، ۲، ۳، ..... دی گئی ہیں اور نتیجوں کو جمع کیا گیا ہے۔

ما = ۰ رکھنے اور کل جملہ کو π لا − لا^{2} کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

ف$_{1}$ جب لا + ف$_{2}$ جب ۲ لا + ف$_{3}$ جب ۳ لا + ...

= π لا − لا^{2}، صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے۔

---

[1] یہ مسئلہ دھات کی ایک نیم لامتناہی مستطیلی پٹی میں حرارت کی ایکساں تقسیم کا ہے جبکہ لامتناہی اضلاع صفر درجہ حرارت پر اور قاعدہ (ل لا − لا^{2}) حرارت پر رکھے گئے ہوں جہاں ل مستطیلی پٹی کا عرض ہے۔

ممکن ہے طالب علم یہ خیال کرے کہ یہ مساوات اتنی ہی ناممکن ہے جتنی دوسری لیکن یہ ایک اہم واقعہ ہے کہ ہم ف کی ایسی قیمتیں منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ درست ہو جائے۔

یہ ایک زیادہ عام مسئلہ کی جس کو اب ہم بیان کریں گے ایک مخصوص صورت ہے۔

۴۷ ۔ فوریر کے نیم سعت سلسلے ۔ لا کا ہر وہ تفاعل جو (۵

بعض خاص شرطوں کو پورا کرے شکل

ف (لا) = ا$_1$ جب لا + ا$_2$ جب ۲ لا + ا$_3$ جب ۳ لا + ... لاتناہی تک

کے ایک مستدق سلسلہ میں، صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے (لیکن ضرور نہیں کہ انتہائی قیمتوں لا = ۰ اور لا = π کے لیے بھی) پھیلایا جا سکتا ہے۔

اس کو فوریر[1] کا نیم سعت جیبی سلسلہ کہتے ہیں۔

اوپر جن شرطوں کا اشارہ کیا گیا ہے وہ ہر طبیعی سوال میں عملاً پوری ہوتی ہیں[2]۔

اسی طرح اُن ہی شرطوں کے تحت ف (لا) کو نیم سعت جیب التمامی سلسلہ

ب$_0$ + ب$_1$ جم لا + ب$_2$ جم ۲ لا + ب$_3$ جم ۳ لا + ... لاتناہی تک

میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

---

[1] جوزف فوریر (۱۷۶۸ء تا ۱۸۳۰ء) "La Theorie analytique de la chaleur" کے مصنف کی حیثیت میں بہت معروف ہے۔ اُس کا متذکرہ صدر سلسلہ حرارت کے ایصال کے مسئلوں کو حل کرنے میں پیدا ہوا۔

[2] یہ کافی ہے کہ ف (لا)، واحد قیمتی، محدود، اور مسلسل ہو اور لا = ۰ اور لا = π کے درمیان اس کی اعظم اور اقل قیمتوں کی تعداد محدود ہو۔ لیکن یہ شرطیں ضروری نہیں ہیں۔ ضروری اور کافی شرطوں کا جٹ ابتک منکشف نہیں ہوا۔

اِن سلسلوں کو اُن سلسلوں کے مقابلہ میں جو صفر اور ۲ π کے درمیان صادق آتے ہیں اور جن میں جیب اور جیب التمام دونوں رقمیں شامل ہوتی ہیں نیم سعت سلسلے کہتے ہیں۔

اِن مسئلوں کے ثبوت بہت طویل اور مشکل ہیں[1]۔ لیکن یہ تسلیم کر لینے کے بعد کہ یہ پھیلاؤ ممکن ہیں سرِں کی قیمتیں معلوم کرنا آسان ہے[2]۔
جیبی سلسلہ کو جب ن لا سے ضرب دو اور رقم بہ رقم تکمل کرو تو حاصل ہوگا۔

$$\int_0^\pi \text{ف (لا) جب ن لا فرلا}$$

$$= \text{ا}_1 \int_0^\pi \text{جب لا جب ن لا فرلا} + \text{ا}_2 \int_0^\pi \text{جب ۲ لا جب ن لا فرلا} + \dots$$

وہ رقم جس میں اں جزو ضربی ہے

$$\text{اں} \int_0^\pi \text{جب}^2 \text{ن لا فرلا}$$

$$= \frac{\text{اں}}{2} \int_0^\pi (1 - \text{جم ۲ ن لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{اں}}{2} \left[\text{لا} - \frac{1}{\text{۲ن}} \text{جب ۲ ن لا}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{اں}\ \pi$$

ہے۔

وہ رقم جس میں کوئی دوسرا سر مثلاً اِ شامل ہے (55)

---

[1] فوریر کے سلسلوں پر پوری بحث حسب ذیل کتابوں میں ملے گی
(1) Carslaw's Fourier's series and Integrals (2) Hobson's "Theory of Functions".

[2] یہ فرض کر لینا کہ ایسا کرنا جائز ہے بحث طلب ہے۔

$$\text{ا}_{\text{ر}} \int_{0}^{\pi} \text{جب ر لا جب ن لا فرلا}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{2} \int_{0}^{\pi} \left\{ \text{جم (ن - ر) لا - جم (ن + ر) لا} \right\} \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{ا}_{\text{ر}}}{2} \left[\frac{\text{جب (ن - ر) لا}}{\text{ن - ر}} - \frac{\text{جب (ن + ر) لا}}{\text{ن + ر}} \right]_{0}^{\pi} = 0$$

ہے -

اِس لیے بائیں جانب کی تمام رقمیں بجز ایک کے معدوم ہوتی ہیں۔

اِس طرح $\int_{0}^{\pi} \text{ف (لا) جب ن لا فرلا} = \frac{1}{2} \text{ا}_{\text{ن}} \pi$

یا $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \text{ف (لا) جب ن لا فرلا}$

اِسی طرح یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر، صفر اور π کے درمیان لا کی قیمتوں کے لیے،

$$\text{ف (لا)} = \text{ب}_{0} + \text{ب}_{1} \text{ جم لا} + \text{ب}_{2} \text{ جم ۲ لا} + \cdots\cdots$$

تو $\text{ب}_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \text{ف (لا) فرلا}$

اور $\text{ب}_{\text{ن}} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \text{ف (لا) جم ن لا فرلا}$

ن کی صفر کے سوا دوسری قیمتوں کے لیے -

۴۸ — فوریر کے سلسلوں پر مثالیں -

(۱) π لا - لا^{2} کو ایک نیم سعنت جیبی سلسلہ میں جو لا = ۰ اور لا = π کے درمیان درست ہو پھیلاؤ -

اُس ضابطہ کو جو پچھلے دفعہ میں ثابت ہو چکا ہے دُہرانے کی

ضرورت نہیں ہے۔

فرض کرو π لا - لا^۲ = ا۱ جب لا + ا۲ جب ۲ لا + ا۳ جب ۳ لا + ...

جب ن لا سے ضرب دو اور صفر تا π تکمل کرو تو

∫ـ۰^π (π لا - لا^۲) جب ن لا فرلا = ان ∫ـ۰^π جب^۲ ن لا فرلا = π/۲ ان ،

حسب سابق

اب تکمل بالحصص سے

∫ـ۰^π (π لا - لا^۲) جب ن لا فرلا

= [- ۱/ن (π لا - لا^۲) جم ن لا]ـ۰^π + ۱/ن ∫ـ۰^π (π - ۲ لا) جم ن لا فرلا

= ۰ + [۱/ن^۲ (π - ۲ لا) جب ن لا]ـ۰^π + ۲/ن^۲ ∫ـ۰^π جب ن لا فرلا

= ۰ - ۲/ن^۳ [جم ن لا]ـ۰^π = ۴/ن^۳ اگر ن طاق ہے یا

= ۰ اگر ن جفت ہے

اس طرح ان = ۸/(π ن^۳) اگر ن طاق ہے یا

= ۰ اگر ن جفت ہے

اِس لیے آخرالامر π لا - لا^۲ = ۸/π (جب لا + ۱/۲۷ جب ۳ لا + ۱/۱۲۵ جب ۵ لا + ...)

(۲) ف (لا) کو ایک نیم سعت سلسلہ میں جو لا = ۰ سے لا = π تک درست ہو پھیلاؤ

جہاں ف (لا) = م لا ، لا = ۰ اور لا = π/۲ کے درمیان

اور ف (لا) = م (π - لا)، لا = π/۲ اور لا = π کے درمیان

اِس صورت میں ف (لا) سعت کے مختلف حصوں میں مختلف تحلیلی جملوں سے حاصل ہوتا ہے[1] صرف جدت تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں ہے -

چنانچہ

$$\int_{0}^{\pi} ف\,(لا)\ جب\ ن\ لا\ فرلا = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ف\,(لا)\ جب\ ن\ لا\ فرلا$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} ف\,(لا)\ جب\ ن\ لا\ فرلا$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} م\ لا\ جب\ ن\ لا\ فرلا + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} م\,(\pi - لا)\ جب\ ن\ لا\ فرلا$$

کام کا باقی حصہ ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں - نتیجہ ہے

$$\frac{۴\,م}{\pi}\left(جب\ لا - \frac{۱}{۹}\ جب\ ۳\ لا + \frac{۱}{۲۵}\ جب\ ۵\ لا - \frac{۱}{۴۹}\ جب\ ۷\ لا + \ldots\right)$$

طالب علم کو دئے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچنی چاہیئے اور پھر اسکا مقابلہ اُس ترسیم سے کرنا چاہیئے جو مندرجۂ بالا پھیلاؤ کی پہلی رقم کی اور پہلی دو رقموں کے مجموعہ کی ہے[2] -

---

[1] فوریر کا سلسلہ اُسوقت بھی اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ ف (لا) کی ترسیم دی گئی ہو اور کوئی تحلیلی جملہ معلوم نہ ہو بشرطیکہ دفعہ ۷۸ کے ضمن میں دی ہوئی شرطیں پوری ہو جائیں- جب کسی تفاعل کی ترسیم دیجاتی ہے تو تکملے حسابی عمل تقرب سے معلوم کئے جاتے ہیں یا اُس آلہ کے ذریعہ جس کو موسیقی محلل Harmonic Analyser کہتے ہیں-

[2] متعدد ترسیمیں کارلسلا کی کتاب .Fourier's Series and Integrals کے ساتویں باب میں ملیں گی - نیز .Phil. Mag جلد ۴۵ (۱۸۹۸ء) میں بھی بڑی عمدہ ترسیمیں دی گئی ہیں -

حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفاعلوں کو نیم سعت جیبی سلسلوں میں پھیلاؤ جو لا = ۰
اور لا = π کے درمیان درست ہوں :-

(۱) ۱ (۲) لا (۳) لا^۳ (۴) جم لا

(۵) قو^لا (۶) ف(لا) = ۰، از لا = ۰ تا لا = $\frac{\pi}{۴}$ اور از

لا = $\frac{۳\pi}{۴}$ تا π ،

ف(لا) = (۴ لا - π)(۳π - ۴ لا)، از لا = $\frac{\pi}{۴}$ تا لا = $\frac{۳\pi}{۴}$

(۷) ان میں سے کون سے جملے (ا) لا = ۰ کے لیے، (ب) لا = π کے لیے
درست ہیں -

۴۹ - حدود کی شرطوں کو پورا کرنے میں فوریر کے سلسلہ کا اطلاق -

اب ہم دفعہ ۴۶ کے مسئلہ کے حل کی تکمیل کر سکتے ہیں -
ہمیں دفعہ ۴۶ میں معلوم ہوا کہ

ف$_۱$ قو^{-ا} جب لا + ف$_۲$ قو^{-۲ا} جب ۲ لا + ف$_۳$ قو^{-۳ا} جب ۳ لا + ...

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

ف$_۱$ جب لا + ف$_۲$ جب ۲ لا + ف$_۳$ جب ۳ لا + ... = π لا - لا^۲ (۵۷)

دفعہ ۴۸ کی مثال (۱) میں ہمیں معلوم ہوا کہ، صفر اور π کے درمیان
لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

$\frac{۸}{\pi}$ (جب لا + $\frac{۱}{۲۷}$ جب ۳ لا + $\frac{۱}{۱۲۵}$ جب ۵ لا + ...) = π لا - لا^۲

پس مطلوبہ حل

$$\frac{\text{۸}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ما}}\,\text{جب لا}+\frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\text{۳ ما}}\,\text{جب ۳ لا}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\text{۵ ما}}\,\text{جب ۵ لا}+\ldots\right)$$

ہے۔

۵۰ ــ اُس صورت میں جبکہ حدود کی شرط میں π کی بجائے ل ہو ہم دیکھ چکے ہیں کہ تفرقی مساوات کا ایک حل ف $\text{قو}^{-\text{ب ما}}$ جب ب لا ہے اور شرطوں سے یہ معلوم ہوا کہ ب ایک مثبت صحیح عدد ن نہیں ہے بلکہ اِس کی شکل $\frac{\text{ن}\,\pi}{\text{ل}}$ ہونی چاہیئے۔

چنانچہ $\text{ف}_{\text{۱}}\,\text{قو}^{-\frac{\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\text{ف}_{\text{۲}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۲}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\ldots$

تمام شرطوں کو پورا کرتا ہے اگر صفر اور ل کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\text{ف}_{\text{۱}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\text{ف}_{\text{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\ldots=\text{ل لا}-\text{لا}^{\text{۲}}$$

رکھو $\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}=\text{ی}$ تو $\text{ل لا}-\text{لا}^{\text{۲}}=\frac{\text{ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}}(\pi\,\text{ی}-\text{ی}^{\text{۲}})$۔ اِس طرح تمام ف پہلے کی نسبت $\frac{\text{ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۲}}}$ گنا ہیں۔ اِس لیے حل ہے

$$\frac{\text{۸ ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۳}}}\left(\text{قو}^{-\frac{\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۳}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۳}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{۵}\pi\,\text{ما}}{\text{ل}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{۵}\pi\,\text{لا}}{\text{ل}}+\ldots\right)\ldots$$

چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۱) تصدیق کرو کہ

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} = \frac{1}{\text{ک}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$$

کا ایک حل $\text{و} = \frac{1}{\sqrt{\text{ت}}}\,\text{قو}^{-\frac{\text{لا}^{2}}{4\text{ک ت}}}$ ہے۔

(۲) $\text{و} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\text{ب لا}}\ \text{جب}\,(2\text{ب}^{2}\text{ک ت} - \text{ب لا})$ سے ا اور ب کو ساقط کرو۔

(۳) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} - \text{ھ و}$ میں $\text{و} = \text{قو}^{-\text{ھ ت}}\,\text{ط}$ رکھکر اُسکو

$$\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ط}}{\text{جف لا}^{2}}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک موصل سلاخ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ سلاخ کی سطح ہوا میں جو صفر تپش پر ہو حرارت کا اشعاع کر رہی ہو۔]

(۴) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{ک}}{\text{ر}^{2}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^{2}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)$ میں $\text{ط} = \text{ر و}$ رکھکر اُس کو

$$\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ط}}{\text{جف ر}^{2}}$$

میں تحویل کرو۔

[پہلی مساوات سے ایک کرہ کی تپش معلوم ہوتی ہے جبکہ حرارت نصف قطری سمت میں بہ رہی ہو۔]

$$(۵)\quad \text{و} = \frac{1}{\text{ر}}\left[\text{ف}(\text{ر}-\text{ا ت}) + \text{فا}(\text{ر}+\text{ا ت})\right]$$ (۵۸

سے اختیاری تفاعلوں کو ساقط کرو۔

(۶) (آ) ثابت کروکہ اگر $\text{و} = \text{قو}^{\text{م لا} + \text{خ ن ت}}$، مساوات

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} - \text{ہ و}$$

کا ایک حل ہو تو م کو ملتف ہونا چاہیئے جہاں ن اور ل حقیقی ہیں۔

(ب) پس م = ـ گ ـ خ ف رکھکر ثابت کروکہ $\text{و} = \text{قو}^{-\text{گ لا}}\,\text{جب}(\text{ن ت} - \text{ف لا})$

ایک حل ہے جو لا = ۰ کے لیے و جب ن ت میں تحویل ہوتا ہے بشرطیکہ
ک (گ² ـ ف²) = ہ اور ن = ۲ ک ف گ ۔

(ج) اگر و = ۰ جبکہ لا = ∞ تو ثابت کروکہ اگر ک اور ن مثبت
ہوں تو گ اور ف بھی مثبت ہونگے ۔

[انجسٹرام (Angstrom) کے اُس طریقہ میں جو ک (نفوذیت)
کی پیمائش کے لیے ہے ایک بہت ہی لمبی سلاخ کا ایک سِرا تپش
و جب ن ت کی دَوری تبدیلی کے تحت ہوتا ہے ۔ اِس کی وجہ سے حرارت
کی موجیں سلاخ کی سمت میں اِس پر سفر کرتی ہیں ۔ اِن کی رفتار اور شرحِ
انحطاط کی پیمائش کرکے $\frac{\text{ن}}{\text{ف}}$ اور گ کو معلوم کیا جاتا ہے ۔ ک کو پھر

$\text{ک} = \frac{\text{ن}}{\text{۲ ف گ}}$ سے محسوب کیا جاتا ہے۔]

(۷) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2}$ کا حل معلوم کرو جو لا = ۰ کے لیے
و جب ن ت میں اور لا = + ∞ کے لیے صفر میں تحویل ہو ۔

[یہ پچھلے سوال کا مسئلہ ہے جبکہ کوئی اشعاع وقوع پذیر نہ ہو۔ سلاخ کی بجائے ایک نیم لامتناہی ٹھوس جسم جو ایک مستوی رخ سے محدود ہو رکھا جا سکتا ہے اگر بہاؤ ہمیشہ اس رخ کے عمود وار ہو۔ کیلون (Kelvin) نے اس طریقہ پر ک کو زمین کے لیے معلوم کیا تھا۔]

(۸) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتیں

- جف و / جف لا = ر ع + ل جف ع / جف ت ،

- جف ع / جف لا = ک و + ج جف و / جف ت

حلوں

و = وٖ قو^-(گ + خ ف) لا + خ ن ت

ع = عٖ قو^-(گ + خ ف) لا + خ ن ت

سے پوری ہوتی ہیں اگر

گ² - ف² = ر ک - ن² ل ج ،

۲ ف گ = ن (ر ج + ل ک)

اور عٖ² (ر + خ ل ن) = وٖ² (ک + خ ج ن)

[یہ ٹیلیفون کے تار کے لیے ہیوی سائڈ کی مساواتیں ہیں جبکہ تار کی مزاحمت ر، گنجائش ج، امالہ ل، تراوش (Leakance) ک ہو جہاں ان سب کو فی اکائی طول پیمائش کیا گیا ہے۔ رو ع ہے اور قوت محرکہ برق و۔]

(۹) ثابت کرو کہ پچھلی مثال میں گ، ن کے تابع نہیں ہے اگر

ر ج = ک ل

[موج کی ترقیق گ پر منحصر ہوتی ہے جو بالعموم ن پر منحصر ہوتا ہے۔]

مثلاً اگر آواز مختلف تعدد کی موسیقی موجوں سے ترکیب یافتہ ہو تو یہ موجیں ترقیق کے مختلف درجوں کے ساتھ منتقل ہوں گی۔ اِس لیے دوسرے سرے پر آواز بگڑی ہوئی پہنچیگی۔ ل اور ک کو بڑھا کر را ج = ک ل
(۵۹) بنانے کی ہیوی سائڈ کی ترکیب اِس بگاڑ کو روکتی ہے۔]

(۱۰) اگر مساوات (۸) میں ل = ک = ۰ تو ثابت کرو کہ و اور ع

دونوں کی رفتار $\sqrt{\frac{\text{۲ن}}{\text{را ج}}}$ سے اشاعت ہوتی ہے۔

[رفتار $\frac{\text{ن}}{\text{ف}}$ سے حاصل ہوتی ہے۔]

(۱۱) ثابت کرو کہ

$$\text{ف} = ۰،\qquad \text{عہ} = ۰،$$
$$\text{ق} = ۰،\qquad \text{بہ} = \text{بہ جب ہ (لا - و ت)}،$$
$$\text{را} = \text{را جب ب (لا - و ت)}،\qquad \text{جہ} = ۰$$

سے ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{ک}}{\text{ج}}\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف جہ}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف بہ}}{\text{جف ی}}،\qquad -\frac{\text{مہ}}{\text{ج}}\frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف را}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}}،$$

$$\frac{\text{ک}}{\text{ج}}\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف جہ}}{\text{جف لا}}،\qquad -\frac{\text{مہ}}{\text{ج}}\frac{\text{جف بہ}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف را}}{\text{جف لا}}$$

$$\frac{\text{ک}}{\text{ج}}\frac{\text{جف را}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف بہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف ما}}،\qquad -\frac{\text{مہ}}{\text{ج}}\frac{\text{جف جہ}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ $\text{و} = \sqrt{\text{ج} \backslash \text{ک مہ}}$، اور $\text{بہ} = -\sqrt{(\text{ک} \backslash \text{مہ})}\ \text{را}$

[یہ ایک برق گذار کے لیے جسکی نوعی امالی گنجائش ک اور نفوذ پذیری مہ ہے میکسول کی برقی مقناطیسی مساواتیں ہیں۔ برقی حدت کے اجزائے ترکیبی ف، ق، را اور مقناطیسی حدت کے عہ، بہ، جہ ہیں۔ برقی مقناطیسی

اکائی اور برقی سکونی اکائی میں نسبت ج ہے (جو اثیر میں نور کی رفتار کے مساوی ہے)۔ حل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مستوی برقی مقناطیسی موجیں رفتار $\frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ک مہ}}}$ کے ساتھ سفر کرتی ہیں اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ برقی اور مقناطیسی حدتیں اشاعت کی سمت پر اور ایک دوسرے کے عمود وار ہیں۔]

(۱۲) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک} \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2}$ کا ایسا حل معلوم کرو کہ

$\text{و} \neq \infty$ اگر $\text{ت} = +\infty$،

$\text{و} = 0$ اگر $\text{لا} = 0$ یا π، ت کی تمام قیمتوں کے لیے

$\text{و} = \pi\,\text{لا} - \text{لا}^2$ اگر $\text{ت} = 0$، صفر اور π کے درمیان لا کی قیمتوں کے لیے

[نوٹ۔ اس سوال کو حل کرنے سے پہلے دفعات ۴۶ اور ۴۹ کا مکرر مطالعہ کرو۔ و، طول π کی ایک ایسی غیر اشعاعی سلاخ کی تپش ہے اور جس کے سرے صفر درجہ حرارت پر رکھے گئے ہیں، سلاخ کی تپش ایک سرے سے فاصلہ لا پر ابتداءً $(\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2)$ ہے۔]

(۱۳) پچھلے سوال کا حل کیا ہو جائیگا اگر سلاخ کا طول π کی بجائے ل ہو۔
[دفعہ ۵۰ کے مطابق عمل کرو۔]

(۱۴) سوال (۱۲) کو حل کرو اگر شرط، $\text{و} = 0$ جبکہ $\text{لا} = 0$ یا π کی بجائے $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = 0$ جبکہ $\text{لا} = 0$ یا π ہو۔

[سلاخ کے سرے مستقل تپش پر ہونے کی بجائے وہ اب ایسے ہیں کہ ان میں سے کوئی حرارت نہیں گذر سکتی۔]

(۱۵) سوال (۱۲) کو حل کرو اگر جملہ $\pi\,\text{لا} - \text{لا}^2$ کی بجائے ۱۰۰ رکھا جائے۔

(۶۰) (۱۶) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک} \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2}$ کا ایسا حل معلوم کرو کہ

و ≠ ∞ اگر ت = + ∞

و = ۱۰۰ اگر لا = ۰ یا π، ت کی تمام قیمتوں کے لیے

و = ۰ اگر ت = ۰، صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے۔

[برف کی مانند ٹھنڈی سلاخ کی بجائے اُس کے سِرے جوش کھاتے ہوئے پانی میں ہیں]

(۱۷) سوال (۱۵) کو حل کرو اگر طول π کی بجائے ل ہو۔ اگر ل لا انتہا بڑھے تو ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ، تکملہ

$$\frac{۲۰۰}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{۱}{\text{عہ}}\ \text{قو}^{-\text{ک عہ}^{۲}\text{ت}}\ \text{جب عہ لا فر عہ}$$

ہو جاتا ہے۔

[نوٹ۔ یہ فوریر کا ایک تکملہ کہلاتا ہے۔ اِس نتیجہ کو حاصل کرنے کے لیے رکھو

$$\text{فر عہ} = \frac{۲\pi}{\text{ل}}\quad \text{اور}\quad \text{عہ} = \frac{\pi(۲\text{ر}+۱)}{\text{ل}}$$

کیلون نے زیر زمین تپش کے اضافہ کی شرح مشاہدہ کر کے زمین کی عمر کا اندازہ لگانے میں ایک تکملہ کا استعمال کیا۔ (دیکھو اِس کتاب کے ختم پر متفرق مثالوں میں مثال ۱۰۷)۔ لیکن اسٹرٹ (Strutt) کے حالیہ انکشاف سے کہ حرارت زمین کے اندر تابکارانہ عمل سے مسلسل پیدا ہو رہی ہے یہ معلوم ہوا کہ کیلون کا تخمینہ بہت کم تھا۔]

(۱۸) $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک}\ \frac{\text{جف}^{۲}\text{و}}{\text{جف لا}^{۲}}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

و = ∞ جبکہ ت = + ∞

$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ = ۰ جبکہ لا = ۰، }
و = ۰ جبکہ لا = ل، } ت کی تمام قیمتوں کے لیے،

و = و۰ جبکہ ت = ۰، صفر اور ل کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے۔

[اگر ایک امتحانی نلی کو جس میں نمک کا محلول ہو پانی کے ایک بہت بڑے برتن میں پوری طرح ڈبو دیا جائے تو نمک امتحانی نلی سے باہر بڑے برتن کے پانی میں نفوذ کرے گا۔ اگر نمک کا ابتدائی ارتکاز و۰ ہو اور امتحانی نلی کے طول ل میں وہ بھرا ہوا ہو تو کسی لمحہ پر نلی کی تہ سے لا ارتفاع پر نمک کا ارتکاز و سے حاصل ہوگا۔ شرط $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ = ۰ جبکہ لا = ۰ کے یہ معنے ہیں کہ بند سرے پر کوئی نفوذ وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ و = ۰ جبکہ لا = ل کے یہ معنے ہیں کہ امتحانی نلی کے سرے پر تقریباً خالص پانی ہے۔]

(۱۹) $\frac{\text{جف}^2\ \text{ما}}{\text{جف ت}^2} = \text{و}^2 \frac{\text{جف}^2\ \text{ما}}{\text{جف لا}^2}$ کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

ما، لا کا مثلثی تفاعل ہو،

ما = ۰ جبکہ لا = ۰ یا π، ت کی تمام قیمتوں کے لیے،

$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}}$ = ۰ جبکہ ت = ۰، لا کی تمام قیمتوں کے لیے،

جبکہ ت = ۰ {
ما = م لا، لا = ۰ اور $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان،
ما = م (π - لا)، لا = $\frac{\pi}{2}$ اور π کے درمیان

[نوٹ - دفعہ ۴۸ کی دوسری حل کردہ مثال دیکھو۔ (۶۱)
ما اس ڈوری کا عرضی ہٹاؤ ہے جو دو نقطوں کے درمیان جنہیں فاصلہ π ہے تنی ہوئی ہے۔ ڈوری کو اس کے وسطی نقطہ پر پکڑ کر ایک طرف فاصلہ $\frac{\text{م}\pi}{2}$ تک کھینچ کر چھوڑ دیا گیا ہے۔]

(۲۰)* $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{عف}^2\,\text{ما}$ کے حل کو جہاں عف ایک مستقل ہے شکل

$$\text{ما} = \text{و}^{\text{لاعف}}\,\text{ا} + \text{و}^{-\text{لاعف}}\,\text{ب}$$

میں لکھکر $\frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف ت}^2}$ کے حل کو شکل

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{ت} + \text{لا}) + \text{فا}\,(\text{ت} - \text{لا})$$

میں، عف کی بجائے $\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}$، ا کی بجائے ف (ت)، اور ب کی بجائے فا (ت) درج کر کے اور ٹیلر کے مسئلہ کو اِس کی علامتی شکل ف (ت + لا) $= \text{و}^{\text{لاعف}}$ ف (ت) میں استعمال کر کے اخذ کرو۔

[اِن علامتی طریقوں سے جو نتیجے حاصل ہوں اُن کو صرف غالباً صحیح نتیجے سمجھنا چاہیئے۔ جب تک کہ دوسرے ذریعوں سے اِن کی تصدیق نہ ہو اُس استدلال کا جو نتیجہ سے واپس تفرقی مساوات تک پہنچنے میں کیا جاتا ہے بڑی احتیاط کے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے۔]

(ہیوی سائڈ نے علامتی طریقوں کو بعض ایسے مسئلوں کے حل کرنے میں استعمال کیا ہے جو دوسرے طریقوں سے حل نہیں ہوتے۔ دیکھو اسکی کتاب (Electromagnetic Theory)

(۲۱)* $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}^2\,\text{ما}$ کے حل سے جہاں عف ایک مستقل ہے $\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ما}}{\text{جف ت}^2}$ کا حل شکل

* مطالعہ اول میں قابل ترک

ما = ف(ت) + لا $\frac{\text{جف}^2 \text{ف}}{\text{جف ت}^2}$ + $\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}$ $\frac{\text{جف}^4 \text{ف}}{\text{جف ت}^4}$ + ...

میں اخذ کرو۔

[یہ حل نہ ہوگا اگر سلسلہ مستدق نہ ہو]

$\frac{\text{جف}^2 \text{ما}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} \frac{\text{جف}^2 \text{ما}}{\text{جف ت}^2}$ کا عام حل۔

آزمایشی حل کے طور پر ما = ف (لا + م ت) رکھو جس میں م مستقل ہے۔

اِس سے تفرقی مساوات

$$\text{ف}'' (\text{لا} + \text{م ت}) = \frac{\text{م}^2}{\text{ا}^2} \text{ف}'' (\text{لا} + \text{م ت})$$

حاصل ہوتی ہے جو پوری ہو گی اگر م = ± ا۔

اِس طرح دو حل ما = ف (لا - ا ت) اور ما = فا (لا + ا ت) حاصل ہوتے ہیں اور چونکہ تفرقی مساوات خطی ہے تیسرا حل

ما = ف (لا - ا ت) + فا (لا + ا ت)

ہے جس میں اختیاری تفاعلوں کی تعداد تفرقی مساوات کے رتبہ (دو) کے مساوی ہے اور اِس لیے اِس سے زیادہ عام حل کی توقع نہیں کیجاسکتی (دیکھو صفحہ ۴۳۵ اور صفحہ ۵۰۸)۔

[دفعات ۱۷۸ تا ۱۸۱ اِس باب کا تکملہ ہیں۔ اِن میں بالخصوص مرتعش ڈوریوں کی مساوات اور موج کی سہ ابعادی مساوات سے بحث کی گئی ہے۔ دفعہ ۱۸۱ کے آخر میں ریاضیاتی طبیعات کی تفرقی مساواتوں پر جو اہم کتابیں لکھی گئی ہیں اِن میں سے چند کی فہرست دی گئی ہے۔]

پانچواں باب (۶۲)

وہ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں

۵۱ — اِس باب میں ہم پہلے رتبہ اور پہلے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کے بعض خاص نمونوں پر غور کریں گے، اِن کا حل بعض اوقات لامتناہی سلسلوں کے استعمال کے بغیر حاصل کیا جاسکتا ہے۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کو اختصاراً ع سے تعبیر کیا جائے گا۔

یہ خاص نمونے حسب ذیل ہیں:

(ا) وہ جو ع کے لیے حل پذیر ہیں،

(ب) وہ جو ما کے لیے حل پذیر ہیں،

(ج) وہ جو لا کے لیے حل پذیر ہیں۔

۵۲ — **وہ مساواتیں جو ع کے لیے حل پذیر ہیں۔** اگر ہم ع کے لیے حل کر سکیں تو ن ویں درجہ کی مساوات پہلے درجہ کی ن مساواتوں میں تحویل ہو گی جن پر ہم دوسرے باب کے طریقے استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال (۱) مساوات ع^2 + ع لا + ع ما + لا ما = ۰

سے مساواتیں ع = - لا یا ع = - ما

حاصل ہوتی ہیں اور اِن سے حل

۲ ما = - لا^۲ + ج۱ یا لا = - لوک ما + ج۲

حاصل ہوتے ہیں جن کو ایک مساوات

(۲ ما + لا^۲ - ج۱) (لا + لوک ما - ج۲) = ۰، ...... (۱)

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

یہاں ایک مشکل سے واسطہ پڑتا ہے۔ کامل ابتدائی میں بظاہر دو اختیاری مستقل شامل ہیں حالانکہ صرف ایک ہونا چاہیئے کیونکہ مساوات پہلے رتبہ کی ہے۔ لیکن حل

(۲ ما + لا^۲ - ج) (لا + لوک ما - ج) = ۰، ...... (۲)

پر غور کرو۔

اگر ہم مستقلوں ج، ج۱، ج۲ میں سے ہر ایک کی صرف ایک قیمت پر غور کریں تو ان میں سے ہر مساوات منحنیوں کے ایک زوج کو تعبیر کرتی ہے اور بلا شبہ یہ زوج ایک ہی نہیں ہوں گے (اِلّا آنکہ ج = ج۱ = ج۲)۔ لیکن اگر ہم منحنیوں کے زوجوں کے اُس لامتناہی جٹ پر غور کریں جو ان مستقلوں کو - ∞ سے + ∞ تک تمام ممکن قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے تو ہمیں بہ حیثیت مجموعی ایک ہی لامتناہی جٹ ملیگا اگرچہ یہ ممکن ہے کہ ترتیب مختلف ہو۔ اِس لیے (۲) کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال (۲) ع^۲ + ع - ۲ = ۰ (۶۳)

یہاں ع = ۱ یا ع = - ۲

∴ ما = لا + ج۱ یا ما = - ۲ لا + ج۲

پچھلی مثال کے مطابق ہم کامل ابتدائی کو

(ما - لا - ج) (ما + ۲ لا - ج۲) = ۰

کی بجائے (ما − لا − ج) (ما + ۲لا − ج) = ۰
لیتے ہیں ۔

اِن میں سے ہر مساوات اُن تمام خطوں کو تعبیر کرتی ہے جو ما = لا یا ما = − ۲ لا کے متوازی ہیں ۔

حل طلب مثالیں

(۱) ع² + ع − ۶ = ۰   (۲) ع² + ۲ لا ع = ۳ لا²

(۳) ع² = لا⁵   (۴) لا + ما ع² = ع (۱ + لا ما)

(۵) ع³ − ع (لا² + لا ما + ما²) + لا ما (لا + ما) = ۰

(۶) ع² − ۲ ع جمز لا + ۱ = ۰

۵۳ ۔ وہ مساواتیں جو ما کے لیے حل پذیر ہیں ۔

اگر مساوات ما کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق لا کے لحاظ سے کیا جاتا ہے ۔

مثال (۱) ع² − ع ما + لا = ۰

ما کے لیے حل کرنے پر ما = ع + لا/ع

تفرق کرنے پر ع = فرع/فرلا + ۱/ع − (لا/ع²) (فرع/فرلا)

یعنے (ع − ۱/ع) فرلا/فرع + لا/ع² = ۱

یہ پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے جبکہ ع کو غیر تابع متغیر سمجھا جائے ۔
چنانچہ دفعہ ۱۹ کے مطابق عمل کرنے پر حاصل ہوگا

لا = ع (ج + جمز⁻¹ ع) (ع² − ۱)^(−½)

$$\therefore\quad \text{ا} = \text{ع} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}}\ ،\quad \text{ما} = \text{ع} + (\text{ج} + \text{جمز}^{-1}\,\text{ع})(\text{ع}^{2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

اِن دو مساواتوں سے جو لا اور ما کے لیے ع کی رقوم میں ہیں تفرقی مساوات کے حل کی مبدلی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ جب ج کی قیمت معلوم ہو تو ع کی ہر قیمت کے متناظر لا کی ایک محدود قیمت اور ما کی ایک محدود قیمت حاصل ہوگی اور اِس طرح ایک نقطہ مقرر ہوگا۔ جب ع متغیر ہوتا ہے تو نقطہ حرکت کرتا ہے اور ایک منحنی مرتسم کرتا ہے۔ اِس مثال میں ہم ع کو ساقط کر کے لا اور ما کو مربوط کرنے والی مساوات معلوم کر سکتے ہیں، لیکن منحنی کو مرتسم کرنے کے لیے یہ مبدلی شکلیں اگر بہتر نہیں تو اتنی ہی اچھی ہیں

مثال (۲) $\quad ۳\,\text{ع}^{۵} - \text{ع}\ \text{ما} + \text{ا} = ۰$

ما کے لیے حل کرنے پر $\quad \text{ما} = ۳\,\text{ع}^{۴} + \text{ع}^{-۱}$

تفرقی کرنے پر $\quad \text{ع} = ۱۲\,\text{ع}^{۳}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - \text{ع}^{-۲}\,\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$

یعنے $\quad \text{فرلا} = (۱۲\,\text{ع}^{۲} - \text{ع}^{-۳})\,\text{فرع}$

تکمل کرنے سے $\quad \text{لا} = ۴\,\text{ع}^{۳} + \frac{۱}{۲}\,\text{ع}^{-۲} + \text{ج}$

اور اوپر سے $\quad \text{ما} = ۳\,\text{ع}^{۴} + \text{ع}^{-۱}$

طالب علم ج کی کسی مخصوص قیمت مثلاً ج = ۰ کے لیے اِس کی ترسیم معلوم کرے۔

(۶۴) ۵۴ — وہ مساواتیں جو لا کے لیے حل پذیر ہیں۔

اگر مساوات لا کے لیے حل پذیر ہے تو حل شدہ شکل کا تفرق ما کے لحاظ سے کیا جاتا ہے اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ کو شکل $\frac{۱}{\text{ع}}$ میں لکھا جاتا ہے۔

مثال ۔ ع^{2} - ع ما + لا = ۰ ، اِس کو گذشتہ دفعہ میں ما کیلئے حل کیا گیا تھا۔

لا کے لیے حل کرنے پر لا = ع ما - ع^{2}

ما کے لحاظ سے تفرق کرنے پر $\frac{1}{\text{ع}}$ = ع + ما $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$ - ۲ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$

یعنے (ع - $\frac{1}{\text{ع}}$) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرع}}$ + ما = ۲ ع

جو پہلے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے جبکہ ع کو غیر تابع متغیر اور ما کو تابع متغیر سمجھا جائے ۔ اِس کو دفعہ ۱۹ کے مطابق حل کیا جا سکتا ہے ۔ طالب علم اُس نتیجہ پر پہنچیگا جو گذشتہ دفعہ میں معلوم کیا گیا ہے ۔

حل طلب مثالیں ۔

(۱) لا = ۴ع + ۴ع^{3} (۲) ع^{2} - ۲ لا ع + ۱ = ۰

(۳) ما = ع^{2} لا + ع (۴) ما = لا + ع^{3}

(۵) ع^{3} + ع = قو$^{\text{ما}}$ (۶) ۲ ما + ع^{2} + ۲ع = ۲ لا (ع + ۱)

(۷) ع^{3} - ع (ما + ۳) + لا = ۰ (۸) ما = ع جب ع + جم ع

(۹) ما = ع مس ع + لوک جم ع (۱۰) قو$^{\text{ع - ما}}$ = ع^{2} - ۱

(۱۱) ع = مس (لا - $\frac{\text{ع}}{1 + \text{ع}^{2}}$)

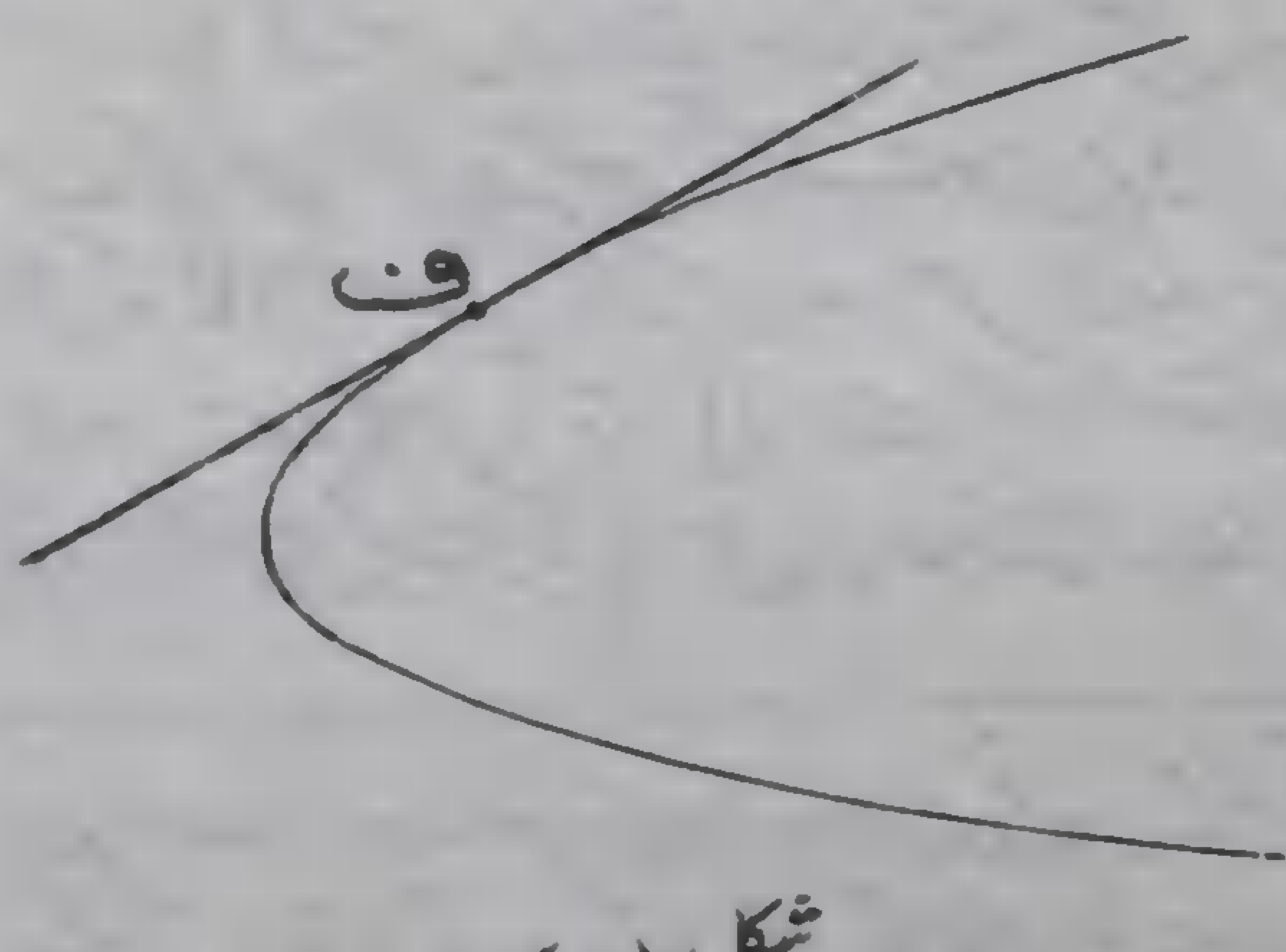
(۱۲) ثابت کرو کہ اُس قبیل کے تمام منحنی جو مثال (۱) کے حل سے حاصل ہوتے ہیں محور ما کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔ ج کی قیمت قبیل کے اُس منحنی کے لیے معلوم کرو جو نقطہ (۰، ۱) میں سے گذرتا ہے ۔

(۱۳) مثال (۹) کے حل میں ج = ۰ رکھنے سے جو منحنی حاصل ہوتا ہے اس کو مرتسم کرو ۔ اُن نقطوں پر مماس کھینچو جو ع = ۰، ع = ۱، ع = ۲، ع = ۳ سے حاصل ہوتے ہیں اور پیمائش سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اِن مماسوں کے ڈھال علی الترتیب ۰، ۱، ۲، اور ۳ ہیں ۔

چھٹا باب

نادر حل[1]

۵۵ ـــ ہم محددوں کے علم ہندسہ سے جانتے ہیں کہ خطِ مستقیم ما = م لا + $\frac{۱}{م}$
مکافی ما۲ = ۴ ا لا کو مس کرتا ہے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو ـ
کسی مخصوص مماس کے نقطہ تماس ف پر غور کرو ـ ف پر مماس اور مکافی کی سمتیں وہی ہیں اور اس لیے اس نقطہ پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت دونوں میں مشترک ہے اور نیز لا اور ما کی قیمتیں بھی ـ



شکل (۷)

[1] اس باب کے استدلال ہندسی تخیل پر مبنی ہیں ـ اس لیے نتیجوں کو ثابت شدہ نہیں سمجھا جا سکتا ان کے متعلق صرف یہ خیال کیا جا سکتا ہے کہ وہ بعض صورتوں میں غالباً درست ہیں ـ تحلیلی نظریہ میں بڑی مشکلیں پیش آتی ہیں { دیکھو ایم ـ جے ـ ایم ـ ہل Proc. Lond. Math. Soc. 1918 }

لیکن مماس کے لیے م = $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ع (فرض کرد)، اس لیے مماس

تفرقی مساوات ما = ع لا + $\frac{1}{\text{ع}}$ کو پورا کرتا ہے۔

یہ مساوات نقطہ ف پر مکافی کے لیے بھی درست ہے جہاں لا، ما اور ع مماس اور مکافی دونوں کے لیے وہی ہیں۔ اب چونکہ ف مکافی پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے اس لیے مکافی کی مساوات ما^2 = ۴ لا کو تفرقی مساوات ما = ع لا + $\frac{1}{\text{ع}}$ کا ایک حل ہونا چاہئے جیسا کہ طالب علم آسانی سے اس کی تصدیق کر سکتا ہے۔

(۶۶) عام طور پر اگر منحنیوں کا کوئی اکہرا لامتناہی نظام ہو اور یہ سب منحنی ایک ثابت منحنی کو جس کو ہم لفاف[1] کہتے ہیں مس کریں اور اگر یہ قبیل پہلے رتبہ کی کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو تعبیر کرے تو لفاف سے اس تفرقی مساوات کا ایک حل تعبیر ہوگا۔ کیونکہ لفاف کے ہر نقطہ پر لا، ما، اور ع کی قیمتیں لفاف کے لیے اور قبیل کے اس منحنی کے لیے جو لفاف کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے وہی ہوتی ہیں۔

ایسے حل کو **نادر حل** کہتے ہیں۔ اس میں کوئی اختیاری مستقل شامل نہیں ہوتا اور نہ وہ کامل ابتدائی سے، الّا استثنائی صورتوں کے اختیاری مستقل کو کوئی مخصوص قیمت دیکر حاصل کیا جا سکتا ہے (دفعہ ۱۶۰)۔

[1] لیمب کے "صغاری احصاء" (دوسرا اڈیشن) دفعہ ۱۵۵ میں منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ وہ قبیل کے متصلہ منحنیوں کے انتہائی تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔ اس تعریف میں لفاف کے علاوہ یا ان کی بجائے عقدہ طریق اور قرن طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں۔ [اس کی ہندسی وجہ ہم دفعہ ۵۶ میں بیان کریں گے۔ تحلیلی ثبوت کے لیے لیمب کی کتاب دیکھو]۔

حل طلب مثال

ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ما = ۱ ' مکافیوں ما = لا + $\frac{1}{4}$ (لا - ج)^2 کے قبیل کا لفاف ہے ۔ ثابت کرو کہ نقطہ تماس (ج ' ج) ہے اور اِس نقطہ پر مکافی اور لفاف کے لیے ع = ۱ ۔ مکافیوں کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل ما = لا + (ع - ۱)^2 میں حاصل کرو اور اِس امر کی تصدیق کرو کہ لفاف کی مساوات اِس کو پورا کرتی ہے ۔

لفاف اور قبیل کے چند مکافیوں کو ج = ۰ ' ۱ ' ۲ وغیرہ لیکر رسّم کرو۔

۵۶ — اب ہم یہ غور کریں گے کہ نادر حلوں کو کس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے ۔ یہ بتایا جا چکا ہے کہ اُن منحنیوں کا لفاف جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں ایک نادر حل ہے ' اِس لیے ہم لفافوں کو معلوم کرنیکے طریقہ سے ابتدا کریں گے ۔

عام طریقہ [1] یہ ہے کہ منحنیوں کے قبیل کی مساوات ف (لا ' ما ' ج) = ۰ اور

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}} = ۰$$

سے مبدل ج کو ساقط کیا جائے ۔ مثلاً اگر ف (لا ' ما ' ج) = ۰ '

ما - ج لا - $\frac{1}{\text{ج}}$ = ۰ ہو تو $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}}$ = ۰ ' - لا + $\frac{1}{\text{ج}^2}$ = ۰ ہے

[1] دیکھو لیمب کا 'صغاری احصاء' (دوسرا اڈیشن) دفعہ ۱۵۶ - اگر ف (لا ' ما ' ج) کی شکل ل ج^2 + م ج + ن ہو تو نتیجہ م^2 = ۴ ل ن حاصل ہوتا ہے ۔ چنانچہ

$$\text{ما - ج لا - }\frac{1}{\text{ج}}\text{ = ۰ یعنے ج}^2\text{ لا - ج ما + ۱ = ۰}$$

کے لیے نتیجہ ما^2 = ۴ لا ہے ۔

[دوسرے اڈیشن کے دفعات ۱۵۵ اور ۱۵۶ ' تیسرے اڈیشن میں دفعات ۱۳۸ اور ۱۳۹ ہیں]

اور اس لیے ما ـ ج لا ـ $\frac{1}{ج}$ = ۰ اور ـ لا + $\frac{1}{ج^2}$ = ۰ سے ج کو ساقط

(۶۷) کیا جائے تو ا = ± ۲ $\sqrt{ما لا}$ یا $ما^2$ = ۴ لا حاصل ہوتا ہے۔

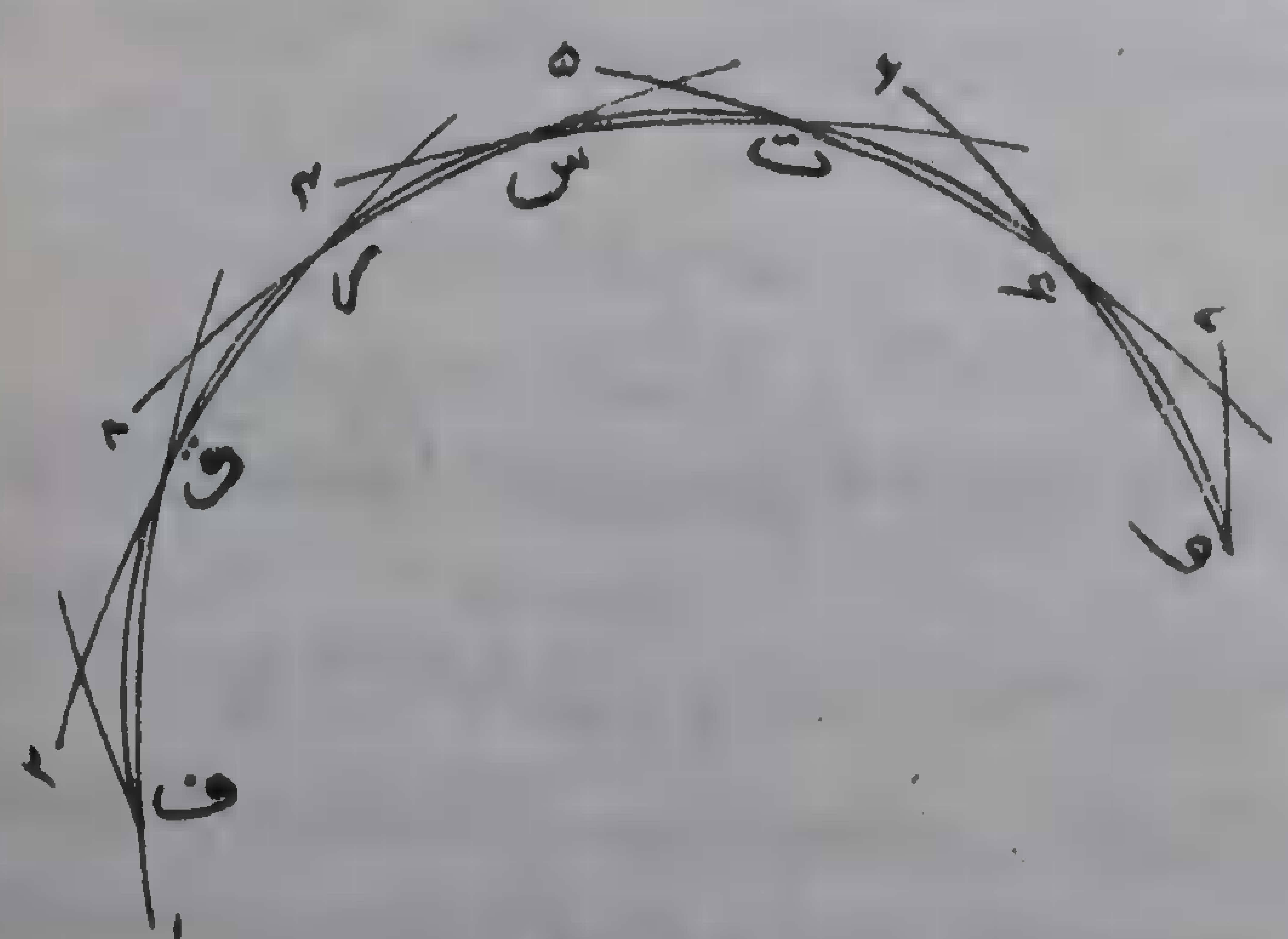
یہ طریقہ

ف (لا، ما، ج) = ۰

اور ف (لا، ما، ج + ه) = ۰ کے نقطہ تقاطع کا طریق معلوم کرنیکے معادل ہے (جو قبیل کے دو ایسے منحنی ہیں جن میں مبدلوں کا فرق ایک چھوٹی مقدار ه ہے) جبکہ ه انتہا میں صفر کی طرف مائل ہو۔ نتیجہ کو ف (لا، ما، ج) = ۰ کا ج ممیز کہتے ہیں۔

۵۷ ـــ اب نقشوں ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ پر غور کرو۔

شکل (۸) میں وہ صورت پیش کی گئی ہے جس میں قبیل کے منحنی کوئی خاص ندرت نہیں رکھتے۔



شکل (۸)

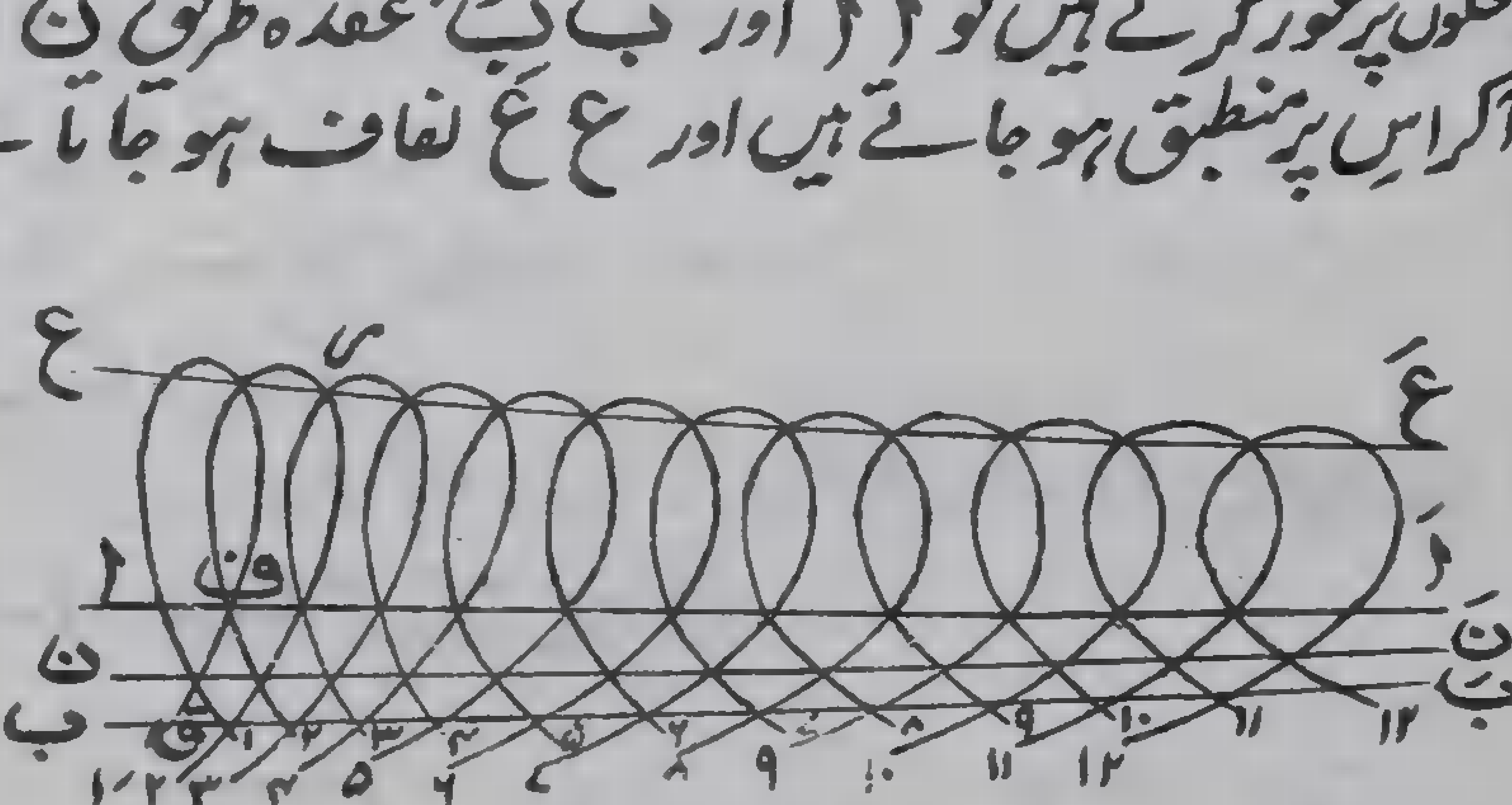
انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ایک منحنی ف ق ر س ت ع و ہے جس میں قبیل کے منحنیوں میں سے ہر ایک کے ساتھ نقطے مشترک ہیں

(مثلاً ق اور ر طریق پر بھی اور اُس منحنی پر بھی ہیں جو ۲ سے نشان زدہ ہے)۔
اِس لیے انتہا میں طریق ف ق ر س ت ع و قبیل کے ہر منحنی
کو مس کرتا ہے اور وہی ہے جس کی ہم نے لفاف کے طور پر تعریف
کی ہے۔

شکل (۹) میں قبیل کے ہر منحنی میں ایک عقدہ ہے۔ دو متصلہ
منحنی تین نقطوں میں (مثلاً منحنی ۲ اور ۳ نقطوں ف، ق، ر میں) متقاطع
ہوتے ہیں۔

ایسے نقطوں کا طریق تین مختلف حصوں ع عَ، ا اَ، اور ب بَ
پر مشتمل ہوتا ہے۔

جب ہم متصلہ منحنیوں کو قریب اور قریب تر لیکر اِن کے انتہائی
قریب محلوں پر غور کرتے ہیں تو ا اَ اور ب بَ، عقدہ طریق ن نَ کے
قریب آکر اِس پر منطبق ہو جاتے ہیں اور ع عَ لفاف ہو جاتا ہے۔



شکل (۹)

اِس لیے اِس صورت میں ج ممیز میں عقدہ طریق کی مساوات کا مربع (٦٨)
اور نیز لفاف کی مساوات شامل ہیں۔

شکل ۱۰ سے ظاہر ہے کہ عقدہ طریق ن نَ کی سمت اِس کے کسی نقطہ
ف پر بالعموم وہی نہیں ہوتی جو منحنی کے کسی ایک شاخ کی اِس نقطہ پر
ہے۔ نقطہ ف پر منحنی اور عقدہ طریق دونوں میں لا اور ما مشترک ہیں
لیکن ع مشترک نہیں ہے، اِس لیے عقدہ طریق قبیل کے منحنیوں کی

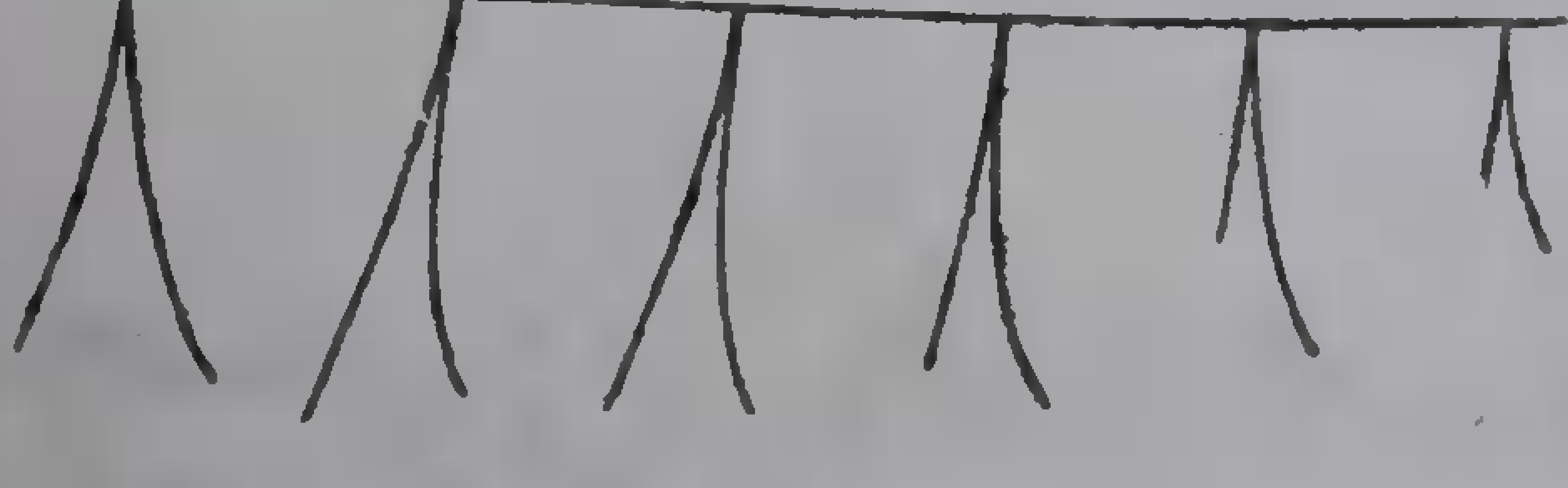
تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



شکل (۱۰)

اگر عقدہ سکڑ کر قرن بن جائے تو شکل ۱۰ کے طریق ن نَ اور ع عَ ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور اِن کے انطباق سے قرن طریق (شکل ۱۱) ج جَ بنتا ہے۔ اب ہمیں معلوم ہے کہ ن نَ شکل (۹) کے دو طریقوں (Loci) اأ اور ب بَ کے انطباق سے حاصل ہوا تھا، اِس لیے ج جَ فی الحقیقت تین طریقوں (Loci) کے انطباق سے حاصل ہوتا ہے اور اِس لیے ج ممیز میں اِس کی مساوات کا مکعب شامل ہوگا۔

شکل ۱۱ سے ظاہر ہے کہ قرن طریق عقدہ طریق کی طرح (بالعموم) تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



شکل (۱۱)

خلاصہ یہ ہے کہ ج ممیز میں

(۱) لفاف

(۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں

اور

(۳) قرن طریق تیسری قوت میں

کے شامل ہونے کی توقع کیجا سکتی ہے ۔

لفاف ایک نادر حل ہے لیکن عقدہ طریق اور قرن طریق (بالعموم)[1] (۶۹)
حل ہی نہیں ہوتے ۔

۵۸ ـ حسب ذیل مثالوں سے پچھلے نتیجوں کی وضاحت ہوگی ۔

مثال (۱) $ما = ع^{۲}$

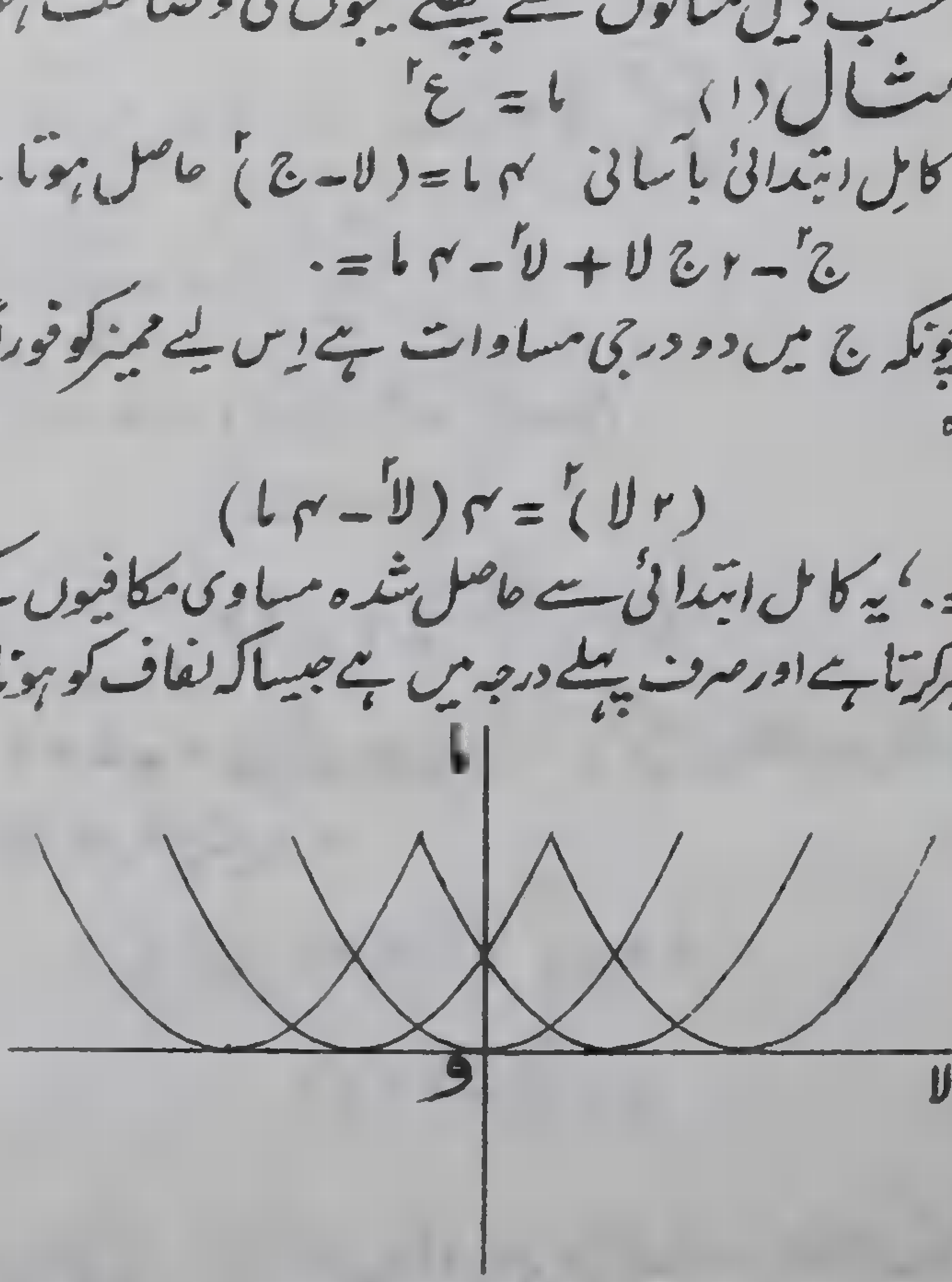
کامل ابتدائی بآسانی $۴ ما = (لا - ج)^{۲}$ حاصل ہوتا ہے

یعنے $ج^{۲} - ۲ ج لا + لا^{۲} - ۴ ما = ۰$

یہ چونکہ ج میں دو درجی مساوات ہے اِس لیے ممیز کو فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے چنانچہ وہ

$$(۲ لا)^{۲} = ۴ (لا^{۲} - ۴ ما)$$

ہے یعنے ما = ۰، یہ کامل ابتدائی سے حاصل شدہ مساوی مکافیوں کے قبیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے اور صرف پہلے درجہ میں ہے جیسا کہ لفاف کو ہونا چاہئے ۔



شکل (۱۲)

[1] ہم نے "بالعموم" لکھا ہے کیونکہ ممکن ہے کہ کسی خاص مثال میں عقدہ یا قرن طریق لفاف پر یا قبیل کے ایک منحنی پر منطبق ہو جائے ۔

مثال (۲) ۳ ما = ۳ ع لا - ۲ ع²/لا

پچھلے باب کے مطابق عمل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

۳ ع = ۲ ع + ۲ ع²/لا² + (۲ لا - ۴ ع/لا) فرع/فرلا

یعنی ع لا² - ۲ ع² = (۲ لا³ - ۴ ع لا) فرع/فرلا

یعنی لا² - ۲ ع = ۰ یا ع = ۲ لا فرع/فرلا ، .... (۱)

فرلا/لا = ۲ فرع/ع

(۷۰) ∴ لوک لا = ۲ لوک ع - لوک ج

∴ ج لا = ع²

∴ ۳ ما = ۲ ج^½ لا^(۳/۲) - ۲ ج

یعنی (۳ ما + ۲ ج)² = ۴ ج لا³ ، یہ نیم کعبی مکافیوں کا ایک قبیل ہے جن کے قرن محور ما پر ہیں۔

ج ممیز (۳ ما - لا³)² = ۹ ما²

یا لا³ (۶ ما - لا³) = ۰

ہے۔

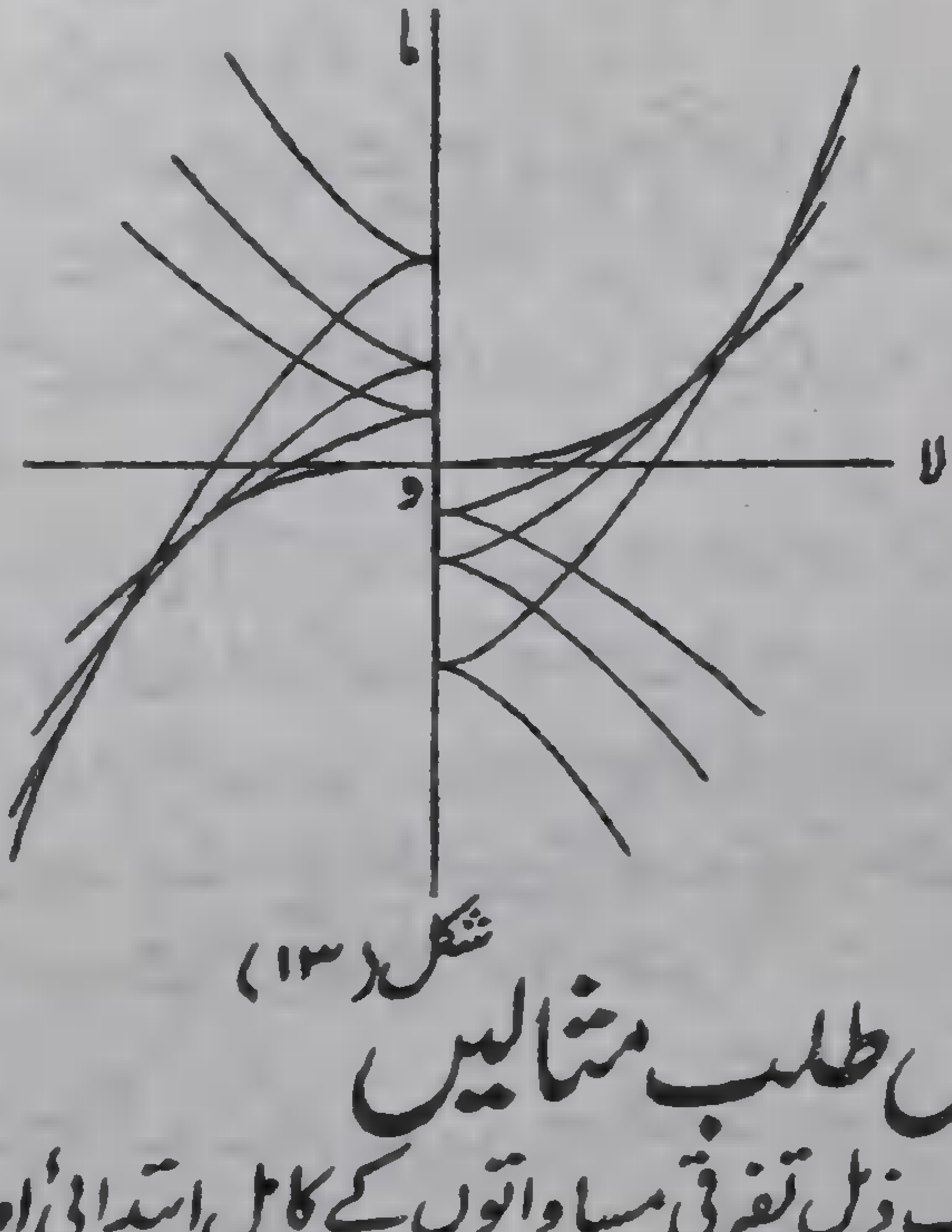
قرن طریق تیسری قوت میں ہے اور دوسرا جزو ضربی نفاف کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کی آسانی سے تصدیق ہوتی ہے کہ تفرقی مساوات کا ایک حل ۶ ما = لا³ ہے لیکن لا = ۰ (جس سے ع = ∞ حاصل ہوتا ہے) حل نہیں ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۱) میں سے پہلی مساوات کو لیں یعنی

$$\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{ع} = ۰$$

تو تفرقی مساوات میں ع کی بجائے اندراج کرنے سے

$$۳\,\text{ما} = \frac{۱}{۲}\,\text{لا}^{۳}$$

حاصل ہوگا یعنے لفافہ
اِس سے نادر حلوں کو معلوم کرنے کا دوسرا طریقہ ملتا ہے۔



شکل (۱۳)

حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے کامِل ابتدائی اور نادر حل (اگر موجود ہوں) معلوم کرو۔ مثالوں ۱ تا ۴ کی صورت میں ترسیمیں کھینچو۔

(۱) $۴\,\text{ع}^{۲} - ۹\,\text{لا} = ۰$ (۲) $۴\,\text{ع}^{۲}(\text{لا} - ۲) = ۱$

(۳) $\text{لاع}^{۲} - ۲\,\text{ماع} + ۴\,\text{لا} = ۰$ (۴) $\text{ع}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۱ = ۰$

(۵) $\text{ع}^{۲} + ۲\,\text{لاع} - \text{ما} = ۰$ (۶) $\text{لاع}^{۲} - ۲\,\text{ماع} + ۱ = ۰$

(۷) $۴\,\text{لاع}^{۲} + ۴\,\text{ماع} - ۱ = ۰$

(۷۱) **۵۹ — ع ممیز۔** اب ہم یہ غور کریں گے کہ کسی تفرقی مساوات کے

نادر حل کا مل ابتدائی کو معلوم کئے بغیر خود مساوات سے راست کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں ۔ مساوات

لا ع^{2} ۔ ما ع + ۱ = ۰

پر غور کرو ۔ اگر ہم لا اور ما کو کوئی محدود عددی قیمتیں دیں تو ع میں ایک دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے مثلاً اگر لا = ۲ ، ما = ۳ تو

۲ ع^{2} ۔ ۳ ع + ۱ = ۰ ،

ع = $\frac{1}{2}$ یا ۱

اِس طرح ہر نقطہ میں سے قبیل کے دو منحنی ہیں جو اِس مساوات کو پورا کرتے ہیں ۔ اِن دو منحنیوں کے مماس اُن سب نقطوں پر جہاں مساوات کی اصلیں ع میں، مساوی ہیں ایک ہی ہوں گے یعنے جہاں ممیز ما^{2} ۔ ۴ لا^{2} = ۰ ۔

یہ امور دو درجی ل ع^{2} + م ع + ن = ۰ کی صورت میں بھی درست ہیں جہاں ل، م، ن، متغیروں لا اور ما کے کوئی تفاعل ہیں ۔ مستوی کے ہر نقطہ میں سے دو منحنی گذرتے ہیں اور یہ منحنی، طریق م^{2} ۔ ۴ ل ن = ۰ کے تمام نقطوں پر، ایک ہی سمت رکھتے ہیں ۔

عام صورت میں تفرقی مساوات

ف (لا، ما، ع) ≡ ل$_{0}$ ع^{ن} + ل$_{1}$ ع$^{ن-1}$ + ل$_{2}$ ع$^{ن-2}$ + ... + ل$_{ن}$ = ۰

سے جہاں تمام ل، لا اور ما کے تفاعل ہیں لا اور ما کی قیمتوں کے کسی معلومہ زوج کے لیے ع کی ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اوران کے متناظر کسی نقطہ میں سے ن منحنی گذرتے ہیں ۔ اِن ن منحنیوں میں سے دو کے مماس اُس طریق کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتے ہیں جو ع کو

ف (لا، ما، ع) = ۰ ،

$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}$ = ۰ ،

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے کیونکہ یہی وہ شرط ہے جو مساوی اصلوں کی موجودگی کے لیے مساواتوں کے نظریہ کی کتابوں میں دیجاتی ہے۔

اِس طرح ہم ع ممیز پر پہنچتے ہیں اور اب ہم اُن طریقوں (Loci) کے خواص کی تحقیق کریں گے جو ع ممیز سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۶۰ – لفاف ۔ مساوات

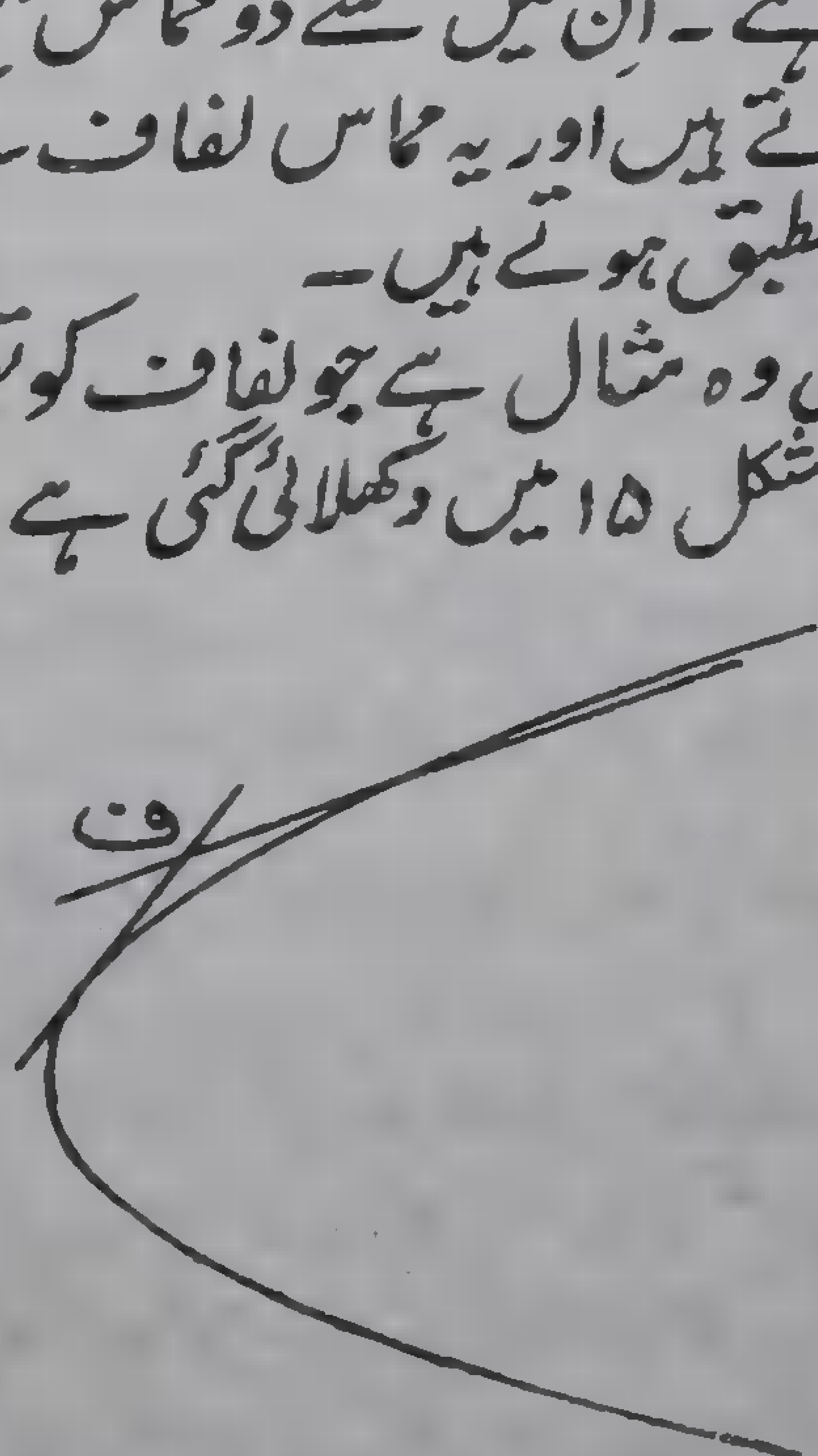
$$ما = ع لا + \frac{۱}{ع}$$

یا $$ع^۲ لا - ع ما + ۱ = ۰$$

کا ع ممیز $ما^۲ = ۴ لا$ ہے۔

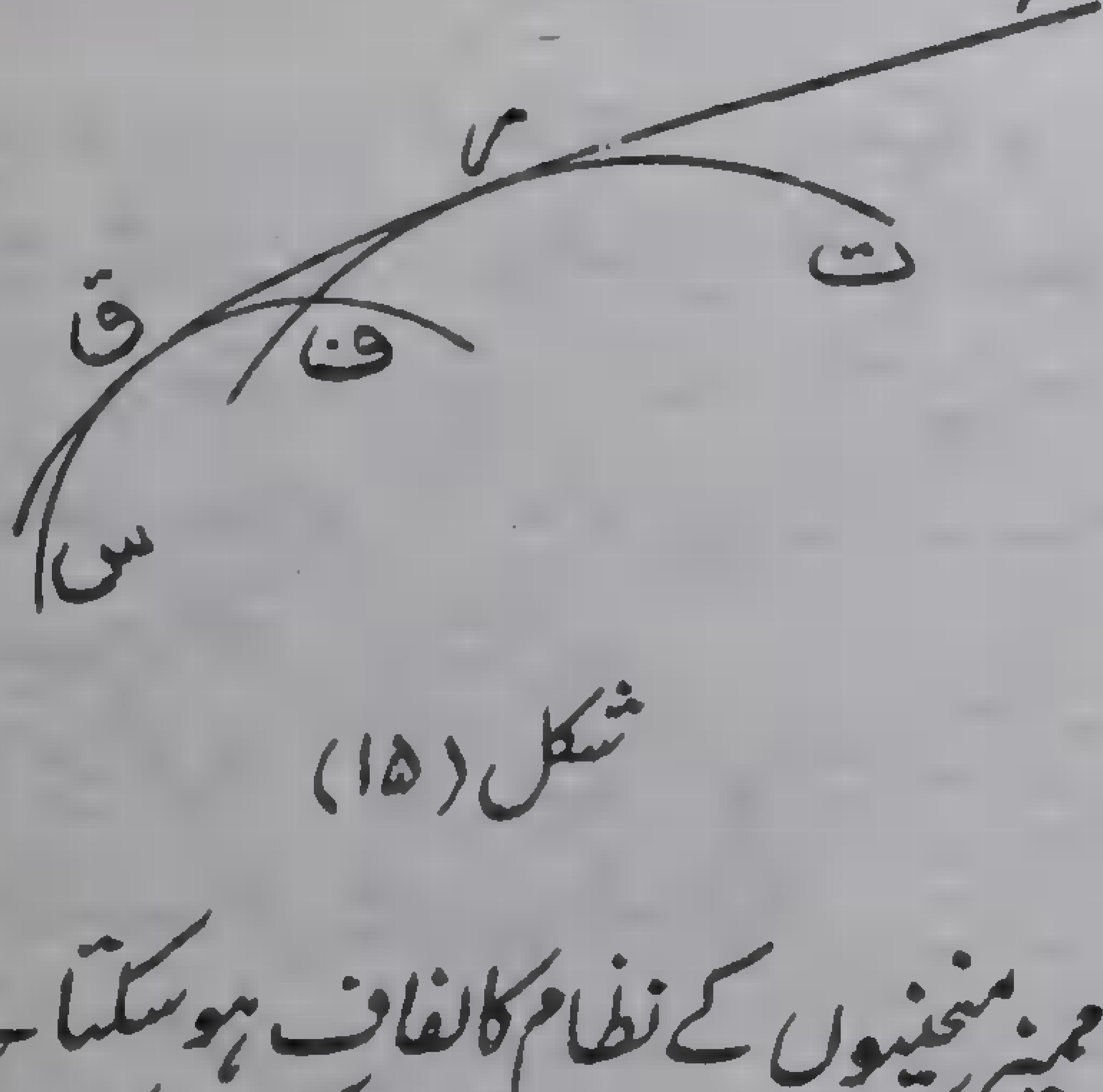
ہم دیکھ چکے ہیں کہ کامل ابتدائی مکافی کے مماسوں پر مشتمل ہوتا ہے اور وہ نادر حل ہے۔ اِن میں سے دو مماس مُستوی کے ہر نقطہ ف میں سے گذرتے ہیں اور یہ مماس لفاف کے نقطوں کے لیے ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

(۷۲) یہ ع ممیز کی وہ مثال ہے جو لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ اِسکی زیادہ عام صورت شکل ۱۵ میں دکھلائی گئی ہے۔



شکل (۱۴)

خیال کرو کہ منحنی س ق ف، منحنی ف ر ت پر منطبق ہونے کے لیے اوپر حرکت کرتا ہے لیکن ہمیشہ لفاف ق ر ع کے ساتھ تماس میں رہتا ہے۔ نقطہ ف، ر کی جانب اوپر حرکت کرے گا اور نقطہ ف میں سے گذرنے والے اِن دو منحنیوں کے مماس بالآخر ایک دوسرے پر اور اُس مماس پر جو لفاف کا ر پر ہے منطبق ہونگے۔ اس طرح ر ایک ایسا نقطہ ہے جس کے لیے نظام کے اِن دو منحنیوں کے ع منطبق ہوتے ہیں اور اِس لیے ع ممیز معدوم ہوتا ہے۔

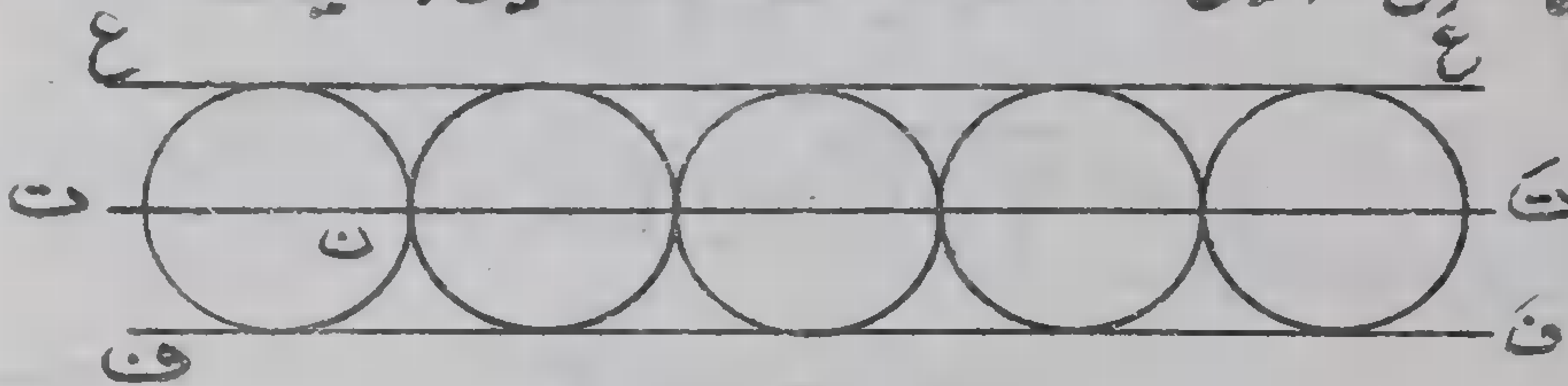


شکل (۱۵)

پس ع ممیز منحنیوں کے نظام کا لفاف ہو سکتا ہے اور اگر ایسا ہے تو وہ نادر حل ہے جیسا کہ دفعہ ۵۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے۔

۶۱ — طریق ۔ پس لفاف اُن نقطوں کا طریق ہوتا ہے جہاں قبیل کے دو متصلہ منحنی ع کی ایک ہی قیمت رکھتے ہیں۔ لیکن دو غیر متصلہ منحنیوں کا ایک دوسرے کو مس کرنا ممکن ہے۔ دائروں کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوی النصف قطر کے ہیں اور جن کے مرکز ایک خطِ مستقیم میں واقع ہیں۔ شکل ۱۶ سے واضح ہے کہ مرکزوں کا خط (۷۳)
دائروں کے زوجوں کے نقطہ تماس کا طریق ہے۔ اِس کو (tac-locus) طریق کہتے

ہیں۔ شکل ۱۷ میں وہ دائرے دکھائے گئے ہیں جو ٹھیک



شکل (۱۶)

طور پر مس تو نہیں کرتے لیکن متصلہ نقطوں کے زوجوں میں متقاطع ہوتے ہیں جو دو متصلہ طریقوں (Loci) اَ اَ، ب بَ پر واقع ہیں۔ جب ہم تماس کی انتہائی صورت پر پہنچتے ہیں تو یہ طریق (tac-locus) طریق ت تَ پر آ کر اس کے ساتھ منطبق ہو جاتے ہیں۔ اِس طرح ع ممیز میں طریق (tac-locus) کی مساوات کا مربع شامل ہوتا ہے۔



شکل (۱۷)

یہ واضح ہے کہ شکل ۱۶ میں نقطہ ن پر (tac-locus) طریق کی سمت اُن دو دائروں کی سمت نہیں ہے جو اِس نقطہ پر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ اِس لیے لا، ما، ع کے درمیان وہ رشتہ جس کو دائرے پورا کرتے ہیں (tac-locus) طریق سے پورا نہیں ہوگا جس میں لا اور ما تو وہی ہیں لیکن ف پر ع مختلف ہے۔ عام طور پر (tac-locus) طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوگا۔

۶۲ — پچھلے دفعہ کے دائرے مساوات

$$(لا + ج)^2 + ما^2 = ر^2$$

سے تعبیر ہوتے ہیں اگر مرکزوں کا خط و لا ہو۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ج} = \sqrt{\text{ر}^2 - \text{ما}^2}$$

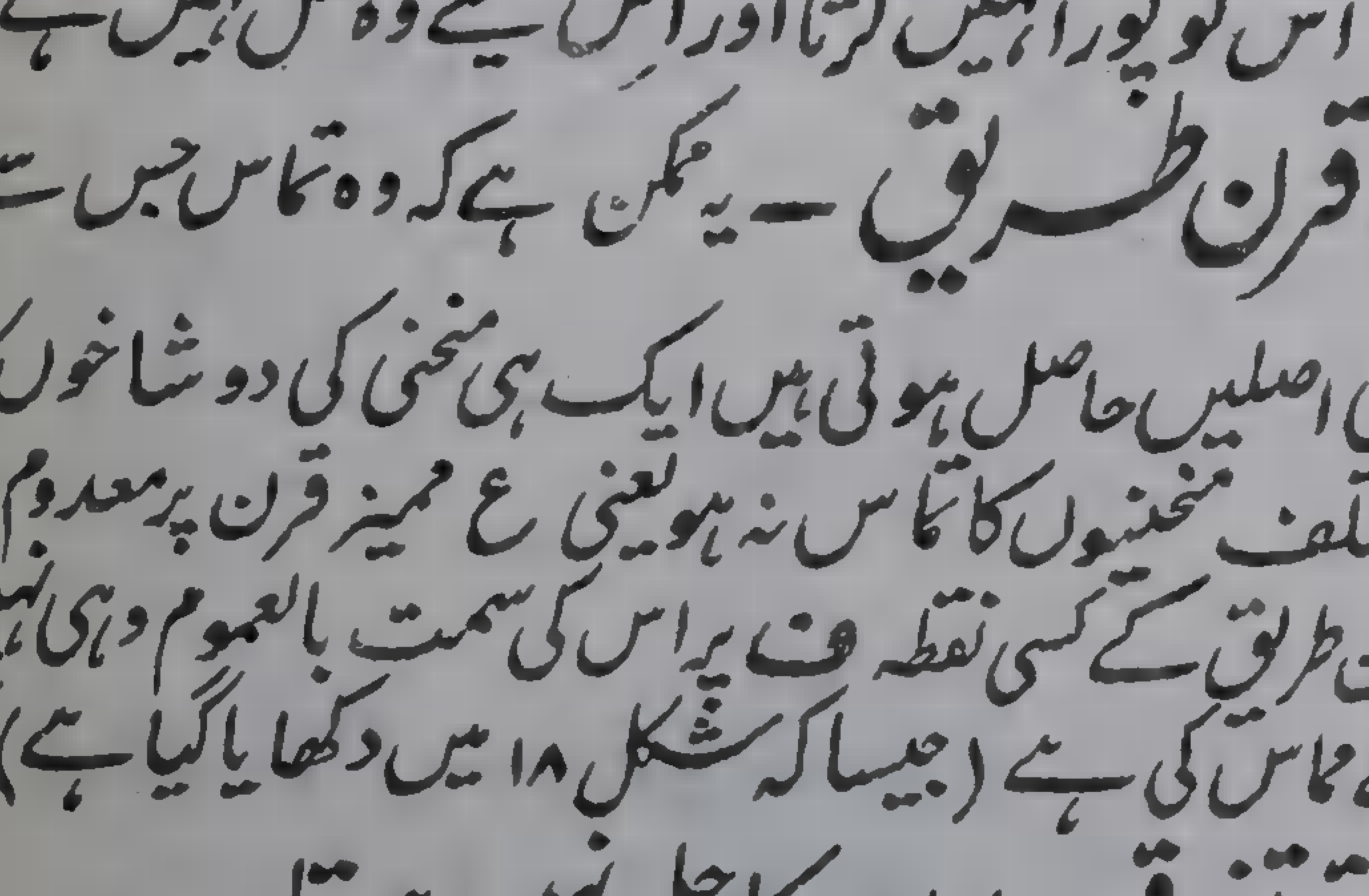
یا $$\text{ا} = -\,\text{ماع} \Big/ \sqrt{\text{ر}^2 - \text{ما}^2}$$

یعنی $$\text{ما}^2\text{ع}^2 + \text{ما}^2 - \text{ر}^2 = ۰$$

اِس کا ع ممیز $\text{ما}^2(\text{ما}^2 - \text{ر}^2) = ۰$ ہے۔

خط ما = ۰ (جو دوسری قوت میں ہے جیسے کہ توقع تھی) (tac-locus) طریق ہے اور ما = ± ر (شکل ۱۶ کے ع ع اور ف ف) لفاف ہیں۔ ما = ± ر جس سے ع = ۰ حاصل ہوتا ہے تفرقی مساوات کے نادر حل ہیں لیکن ما = ۰ اُس کو پورا نہیں کرتا اور اِس لیے وہ حل نہیں ہے۔

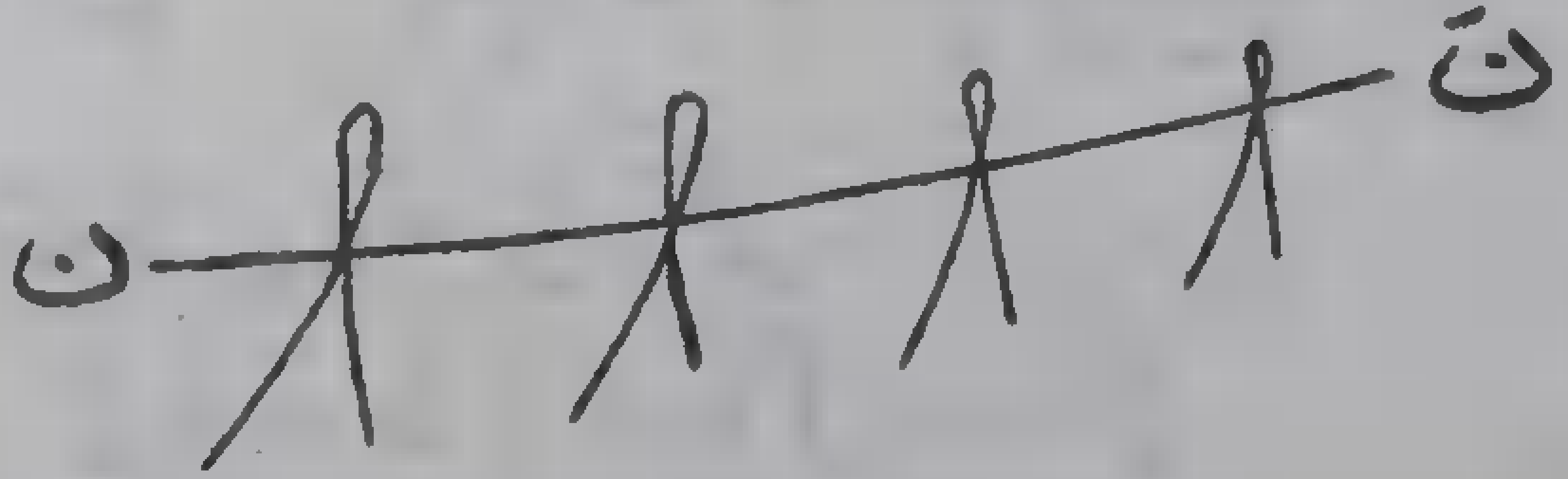
۶۳ — قرن طریق — یہ ممکن ہے کہ وہ تماس جس سے ع میں مساوی اصلیں حاصل ہوتی ہیں ایک ہی منحنی کی دو شاخوں کا تماس ہو اور دو مختلف منحنیوں کا تماس نہ ہو یعنی ع ممیز قرن پر معدوم ہوتا ہے (۴۷)
قرن طریق کے کسی نقطہ ف پر اس کی سمت بالعموم وہی نہیں ہوتی جو قرن پر کے مماس کی ہے (جیسا کہ شکل ۱۸ میں دکھایا گیا ہے) اسلئے قرن طریق تفرقی مساوات کا حل نہیں ہوتا۔



شکل (۱۸)

یہ دریافت کرنا فطری امر ہے کہ آیا قرن طریق کی مساوات ع ممیز میں

تیسری قوت کے ساتھ شامل ہوگی جیسا کہ وہ ج ممیز میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ اِس کا تصفیہ کرنے کے لیے ایسے نقطوں کے طریق پر غور کرو جن کے لیے دو ع، تقریباً مساوی ہیں اور بالکل مساوی نہیں ہیں۔ یہ شکل (۱۹) کا طریق ن نَ ہوگا۔



شکل (۱۹)

انتہا میں جبکہ عقدے قرنوں میں سکڑ جاتے ہیں تو قرن طریق حاصل ہوتا ہے اور چونکہ اِس صورت میں دو یا تین طریقوں (Loci) کے منطبق ہونے کا سوال نہیں ہے اس لیے ع ممیز میں قرن طریق کی مساوات صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے۔

۶۴ - نتیجوں کا خلاصہ - ع ممیز میں حسب ذیل طریق شامل ہوسکتے ہیں:

(۱) لفاف،

(۲) (tac-locus) طریق دوسری قوت میں،

(۳) قرن طریق

اور ج ممیز میں حسب ذیل طریق شامل ہو سکتے ہیں:

(۱) لفاف،

(۲) عقدہ طریق دوسری قوت میں،

(۳) قرن طریق تیسری قوت میں،

اِن میں سے صرف لفاف ہی تفرقی مساوات کا حل ہوتا ہے۔ (۷۵)

۶۵ - مثالیں

مثال (۱) ع²(۲ - ۳ ما)² = ۴(۱ - ما)

اِس کو شکل فرلا / فرما = ± (۲ - ۳ ما) / (۲ √(۱ - ما))

میں لکھ لینے سے کامل ابتدائی شکل

(لا - ج)² = ما²(۱ - ما)

میں فوراً حاصل ہوتا ہے

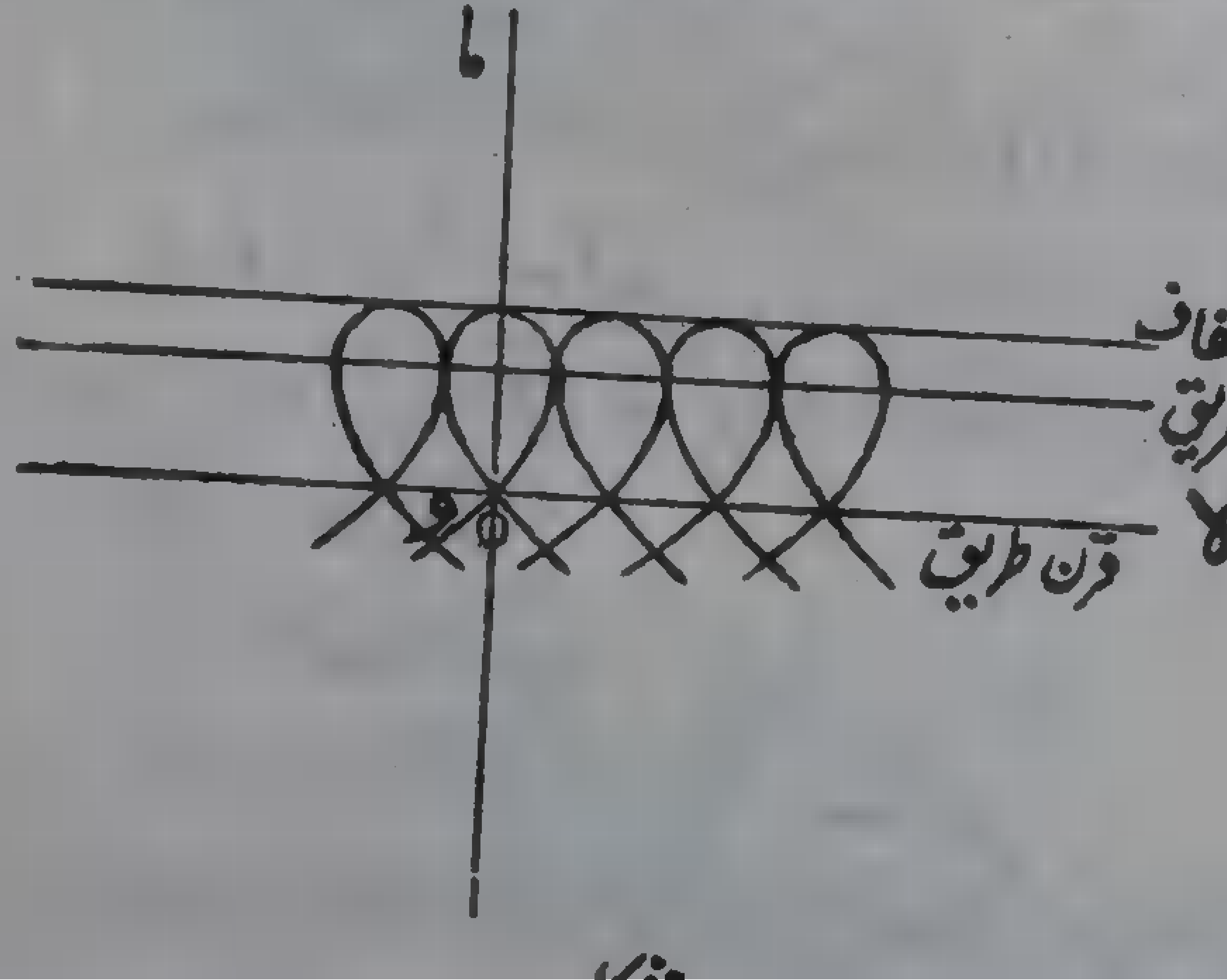
ج ممیز اور ع ممیز علی الترتیب

ما²(۱ - ما) = ۰ اور (۲ - ۳ ما)²(۱ - ما) = ۰

ہیں -

۱ - ما = ۰ جو دونوں ممیزوں میں پہلی قوت کے ساتھ شریک ہے لفاف ہے -
ما = ۰ جو ج ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے لیکن ع ممیز میں موجود ہی نہیں ہے عقدہ طریق ہے۔ ۲ - ۳ ما = ۰ جو ع ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیز میں موجود ہی نہیں ہے طریق (tac-locus) ہے -

اِس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ اِن تین طریقوں (Loci) میں صرف لفاف کی مساوات ہی تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے -



مثال (۲) دائروں کے قبیل

لا² + ما² + ۲ ج لا + ۲ ج² - ۱ = ۰

پر غور کرو۔

ج کو (پہلے باب کے طریقوں سے) ساقط کرنے پر تفرقی مساوات

۲ ما² ع² + ۲ لا ما ع + لا² + ما² - ۱ = ۰

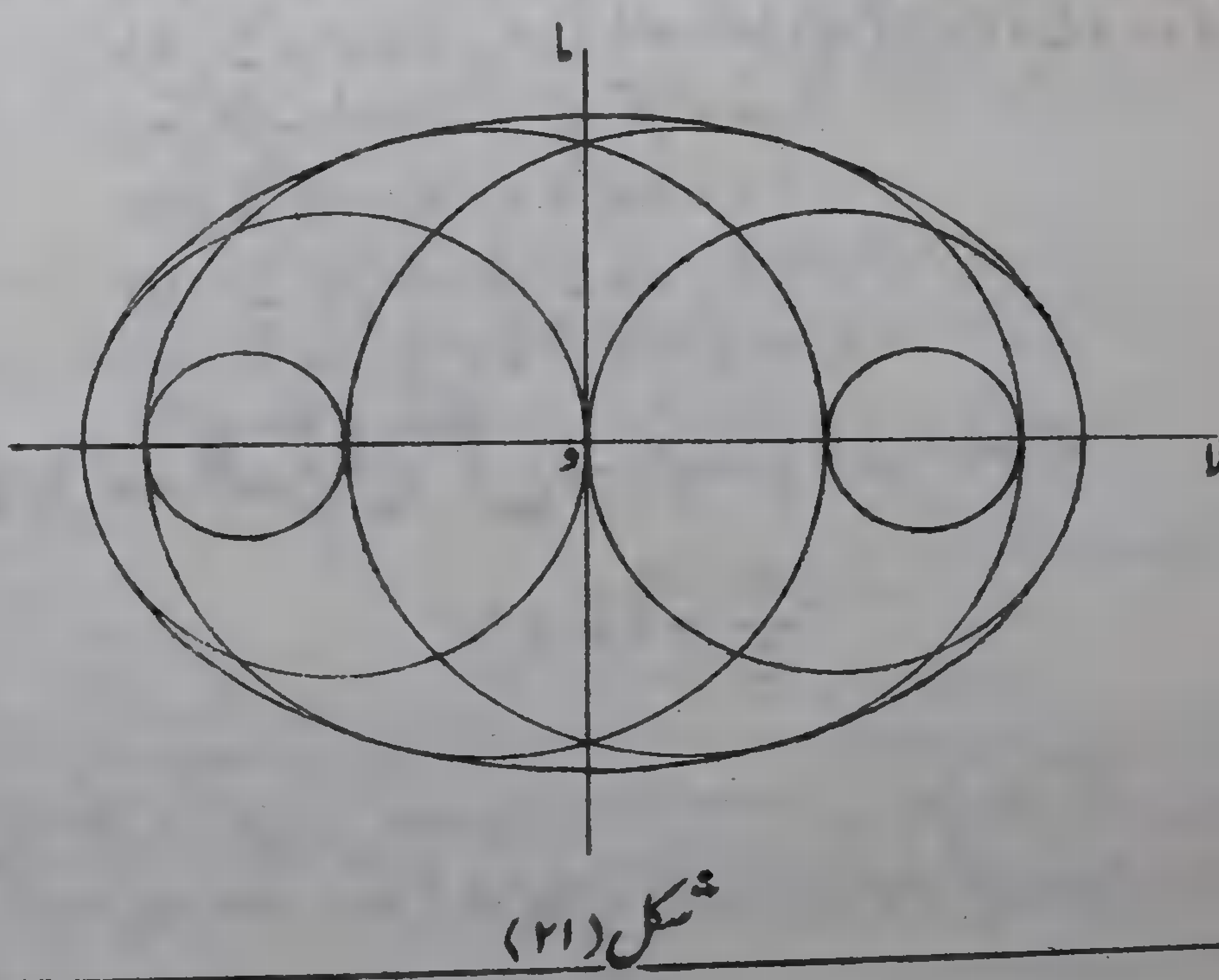
حاصل ہوتی ہے۔

ج اور ع ممیز علی الترتیب حسب ذیل ہیں: ۷۶)

لا² - ۲ (لا² + ما² - ۱) = ۰ اور لا² ما² - ۲ ما² (لا² + ما² - ۱) = ۰

یعنے لا² + ۲ ما² - ۲ = ۰ اور ما² (لا² + ۲ ما² - ۲) = ۰

لا² + ۲ ما² - ۲ = ۰ سے جو دونوں ممیزوں میں پہلے درجہ میں ہے لفاف حاصل ہوتا ہے. ما = ۰ سے (tac-locus) طرقی حاصل ہوتا ہے کیونکہ وہ ع ممیز میں دوسری قوت کے ساتھ شریک ہے اور ج ممیز میں موجود ہی نہیں ہے۔



شکل (۲۱)

وہ دائرہ جو ابتدائی مساوات سے حاصل ہوتا ہے لفافے کو نقطوں

(-۲ ج ، ± √(۱-۲ ج^۲))

پر مس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج عددا ۱/۲ √۲ سے بڑا ہو۔

حل طلب مثالیں۔

حسب ذیل مثالوں میں کامل ابتدائی معلوم کرو اگر تفرقی مساوات دی گئی ہے یا تفرقی مساوات معلوم کرو اگر کامل ابتدائی دیا گیا ہے۔ نیز نادر حل (اگر موجود ہوں) معلوم کرو۔ ترسیمیں کھینچو۔

(۱) ۴ لا (لا - ۱) (لا - ۲) ع^۲ - (۳ لا^۲ - ۶ لا + ۲)^۲ = ۰،

(۲) ۴ لا ع^۲ - (۳ لا - ۱)^۲ = ۰، (۳) ما ع^۲ - ۲ لا ع + ما = ۰،

(۴) ۳ لا ع^۲ - ۶ ما ع + لا + ۲ ما = ۰،

(۵) ع^۲ + ۲ ع لا^۲ - ۴ لا^۲ ما = ۰، (۶) ع^۳ - ۴ لا ما ع + ۸ ما^۲ = ۰،

(۷) لا^۲ + ما^۲ - ۲ ج لا + ج^۲ جم^۲ عہ = ۰،

(۸) ج^۲ + ۲ ج ما - لا^۲ + ۱ = ۰

(۹) ج^۲ + (لا + ما) ج + ۱ - لا ما = ۰،

(۱۰) لا^۲ + ما^۲ + ۲ ج لا ما + ج^۲ - ۱ = ۰

۶۶ - کلیرو[1] کی شکل۔ ہم نے یہ باب مساوات

ما = ع لا + ۱/ع

---

[1] الکزز کلاڈ کلیرو (Alexis Claude Clairaut) (پیرس کا، سنہ ۱۷۱۳ تا سنہ ۱۷۶۵ع) اگرچہ تفرقی مساواتوں کے سلسلہ میں بہت مشہور ہے لیکن خصوصاً علم ہیئت پر اس نے بہت کچھ لکھا ہے

(۷۷) سے شروع کیا تھا جو کلیرو کی شکل

ما = ع لا + ف (ع) .... (۱)

کی ایک مخصوص صورت ہے ۔ کلیرو کی اس عام مساوات کو حل کرنے کے لیے اس کو لا کے لحاظ سے تفرق کرو تو

ع = ع + { لا + فَ (ع) } فرع/فرلا

∴ فرع/فرلا = ۰ ، عَ = ۰ .... (۲)

یا ۰ = لا + فَ (ع) .... (۳)

(۱) اور (۲) سے کامل ابتدائی

ما = ج لا + ف (ج) .... (۴)

حاصل ہوتا ہے جو خطوطِ مستقیم کا ایک قبیل ہے ۔

اگر ہم (۱) اور (۳) سے ع کو ساقط کریں تو صرف ر ع ممیز ملیگا ۔ ج ممیز کو معلوم کرنے کے لیے ہم ج کو (۴) اور اس نتیجہ سے ساقط کرتے ہیں جو (۴) کو ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

۰ = لا + فَ (ج) .... (۵)

مساواتیں (۴) اور (۵) مساواتوں (۱) اور (۳) سے صرف اس امر میں مختلف ہیں کہ ع کی بجائے ج ہے ۔ اس لیے حاصل اسقاط وہی ہیں ۔ اس لیے دونوں ممیز لفاف کو تعبیر کرنے چاہئیں[۱] ۔

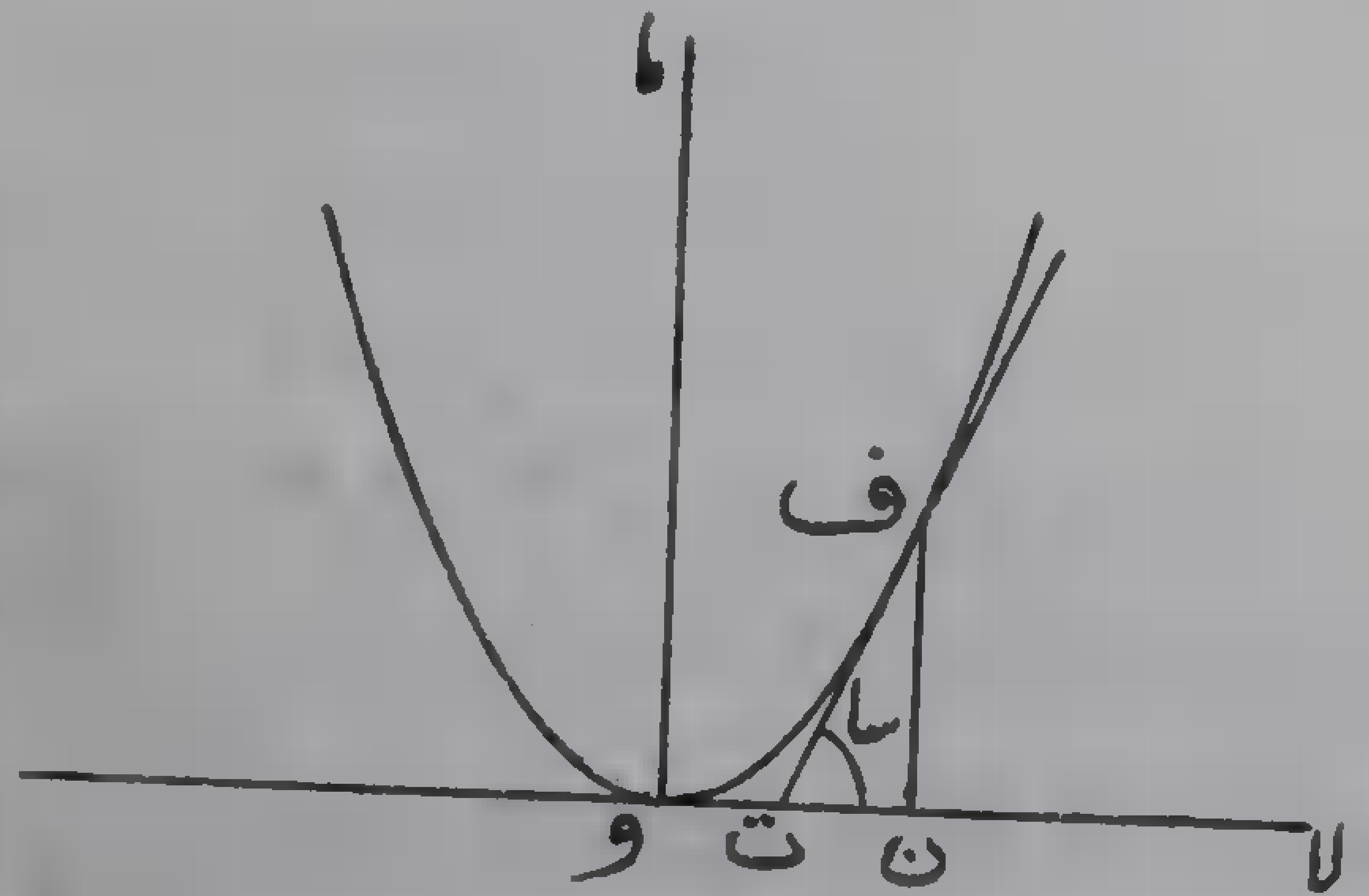
ظاہر ہے کہ خطوطِ مستقیم کا کوئی قبیل عقدہ طریق یا قرن طریق یا طریق نہیں رکھ سکتا (tac-locus) ۔

مساوات (۴) سے یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ کلیرو کی شکل کی

[۱] لیکن بعض صورتوں میں ممیز صرف لفاف ہی کو نہیں بلکہ اس کے انعطافی مماسوں کو بھی تعبیر کرتے ہیں (دفعہ ۱۶۱)

کسی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی کو ع کی بجائے صرف ج لکھ کر فوراً لکھ لیا جا سکتا ہے -

۶۷ - مثال - وہ منحنی معلوم کرو کہ وت ایسا بدلے جیسے مس سا جہاں ت وہ نقطہ ہے جس پر منحنی کے کسی نقطہ کا مماس محور لا کو قطع کرتا ہے اور محور لا کے ساتھ اس کا میلان سا ہے اور و مبداء ہے -



شکل (۲۲)

شکل سے وت = ون - ت ن (۶۸

= لا - ما تم سا

= لا - ما/ع ، کیونکہ مس سا = ع

اِس لیے لا - ما/ع = ک ع

یعنے ما = ع لا - ک ع²

اِس کی شکل کلیرو کی ہے، اِس لیے کامل ابتدائی

ما = ج لا - ک ج²

ہے اور نادر حل اِس کا ممیز ہے یعنے

لا۲ = ۴ ک ما

مطلوبہ منحنی وہ مکافی ہے جو اِس نادر حل سے تعبیر ہوتا ہے - کامل ابتدائی خطوطِ مستقیم کے اُس قبیل کو تعبیر کرتا ہے جو اِس مکافی کے مماس ہیں -

حل طلب مثالیں

حسب ذیل تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو - مثالوں (۱)، (۲)، (۴)، (۷)، (۸) اور (۹) میں ترسیمات کھینچو -

(۱) ما = ع لا + ع۲   (۲) ما = ع لا + ع۳

(۳) ما = ع لا + جم ع   (۴) ما = ع لا + √(ا۲ ع۲ + ب۲)

(۵) ع = لوک (ع لا - ما)   (۶) جب ع لا جم ما = جم ع لا جب ما + ع

(۷) اُس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو کہ مماس محددوں کے محوروں کے ساتھ مستقل رقبہ ک۲ کا مثلث بنائے، اور اِس لیے منحنی کی مساوات صحیح شکل میں معلوم کرو -

(۸) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس محوروں پر جو مقطوعے قطع کرے اُن کا مجموعہ مستقل ہو -

(۹) وہ منحنی معلوم کرو کہ مماس کا وہ حصہ جو محوروں کے درمیان منقطع ہو مستقل طول کا ہو -

۰۷ (ا) - تفرقی مساواتوں کی ایسی مثالیں دینا مشکل نہیں ہے جن میں کامل ابتدائی حقیقت میں کامل نہیں ہوتے اور تکمیلی حل لفاف کے مفہوم میں نادر حل نہیں ہوتے - فرض کرو کہ ایک تفرقی مساوات

ف (لا، ما) فرلا + ق (لا، ما) فرما = ۰

دی گئی ہے جس میں مساوات کی دائیں طرف کا جملہ متماثلاً و (لا، ما) × فر ع (لا، ما) کے مساوی ہے - تب کامل ابتدائی ع (لا، ما) = ج کے

علاوہ ۵ (لا، ما) = ۰ بھی اِس تفرقی مساوات کا حل ہے۔ اب ہم اُس ربط پر جو کامل ابتدائی اور تکمیلی حل کے درمیان ہے مثالوں کی مدد سے بحث کریں گے اور پھر ایک عام مسئلہ بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ پہلی مثال کے طور پر ہم تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۱ - \text{ما}^{۲}$$

کو لیتے ہیں۔ تکمل کا معمولی طریقہ یہ ہے کہ متغیروں کو جدا کیا جائے چنانچہ اِس طرح

$$\text{فر لا} = \frac{\text{فر ما}}{۱ - \text{ما}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱ - \text{ما}} + \frac{۱}{۱ + \text{ما}}\right)\text{فر ما}$$

حاصل ہوتا ہے اور اِس لیے

$$\text{لا} + \text{ج} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{۱ + \text{ما}}{۱ - \text{ما}}$$

اور

$$\text{ما} = \text{مسنر}(\text{لا} + \text{ج})$$ ، کامل ابتدائی

لیکن متغیروں کو جدا کرنے میں جزو ضربی $(۱ - \text{ما}^{۲})$ سے تقسیم کرنا پڑتا ہے جو جائز نہیں ہے اگر یہ جزو ضربی صفر ہو۔ پس آخری نتیجہ میں ما = ±۱ کا امکان نہیں ہے جس سے دو ایسے حل حاصل ہوتے ہیں جو کامل ابتدائی میں شریک نہیں ہیں۔ ممکن ہے یہ فرض کرلیا جائے کہ یہ حل نادر حل ہیں لیکن اگر نادر حل کی یہ تعریف کی گئی ہو کہ وہ ایسا حل ہے جو ممیزوں (یہ اصطلاح منحنیوں کے اُس قبیل کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیجائیگی جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں) کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے تو یہ دو زائد حل نادر حل نہیں ہیں۔ وہ ممیزوں کے مشترک متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں اوراُن کا کوئی لفاف نہیں ہے۔ یہ یاد ہوگا کہ لفاف کی یہ تعریف کیجاتی ہے کہ وہ ایک ایسا منحنی ہے جو منحنیوں کے ایک قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے ایک رکن سے مس ہوتا ہے۔

میں لکھا جا سکتا ہے۔ جزو ضربی $(ما-۱)^{\frac{۱}{۲}}$ سے نادر حل حاصل ہوتا ہے لیکن یہ جزو ضربی ایک ایسے قوت نما میں وقوع پذیر ہوا ہے جو صفر اور ۱ کے درمیان ہے۔ جزو ضربی ما جس سے بقیہ ابتدائی حاصل ہوتا ہے ایسے قوت نما کے ساتھ واقع ہے جو ۱ ہے۔ اِس سے سادہ مثال $\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ما^{ن}$ میں (جہاں ن > ۰)

$$(۱-ن)(لا+ج) = ما^{۱-ن}،\ اگر\ ن \neq ۱$$

$$اور\ لا+ج = لوک\ ما،\ اگر\ ن = ۱$$

حاصل ہوتے ہیں۔ ما = ۰ ہمیشہ ایک تکملہ ہے لیکن وہ ایک بقیہ ابتدائی ہے جو ج = -∞ لینے سے جبکہ ن > ۱ ماخوذ کیا گیا ہے، لیکن اگر ن < ۱ تو ما = ۰ ایک نادر حل ہے (لفاف کے مفہوم میں) اِس سے $\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = گ(ما)$ کے لیے ایک متناظر مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر گ (ما) میں جزو ضربی $(ما-۱)^{ن}$ کی موجودگی کی وجہ سے گ (۱) معدوم ہو تو ما = ۱ ایک بقیہ ابتدائی ہوگا اگر ن ≥ ۱۔ لیکن وہ ایک نادر حل ہوگا اگر ن < ۱-

۰۶ (ب)۔ بقیہ ابتدائیوں سے جو متقارب تعبیر ہوتے ہیں اُن کا خطی ہونا ضروری نہیں ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہلی مثال $\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ۱ - ما^{۲}$ میں ما کی بجائے $ما - لا^{۲}$ رکھ کر اس کو مستحیل کرتے ہیں۔ اس سے

$$\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ۱ + ۲لا - لا^{۴} + ۲لا^{۲}ما - ما^{۲}$$

حاصل ہوتا ہے اور کامل ابتدائی

$$ما = لا^{۲} + مسنز(لا+ج)$$

ہے۔ بقیہ ابتدائی $ما = لا^{۲} \pm ۱$، ممیزوں کے مشترک مکانی متقاربوں کو

تعبیر کرتا ہے۔

عام طور پر ہم ما کی بجائے ما۔ف (لا) رکھ سکتے ہیں اور وہ شرطیں بیان کر سکتے ہیں کہ اس سے تفرقی مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = گ (لا، ما) کا بقیہ ابتدائی حاصل ہو یا نادر حل۔ لیکن زیادہ عام مساوات

ف (لا، ما) فرلا + ق (لا، ما) فرما = و (لا، ما) × فرع (لا، ما) = ۰

پر بحث کرنا زیادہ مناسب ہے۔ حل و (لا، ما) = ۰ مختلف قسموں کا ہو سکتا ہے۔ اولاً فرض کرو کہ جزئی مشتق $\text{ع}_{\text{لا}}$، $\text{ع}_{\text{ما}}$ میں سے ایک یا دونوں لامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ و = ۰۔ اگرچہ خود ع اور و $\text{ع}_{\text{لا}}$ (= ف) اور و $\text{ع}_{\text{ما}}$ (= ق) سب محدود رہتے ہیں۔ تب و = ۰ ایک نادر حل ہوگا جو ایک لفاف کو تعبیر کریگا۔ مثلاً

$$\text{فرلا} + \{1 + (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}}\}\,\text{فرما} = 0$$

کو شکل

$$(\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}} \times \text{فر}\{\text{ما} + 2(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}}\} = 0$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور اس سے کامل ابتدائی

$$\text{ما} + 2(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}} = 0$$

اور نادر حل

$$\text{لا} + \text{ما} = 0$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یہ نامکمل مکافی ہیں جن میں سے ہر ایک اس نقطہ پر اچانک ختم ہو جاتا ہے جہاں وہ لفاف کو مس کرتا ہے کیونکہ (لا+ما) منفی نہیں ہو سکتا اگر $(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}}$ حقیقی ہے۔ غائب حصے $\text{ما} - 2(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{1}{2}} = \text{ج}$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ لیکن اس کے بہت ہی مشابہ تفرقی مساوات

اِس تعریف کے دوسرے حصہ کی رُو سے مشترک متقارب خارج از بحث ہو جاتا ہے کیونکہ وہ قبیل کے ہر رکن سے صرف ایک نقطہ پر مس ہوتا ہے یعنے اُس نقطہ پر جو لاتناہی پر ہے۔ پس یہ دو زائد حل اُسی نوعیت کے ہیں جو کامل ابتدائی میں شامل رہتے ہیں' اِس لئے اگر ہم خالص منطقی نقطۂ نظر سے دیکھیں تو اُس کو بجا طور پر غیر کامل کہہ سکتے ہیں۔ لیکن اگر ما = سنر (لا + ج) دیا گیا ہو تو ہم ج = ± ∞ لیکر ما = ± ۱ ماخوذ کر سکتے ہیں۔ اِس کا یہ مطلب ہے کہ جب' ج بہت بڑا ہوتا ہے تو اوپر کا متقارب' ما = سنر (لا + ج) کے اُس حصہ کے بہت قریب ہوتا ہے جو مبداء کے نزدیک ہے۔ متناظر نتیجہ نیچے کے متقارب کے لیے درست ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ اِس مثال میں بقیہ ابتدائی (Residual Primitive) کامل ابتدائی کی دو انتہائی شکلوں سے بنا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اختیاری مستقل کی شکل میں بظاہر خفیف تبدیلی اِس امر کا باعث ہو سکتی ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک انتہائی شکل شامل کیجائے مثلاً اگر اوپر کے عمل تکمل میں ہم ج کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ لوگ ک رکھیں تو $\frac{۱ + ما}{۱ - ما} = ک \, قو^{۲لا}$ حاصل ہوتا ہے اور ک = ۰ سے حل ما = -۱ ملتا ہے۔ لیکن ک = ۰' ج = -∞ کے معادل ہے' پس دوسری شکل میں بھی وہی منطقی شکل پیش ہوتی ہے جو پہلی شکل میں تھی۔ وہ رفع نہیں ہوئی' صرف پوشیدہ ہے۔

ذرا کم واضح مثال ما = مس (لا + ج) ہے جو تفرقی مساوات

$$\frac{فر ما}{فر لا} = ۱ + ما^{۲}$$

سے حاصل ہوئی ہے۔ بقیہ ابتدائی $۱ + ما^{۲} = ۰$ ہے۔ پہلی نظر میں یہ خیال ہو سکتا ہے کہ ممیزوں کے کوئی مشترک متقارب نہیں ہیں لیکن ایسا نہیں ہے۔ متقارب حسب سابق موجود ہیں' صرف وہ خیالی ہیں اور خیالی ممیزوں سے ماخوذ ہوتے ہیں۔ ما = ± خر کو ما = مس (لا + ج) کی

انتہائی شکل کے طور پر حاصل کرنے کے لیے ج کی بجائے خ ر ک رکھو جہاں ک حقیقی ہے اور پھر ک = ± ∞ لو - یہ عمل بالکل جائز ہے - تفرقی مساواتوں کے ابتدائی اپنی عمومیت کھو دیتے ہیں اگر اختیاری مستقلوں کو تمام قیمتیں اختیار کرنے نہ دیا جائے خواہ یہ قیمتیں حقیقی ہوں یا خیالی یا ملتف -

ایک تیسری مثال تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}^{3} - \text{ما}^{2}$$

سے پیدا ہوتی ہے جس کا کامل ابتدائی ما = قط^{2} $\frac{1}{2}$ (لا + ج) اور بقیہ ابتدائی ما = ۰ ہے - بقیہ ابتدائی اب ایک حقیقی خط ہے جو خیالی ممیزوں کا ایک مشترک متقارب ہے - اس کو ج کی بجائے خ ر ک رکھ کر اور پھر ک = ± ∞ لیکر اخذ کیا جا سکتا ہے - ایک نادر حل ما = ۱ بھی ہے جو لفاف کو تعبیر کرتا ہے - یہ مثال کچھ مباحثہ کا موضوع رہی ہے - ر ع ممیز ما^{2} = ما^{3} ہے اور اگر ہم نادر حل کی یہ تعریف کریں جیسا کہ بعض مصنفوں کا خیال ہے کہ وہ ایسا حل ہے جو ع ممیز کو معدوم کرتا ہے تو ما = ۰ کو نادر حل کے طور پر خیال کیا جا سکتا ہے - پہلی دو تفرقی مساواتوں میں جو پہلے رتبہ کی ہیں کوئی ع ممیز موجود نہیں ہے - اس لیے بقیہ ابتدائی کو ان سے حاصل نہیں کیا جا سکتا - چونکہ ان تمام تین مثالوں میں بقیہ ابتدائی ایک ہی نوعیت کے ہیں کیونکہ وہ مشترک متقاربوں کو تعبیر کرتے ہیں اس لیے نادر حل کی وہ تعریف جو لفاف سے متعلق ہے قابل ترجیح معلوم ہوتی ہے - دوسری تعریف میں بلاشبہ بیان کا اختصار اور سادگی موجود ہے لیکن اس میں بعض لازمی ہندسی اختلافوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے -

حسب ذیل مثال سے ایک دوسرے اہم امر کا اظہار ہوتا ہے - تفرقی مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \pm\, \text{ما}\,(\text{ما} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{فرلا} + \left\{ ۱ + (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}} \right\} \text{فرما} = ۰$$

کے ممیز اوپر کی طرح اچانک ختم نہیں ہو جاتے۔ اِس کا کامِل ابتدائی

$$\text{ما} + \frac{۳}{۲}(\text{لا} + \text{ما})^{\frac{3}{2}} = \text{ج}$$

اور نادر حل　　$\text{لا} + \text{ما} = ۰$

ہے۔

$$\text{لافرلا} + \left\{ \text{ما} + (\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲})^{\frac{1}{2}} \right\} \text{فرما} = ۰$$

کی صورت میں نادر حل $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۰$ ہے، اِس کو صرف تنہا نقطہ (۰، ۰) کی بجائے یہ سمجھنا چاہیے کہ وہ نا مکمل مکافیوں

$$\text{ما} + (\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲})^{\frac{1}{2}} = ۰$$

کے دو خیالی لفافوں $\text{ما} = \pm \text{خ}\,\text{لا}$ کو تعبیر کرتا ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ و = ۰ سے خود ع بھی لامتناہی ہو جاتا ہے اور $\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{ع}_{\text{ما}}$ میں سے ایک یا دونوں بھی لامتناہی ہو جاتے ہیں لیکن $\text{و}\,\text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{و}\,\text{ع}_{\text{ما}}$ محدود رہتے ہیں۔ تب و = ۰ سے کامِل ابتدائی کی ایک انتہائی شکل حاصل ہو گی جو اختیاری مستقل کی لامتناہی قیمت کے متناظر ہوگی۔

مثالاً

$$\text{فرلا} + \left\{ ۱ + (\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}} \right\} \text{فرما} \equiv (\text{لا} + \text{ما})^{\frac{1}{2}} \times \text{فر}\left\{ \text{ما} - ۲(\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}} \right\} = ۰$$

سے کامِل ابتدائی

$$\text{ما} - ۲(\text{لا} + \text{ما})^{-\frac{1}{2}} = \text{ج}$$

حاصل ہوتا ہے اور $\text{لا} + \text{ما} = ۰$، ممیزوں کے مشترک متقارب کو تعبیر

کرتا ہے۔

ثالثاً ع، ع$_{لا}$، ع$_{ما}$ سب محدود ہو سکتے ہیں جبکہ و = ۰ ۔

اِس صورت میں حل و = ۰ سے ف اور ق دونوں معدوم ہوتے ہیں اور اِس کا میزوں کے ساتھ کسی قسم کا ہندسی تعلق رکھنا ضروری نہیں ہے۔ ایسے حل کو حقیر (Trivial) کہا جا سکتا ہے۔ مثلاً

(لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$ فرلا + ۲ (لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$ ما فرما = ۰

سے کامل ابتدائی لا - ما^{2} = ج

اور حقیر حل لا + ما = ۰

حاصل ہوتے ہیں۔ اِس تفرقی مساوات کے متعلق یہ سمجھنا مناسب ہے کہ وہ، سادہ تفرقی مساوات فرلا - ۲ ما فرما = ۰ اور جبری مساوات (لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$ = ۰ کے اتحاد سے پیدا ہوئی ہے۔ حقیر حل مخالف شرکا کے ایسے اتحادوں کا ناخواستہ نتیجہ ہوتے ہیں۔ اب ہم وہ شرطیں بیان کریں گے جن سے ایسے حل خارج ہو جائیں گے اور ہم نادر حلوں اور انتہائی شکلوں میں تمیز کر سکیں گے۔ مساوات و (لا، ما) = ۰ کی بجائے اِس سے زیادہ سادہ مساوات ما = ف (لا) پر غور کرنا موجب سہولت ہوگا، یہ مساوات و = ۰ کے نتیجوں میں سے ایک ہے۔ دوسرے نتیجوں پر جداگانہ بحث کی جا سکتی ہے۔ ذیل میں ہم صرف اُس صورت پر غور کریں گے جس میں ف (لا) حقیقی ہے کیونکہ مسئلہ ایک ایسی شکل میں ہے جو صرف اُس وقت اطلاق پذیر ہو سکتا ہے جبکہ تمام خیالی اعداد خارج ہوں۔

فرض کرو کہ زیرِ بحث علاقہ میں ف (لا، ما) اور ق (لا، ما) واحد القیمت محدود اور مسلسل (ممکن ہے ایک ہی جانب جیسا کہ جذر المربعوں اور دوسرے تفاعلوں کی صورت میں ہوتا ہے جو دلیل کی منفی قیمتوں کے لیے خیالی ہو جاتے ہیں) تفاعل ہیں اور

ط = ما - ف (لا) = ۰

کے عین قریب (ممکن ہے ایک ہی جانب) اِن کی علامت مستقل ہے۔ ف اور ق دونوں کو صفر نہیں ہونا چاہئے جبکہ ط = ۰ - (اگر ابتداً یہ شرط پوری نہ ہو تو ایک مناسب جزو ضربی سے تقسیم کر کے ہمیشہ اُن کو ایسا بنایا جا سکتا ہے)۔ تب اگر ف + ق فَ (لا) میں ما کی بجائے ط + ف (لا) رکھنے سے نتیجہ ع (لا، ط) حاصل ہو تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط = ۰ ایک نادر حل ہو یہ ہیں کہ ع (لا، ۰) = ۰ اور ∫ ف ط / ع (لا، ط) اپنی زیریں حد پر زیر بحث علاقہ میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہو۔ اگر صرف پہلی شرط پوری ہو تو تکملہ ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہو گا جو کامل ابتدائی سے مستقل کو ایک خاص قیمت (ممکن ہے لاتناہی) دیکر حاصل کیا جا سکیگا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلہ پوائسن کے زمانہ سے ہے کیونکہ اُس نے اِس کی ایک مخصوص صورت ثابت کی تھی۔ بُول (۱) نے اِس کی تعمیم کی لیکن اُس کے ثبوت میں وہ نزاکتیں موجود نہیں ہیں جن کی موجودہ علم التحلیل میں ضرورت ہے۔

اِس مسئلہ کو اِس دفعہ کی دوسری مثال پر استعمال کرنے سے

ف + ق نَ (لا) = ۱ - {۱ + (لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$} = - (لا + ما)$^{\frac{1}{2}}$

ع (لا، ط) = - ط$^{\frac{1}{2}}$ ، ع (لا، ۰) = ۰

اور
$$\int^{ط} \frac{فر\,ط}{ع\,(لا،\,ط)} = -\,٢\,ط^{\frac{1}{2}}$$
یہ مستدق ہے، اس لیے ط = ۰ سے ایک نادر حل حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح تیسری مثال میں ع (لا، ط) = $-\,ط^{\frac{1}{2}}$ جس سے ایک مستدق تکملہ حاصل ہوتا ہے اور ایک نادر حل ملتا ہے۔ لیکن پانچویں مثال میں ع (لا، ط) = $-\,ط^{\frac{3}{2}}$ اور تکملہ متسع ہے، اس لیے ط = ۰ ایک خاص تکملہ ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ صرف حقیقی متغیروں کی صورت میں ہی اطلاق پذیر ہے اس لیے اس کو چوتھی مثال پر استعمال نہیں کیا جا سکتا۔

اس طریقہ کی اہمیت کو واضح کرنے کے لیے ہم اس کو مثال
$$\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ص\,و^{-\frac{1}{ما}}$$
پر استعمال کریں گے جہاں ص، لا اور ما کا ایک ایسا تفاعل ہے جو ما = ۰ کے لیے نہ تو صفر ہے نہ لامتناہی۔ ہل نے یہ بیان کیا تھا کہ وہ کوئی ایسے طریقہ سے واقف نہیں جس سے اس سوال کا تصفیہ ہو سکے کہ آیا ما = ۰ نادر حل ہے یا نہیں۔ لیکن اگر ہم ما = ۰ کے لیے $و^{-\frac{1}{ما}}$ کی قیمت صفر لیں (جو حقیقت میں غیر متعین ہے، صفر کے طور پر) تاکہ تفاعل ایک جانب مسلسل (ما کی مثبت قیمتوں کے لیے) ہو جائے اور اگر ص پر ایسی شرطیں عائد کی جائیں جو ف اور ق کی شرطوں کے مشابہ ہوں تو ہم اپنے مسئلہ کو اس مثال پر استعمال کر سکتے ہیں۔ تکملہ
$$\int^{ما} \frac{فر\,ما}{ص\,(لا،\,ما)}\,و^{\frac{1}{ما}}$$
متسع ہے، اس لیے ما = ۰ ایک خاص تکملہ ہے اور نادر حل نہیں ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ نادر حل کی شرطوں سے یہ ضروری ہے (لیکن کافی نہیں) کہ سروں ف اور ق میں سے کم از کم ایک میں ایسا تفاعل شریک رہنا چاہئے کہ ایک ندرت ہو مثلاً $(لا + ما)^{\frac{1}{2}}$۔

کا کامل ابتدائی برنولی کے مساوی دو چشمی منحنیوں کے قبیل

$$ر^2 = ا^2 \text{ جم } ۲ (ط - ع)$$

کو تعبیر کرتا ہے جو دائرہ ر = ۱ میں کھینچے گئے ہیں، یہ نادر حل ہے اور نقطہ ر = ۰ عقدہ طریق ہے۔

(۸۰) (۱۱) $\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ط}}\right)^2 + ر^2 - ۲ ر ا = ۰$

کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو اور ان کی تعبیر بیان کرو۔

(۱۲) ثابت کرو کہ $ر = ط \frac{\text{فر ر}}{\text{فر ط}} - \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر ط}}\right)^2$

کا کامل ابتدائی ر = ج ط - ج^۲ اور نادر حل ۴ ر = ط^۲ ہے۔

اِس امر کی تصدیق کرو کہ نادر حل کامل ابتدائی کو نقطہ (ج^۲، ۲ج) پر مس کرتا ہے جہاں مشترک مماس سمتی نیم قطر کے ساتھ زاویہ مس^-۱ ج بناتا ہے۔

[نادر حلوں پر مزید بحث دفعات ۱۶۰ اور ۱۶۱ میں ملے گی جن میں اُن مشکلوں کا ذکر کیا گیا ہے جو اِن کی تعریف اور لفاف کی تعریف میں پیش آتی ہیں، نیز ممیزوں میں خاص حلوں کا واقع ہونا، حدود کا تصور، اور ممیزوں کو محسوب کرنے کے طریقے بیان کئے گئے ہیں۔ اِن سے اوپر کی مثالوں (۷) اور (۹) پر مزید روشنی پڑے گی۔]

ساتواں باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی مساواتوں کیلئے متفرق طریقے

۶۸ — اس باب میں ہم بالخصوص دوسرے رتبہ کی مساواتوں کو پہلے رتبہ کی مساواتوں میں تحویل کرنے کے طریقوں پر غور کریں گے۔ ہم ثابت کریں گے کہ رتبہ کی ایسی تحویل ہمیشہ عمل میں آسکتی ہے اگر

(۱) مساوات میں ما صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۲) مساوات میں لا صریحی طور پر شامل نہ ہو،

یا (۳) مساوات متجانس ہو۔

مساوات کی ایک خاص شکل جس کی کچھ اہمیت حرکیات میں ہے ایک تکمل جزو ضربی کے استعمال سے نچلے رتبہ میں تحویل کی جاسکتی ہے باب کا بقیہ حصہ خطی مساوات کے لیے وقف ہوگا لیکن اس سے وہ سادہ صورت جس میں سر صرف مستقل ہوتے ہیں خارج کردی گئی ہے کیونکہ اس پر تفصیلی بحث تیسرے باب میں کی جاچکی ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ دوسرے رتبہ کی خطی مساوات پہلے رتبہ کی مساوات میں تحویل ہوسکتی ہے اگر

(۱) عامل کے اجزائے ضربی نکل سکیں،

یا (۲) کوئی ایک تکملہ جو متمم تفاعل سے متعلق ہو معلوم ہو۔

اگر کامل متمم تفاعل معلوم ہو تو مساوات کو مبدلوں کے تغیر کے

چھٹے باب پر متفرق مثالیں

حلوں کو جہاں ممکن ہو ترسیموں سے واضح کرو۔

(۱) ع^{2} + ۲ لاع = ۳ لا^{2} کا امتحان نادر حلوں کے لیے کرو۔

(۲) لا ما ع^{2} − (لا^{2} + ما^{2} − ۱) ع + لا ما = ۰ کو اندراج لا = لا^{2}، ما = ما^{2} کے ذریعہ کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس ثابت کرو کہ یہ مساوات مخروطیوں کے ایک ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو ایک مربع کے چار ضلعوں کو مس کرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ لا ما ع^{2} + (لا^{2} − ما^{2} − ھ^{2}) ع − لا ما = ۰ ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کے ماسکے (±ھ، ۰) پر ہیں اور جو ان چار خیالی خطوں کو مس کرتے ہیں جو ماسکوں کو لا متناہی پر کے دائری نقطوں سے ملاتے ہیں۔

(۴) ہندسی استدلال یا اور طرح سے ثابت کرو کہ اندراج

لا = ا لا + ب ما، ما = اَ لا + بَ ما

سے کلیرو کی شکل کی کوئی تفرقی مساوات کلیرو کی شکل کی دوسری مساوات میں تبدیل ہوتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ ۸ ع^{3} لا = ما (۱۲ ع^{2} − ۹) کا

کامل ابتدائی (لا + ج)^{2} = ۳ ما^{2} ج،

ع ممیز ما^{2} (۹ لا^{2} − ۴ ما^{2}) = ۰

اور ج ممیز ما^{4} (۹ لا^{2} − ۴ ما^{2}) = ۰

ہے۔ ان ممیزوں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶) تفرقی مساوات

لا^{2} ع^{2} + ما ع (۲ لا + ما) + ما^{2} = ۰ جہاں ع = فرما/فرلا

کو اندراج ضا = ما، عا = لا ما سے کلیرو کی شکل میں تحویل کرو۔

پس اس سے یا اور طرح مساوات کو حل کرو۔

ثابت کرو کہ ما + ۴ لا = ۰ ایک نادر حل ہے، اور ما = ۰ لفاف کا ایک حصہ اور معمولی حل کا ایک حصہ دونوں ہے۔ [لندن]

(۷) ما^{2} (ما - لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$) = لا^{4} ($\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$)^{2} کو حل کرو، یہ مساوات مناسب اندراجوں سے کلیرو کی شکل میں مستحیل ہو سکتی ہے۔ [لندن]

(۸) تفرقی مساواتوں

(۱) ۳(ع + لا)^{2} = (ع - لا)^{3}

(۲) ما^{2}(۱ + ۴ع^{2}) - ۲ع لا ما - ۱ = ۰

کو تکمل کرو۔

(۲) میں نادر حل معلوم کرو اور ان اجزائے ضربی کی اہمیت بتاؤ جو واقع ہوتے ہیں۔ [لندن]

(۹) ثابت کرو کہ قبیل

ما^{2} - ۲ج لا^{2} ما + ج^{2} (لا^{4} - لا^{3}) = ۰

کے تمام منحنی مبداء پر قرن رکھتے ہیں اور وہ محور لا کو مس کرتے ہیں۔

ج کو ساقط کر کے قبیل کی تفرقی مساوات کو شکل

۴ع^{2} لا^{2} (لا - ۱) - ۴ع لا ما (۴ لا - ۳) + (۱۶لا - ۹) ما^{2} = ۰

میں حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ دونوں ممیز شکل لا^{3} ما^{2} = ۰ اختیار کرتے ہیں لیکن یہ کہ لا = ۰ حل نہیں ہے اور ما = ۰ ایک خاص تکملہ ہے۔

[اس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ہمارا نظریہ ترمیم کے بغیر منحنیوں کے ایسے قبیلوں پر اطلاق پذیر نہیں ہوتا جن کا ایک قرن ایک ثابت نقطہ پر ہو۔]

(۱۰) ثابت کرو کہ ر^{4} + ر^{2} ($\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$)^{2} = ا^{4}

طریقہ سے حل کیا جا سکتا ہے - یہ عمدہ طریقہ (جو لگرانج سے منسوب ہے) ہر رتبہ کی خطی مساوات پر اطلاق پذیر ہے -

خطی مساوات پر مزید معلومات مثلاً ٹھیک مساواتوں کے لیے شرط، معادلیت کی شرط غیر متغیرہ والی، شارزین مشتق وغیرہ مسئلوں کی شکل میں اِس باب کے ختم پر متفرق مثالوں کے درمیان ملیں گی اور ساتھ ہی ایسے اشارے دیئے جائیں گے کہ طالب علم خود اُن کو حل کر سکے -

لا کے لحاظ سے تفرقوں کو ظاہر کرنے کے لیے لاحقے استعمال (۸۲)
کئے جائیں گے مثلاً $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ کے لیے ما_2 استعمال کیا جائیگا لیکن جب متبوع متغیر لا کے سوا کوئی اور ہو تو تفرقی سروں کو پوری طرح لکھا جائے گا -

۶۹ - ما غائب

اگر ما صریحی طور پر دوسرے رتبہ کی مساوات میں واقع نہ ہو تو ما_1 کی بجائے ع اور ما_2 کی بجائے $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$ لکھو -

اِس طرح ایک مساوات حاصل ہو گی جس میں صرف $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$، ع، اور لا شامل ہوں گے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ کی مساوات ہو گی -

مثلاً $\text{لا ما}_2 + \text{ما}_1 = ۴\ \text{لا}$ پر غور کرو -

یہ مساوات $\text{لا}\ \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع} = ۴\ \text{لا}$ میں تحویل ہوتی ہے -

اور اس کو فوراً تکمل کیا جا سکتا ہے

چنانچہ $\text{لا ع} = ۲\ \text{لا}^2 + ا$

یعنے $\text{ع} = ۲\ \text{لا} + \frac{ا}{\text{لا}}$

تکمیل کرنے پر ما = لا^{۲} + ا لوک لا + ب

جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

اِس طریقہ کو اُس وقت بھی استعمال کیا جا سکتا ہے جبکہ ن ویں رتبہ کی مساوات کو جس میں ما صریحی طور پر موجود نہ ہو (ن - ۱) ویں رتبہ کی مساوات میں تحویل کرنا ہو۔

۷۰ ـ لا غائب ـ اگر لا صریحی طور پر موجود نہ ہو تو تب بھی ما$_{۱}$ کی بجائے ع لکھا جا سکتا ہے لیکن ما$_{۲}$ کی بجائے ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$ لکھنا ہوگا

کیونکہ ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فرع}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ = ما$_{۲}$ - اِس عمل سے دوسرے رتبہ کی مساوات (جس میں لا نہ ہو) پہلے رتبہ کی مساوات میں (جس میں متغیر ع اور ما ہوں) تحویل ہوتی ہے۔

مثلاً مساوات ما ما$_{۲}$ = ما$_{۱}^{۲}$

مساوات ما ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرما}}$ = ع^{۲}

میں مستحیل ہوتی ہے اور اِس سے

ما$_{۱}$ = ب ما اور ما = ا قو ب لا

بآسانی حاصل ہوتے ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱) ما$_{۲}$ جم^{۲} لا = ۱ (۲) ما ما$_{۲}$ + ما$_{۱}^{۲}$ = ما$_{۱}$

(۳) ما ما$_{۲}$ + ۱ = ما$_{۱}^{۲}$ (۴) ما ما$_{۲}$ + ما$_{۱}^{۲}$ = ۲ ما$_{۲}^{۲}$ کو پچھلی مثال

میں تحویل کرکے حل کرو۔

(۵) $لا\, ما_3 + ما_2 = 12\, لا$ ، (۶) $ما_ن - 2\, ما_{ن-1} = و^{لا}$

(۷) $\frac{(1 + ما_1^2)^{\frac{3}{2}}}{ما_2} = ک$ کو تکمیل کرو اور اسکا ہندسی مفہوم بیان کرو۔

(۸) ایک خاص منحنی کا نصف قطر انحناء عماد کے اس طول کے مساوی ہے جو منحنی اور محور لا کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ منحنی ایک زنجیرہ ہے یا ایک دائرہ بموجب اِس کے کہ وہ محور لا کی جانب محدب ہو یا مقعر۔ (۸۳

(۹) اُس منحنی کی تفرقی مساوات معلوم کرو اور حل کرو جس کی قوس کا طول ایک ثابت نقطہ ا سے ایک متغیر نقطہ ف تک اُس زاویہ کے مماس کے متناسب ہے جو ف پر کے مماس اور محور لا کے درمیان ہے۔

۱۷ - متجانس مساواتیں - اگر لا اور ما کو بُعد ا کا سمجھا جائے تو

$ما_1$ کا بُعد صفر ہے،
$ما_2$ کا بُعد -1 ہے،
$ما_3$ کا بُعد -2 ہے،

وغیرہ۔

ہم متجانس مساوات کی یہ تعریف کرتے ہیں کہ وہ ایسی مساوات ہوتی ہے جس میں تمام رقمیں ایک ہی بُعد کی ہوتی ہیں۔ دوسرے باب میں پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی متجانس مساواتیں زیر بحث آچکی ہیں اور تیسرے باب میں متجانس خطی مساوات

$$لا^{ن} ما_ن + ا\, لا^{ن-1} ما_{ن-1} + ب\, لا^{ن-2} ما_{ن-2} + \dots + ه\, لا\, ما_1 + ک\, ما = 0$$

(جہاں ا، ب، ... ۵، ک صرف مستقل عدد ہیں) پر بحث کیجا چکی ہے جس میں ہم نے اندراج لا = قوت یا ت = لوگ لا استعمال کیا تھا۔

فرض کرو کہ ہم یہی اندراج متجانس مساوات

$$\text{لا ما ما}_2 + \text{لا ما}_1^2 = \text{۳ ما ما}_1 \quad \text{،} \ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

میں کرتے ہیں۔

$$\text{اب} \quad \text{ما}_1 = \frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$\text{ما}_2 = \frac{\text{فرما}_1}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{۱}}{\text{لا}^2}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{لا}^2}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{لا}^2}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}^2}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} \quad \text{،}$$

(۱) میں درج کرو اور لا سے ضرب دو تو

$$\text{ما}\left(\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right) + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{۳ ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{۴ ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جس میں ت غائب ہے اور اس لیے وہ اُن مساواتوں کے مشابہ ہے جو پچھلے دفعہ میں حل کی گئی تھیں اور جن میں لا غائب تھا۔

(۸۴) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ = ق رکھ کر طالب علم آسانی سے

$$\text{ما ق} = \text{۲}\,(\text{ما}^2 + \text{ب})$$

حاصل کر سکتا ہے اور اِس سے

ت + ج = $\frac{1}{4}$ لوک (ما^{2} + ب)

پس ما^{2} + ب = قو$^{4(ت + ج)}$

= ا لا^{4}، قو^{4ج} کی بجائے دوسرا اختیاری مستقل ا رکھنے سے۔

۲۷ — دفعہ ۱۷ کی مثال بہت آسانی سے حل ہوئی جس کی وجہ یہ ہے کہ لا^{2} کو ما$_{2}$ کے ساتھ اور لا کو ما$_{1}$ کے ساتھ وابستہ کرنے کے بعد کوئی زائد لا نہیں بچا۔ واقعہ یہ ہے کہ اِس کو شکل

ما (لا^{2} ما$_{2}$) + (لا ما$_{1}$)^{2} = ۲ ما (لا ما$_{1}$)

میں لکھا جا سکتا تھا۔

لیکن (لا^{2} + ما^{2}) (ما - لا ما$_{1}$) + لا^{2} ما^{2} ما$_{2}$ = ۰ .... (۲)

کو اِس طرح نہیں لکھا جا سکتا۔ اِس کو پچھلی مثال کے مشابہ شکل میں تحویل کرنے کے لیے رکھو ما = و لا، یہ وہی اندراج ہے جس کو دوسرے باب کی متجانس مساواتوں کے لیے استعمال کیا گیا تھا۔

مساوات (۲) ہو جاتی ہے

(لا^{2} + لا^{2} و^{2}) (و لا - و$_{1}$ لا^{2} - و لا) + و^{2} لا^{4} (لا و$_{2}$ + ۲ و$_{1}$) = ۰

یعنی - (۱ + و^{2}) و$_{1}$ + و^{2} (لا و$_{2}$ + ۲ و$_{1}$) = ۰

اور اِس کو لکھا جا سکتا ہے

و^{2} لا^{2} و$_{2}$ = (۱ - و^{2}) لا و$_{1}$ .... (۳)

اب ہم حسب سابق عمل کرتے ہیں اور لا = وت رکھتے ہیں تو

$$\text{لا}\,\text{و}_{\text{۱}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

اور

$$\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{و}_{\text{۲}} = \frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{و}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} - \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

پس مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$\text{و}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{و}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} - \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\right) = (\text{۱} - \text{و}^{\text{۲}})\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

یعنے
$$\text{و}^{\text{۲}}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{و}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۴})$$

جس میں ت غائب ہے۔

حسب سابق رکھو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ق}$، $\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{و}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} = \text{ق}\,\frac{\text{فرق}}{\text{فرو}}$

تو مساوات (۴) ہو جاتی ہے $\text{و}^{\text{۲}}\,\text{ق}\,\frac{\text{فرق}}{\text{فرو}} = \text{ق}$

یعنے
$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرو}} = \frac{\text{۱}}{\text{و}^{\text{۲}}}$$
(اِلّا ق = ۰ جس سے ما = ج لا حاصل ہوگا)

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}} = \text{ق} = \frac{\text{۱}}{\text{ا}} - \frac{\text{۱}}{\text{و}}$$

$$\text{فرت} = \frac{\text{ا و فرو}}{\text{و} - \text{ا}} = \left(\text{ا} + \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{و} - \text{ا}}\right)\text{فرو}$$

$$\text{ت} = \text{ا و} + \text{ا}^{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{و} - \text{ا}) + \text{ب}$$

اور بالآخر
$$\text{لوک لا} = \frac{\text{ا ما}}{\text{لا}} + \text{ا}^{\text{۲}}\,\text{لوک}\,(\text{ما} - \text{ا لا}) - \text{ا}^{\text{۲}}\,\text{لوک لا} + \text{ب}$$

(۸۵) **۲۷** ۔ پچھلے دفعہ کے مطابق عمل کر کے ہم دوسرے رتبہ کی کسی متجانس

تفرقی مساوات کو پہلے رتبہ میں تحویل کر سکتے ہیں۔
کسی ایسی مساوات کو شکل

$$\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\text{، ما}_{١}\text{، لا ما}_{٢}\right)=٠$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً دفعہ ۷ ا کی مساوات جب اِس کو لا سے تقسیم کیا جاتا ہے تو

$$\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\text{لا ما}_{٢}+\text{ما}_{١}^{٢}=٣\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\text{ما}_{١}$$

ہو جاتی ہے اور دفعہ ۷ ۲ کی مساوات، لا³ سے تقسیم کرنے پر،

$$\left(١+\frac{\text{ما}^{٢}}{\text{لا}^{٢}}\right)\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}-\text{ما}_{١}\right)+\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{٢}\text{لا ما}_{٢}=٠$$

ہو جاتی ہے۔

اندراجات $\text{ما}=\text{و لا}$ اور $\text{لا}=\text{ہ}^{\text{ت}}$ سے

$$\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\text{، ما}_{١}\text{، لا ما}_{٢}\right)=٠ \quad \text{اول}\quad \text{ف}\left(\text{و، لا و}_{١}+\text{و، لا}^{٢}\text{و}_{٢}+٢\text{ لا و}_{١}\right)=٠$$

میں اور پھر

$$\text{ف}\left(\text{و، }\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}+\text{و، }\frac{\text{فر}^{٢}\text{و}}{\text{فرت}^{٢}}+\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\right)=٠$$

میں مستحیل ہوتی ہے جس میں ت غائب ہے اور اس لیے وہ پہلے رتبہ میں تحویل پذیر ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) $\text{لا}^{٢}\text{ما}_{٢}-\text{لا ما}_{١}+\text{ما}=٠$، (۲) $\text{لا}^{٢}\text{ما}_{٢}-\text{لا ما}_{١}+٥\text{ ما}=٠$

(۳) $٢\text{ لا}^{٢}\text{ما ما}_{٢}+\text{ما}^{٢}=\text{لا}^{٢}\text{ما}_{١}^{٢}$، (۴) $\text{ما}=\text{ی}^{٢}$ کے اندراج سے

$$٢\text{ لا}^{٢}\text{ما ما}_{٢}+٤\text{ ما}^{٢}=\text{لا}^{٢}\text{ما}_{١}^{٢}+٢\text{ لا ما ما}_{١}$$

کو متجانس بناؤ اور حل کرو۔

۴۷ - ایک مساوات جو حرکیات میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔

شکل $\text{ما}_2 = \text{ف}(\text{ما})$ اکثر حرکیات میں واقع ہوتی ہے خاصکر حرکت کے مسئلوں میں جبکہ حرکت ایک ایسی قوت کے تحت ہو جس کی سمت ایک ثابت نقطہ کی جانب اور جس کی مقدار کلاً اس ثابت نقطہ سے فاصلہ پر منحصر ہو۔

مساوات کی طرفین کو $۲\,\text{ما}_1$ سے ضرب دو تو

$$۲\,\text{ما}_1\,\text{ما}_2 = ۲\,\text{ف}(\text{ما})\,\text{ما}_1$$

تکمیل کرنے پر $\text{ما}_1^2 = ۲\int \text{ف}(\text{ما})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = ۲\int \text{ف}(\text{ما})\,\text{فرما}$

یہ حقیقت میں توانائی کی مساوات ہے۔

یہ طریقہ مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -\text{د}^2\,\text{لا}$ پر (جو سادہ موسیقی حرکت کی مساوات ہے) استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۲\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = -۲\,\text{د}^2\,\text{لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

اور ت کے لحاظ سے تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 = -\text{د}^2\,\text{لا}^2 + \text{مستقل} = \text{د}^2(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)\ \text{فرض کرو}$$

(۸۶) اس لیے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{د}}\,\frac{۱}{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{ت} = \frac{۱}{\text{د}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{مستقل}$$

$$\text{لا} = \text{ا جب} \left(\text{د ت} + \text{ھ} \right)$$

حل طلب مثالیں

(۱) $\text{ما}_{۲} = \text{ما}^{۳} - \text{ما}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ما}_{۱} = ۰$ جبکہ $\text{ما} = ۱$

(۲) $\text{ما}_{۲} = \text{قو}^{\text{ما}_{۱}}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ما} = ۰$ اور $\text{ما}_{۱} = ۱$ جبکہ $\text{لا} = ۰$

(۳) $\text{ما}_{۱} = \text{قط}^{۲} \text{ما} \ \text{مس ما}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ما} = ۰$ اور $\text{ما}_{۱} = ۱$ جبکہ $\text{لا} = ۰$

(۴) $\frac{\text{فر}^{۲} \text{لا}}{\text{فر ت}^{۲}} = - \frac{\text{گ ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{لا} = \text{ھ}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = ۰$ جبکہ $\text{ت} = ۰$

[ھ - لا وہ فاصلہ ہے جس میں سے ایک ذرہ سکون سے جاذبہ کے تحت گرتا ہے جہاں جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے، ہوا کی مزاحمت وغیرہ کو نظر انداز کیا گیا ہے]

(۵) دو صورتوں (۱) $\text{ف} = \text{مہ ع}^{۲}$ اور (۲) $\text{ف} = \text{مہ ع}^{۳}$ میں مساوات $\frac{\text{فر}^{۲} \text{ع}}{\text{فر ط}^{۲}} + \text{ع} = \frac{\text{ف}}{\text{ھ}^{۲} \text{ع}^{۲}}$ کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ $\text{ط} = \frac{\text{فر ع}}{\text{فر ط}} = ۰$ جبکہ $\text{ع} = \frac{۱}{\text{ج}}$ جہاں مہ، ھ، اور ج مستقل ہیں۔

[اِن سے وہ راستہ معلوم ہوتا ہے جس کو ایک ذرہ ایک ایسی قوتِ کشش کے تحت طے کرتا ہے جو ایک ثابت نقطہ کی جانب ہے اور علی الترتیب اِس نقطہ سے فاصلہ ر کے مُربع اور مکعب کے بالعکس متناسب ہے۔ ع، ر کا متکافی ہے اور ط قطبی محددوں میں وہی معمولی معنے رکھتا ہے، مہ اکائی فاصلہ پر اسراع ہے، اور ھ رقبئی رفتار کا دُگنا ہے۔]

۷۵ - عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا خطی مساوات

(لا + ۲) ما۲ - (۲ لا + ۵) ما۱ + ۲ ما = (لا + ۱) فوٓ لا

کو {(لا + ۲) عف۲ - (۲ لا + ۵) عف + ۲} ما = (لا + ۱) فوٓ لا

کے طور پر لکھا جا سکتا ہے جہاں عف (حسب باب سوم) فر / فر لا کی بجائے لکھا گیا ہے۔

اب اِس مخصوص مثال میں عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے چنانچہ

{(لا + ۲) عف - ۱} {(عف - ۲) ما = (لا + ۱) فوٓ لا

رکھو (عف - ۲) ما = و

تو {(لا + ۲) عف - ۱} و = (لا + ۱) فوٓ لا

یہ پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔ دفعہ ۲ کے مطابق حل کرنے پر حاصل ہوتا ہے

و = ج (لا + ۲) + فوٓ لا

یعنے (عف - ۲) ما = ج (لا + ۲) + فوٓ لا

یہ بھی ایک خطی مساوات ہے اور اِس لیے بالآخر حاصل ہوتا ہے

ما = ا (۲ لا + ۵) + ب فوٓ ۲لا - فوٓ لا، - ۱/۴ ج کی بجائے ا درج کرنے سے۔

(۸۷) ظاہر ہے کہ صرف خاص صورتوں میں ہی عامل کے اجزائے ضربی نکل سکتے ہیں۔ اِن اجزائے ضربی کو صحیح ترتیب میں لکھنا چاہیے کیونکہ وہ تبادلہ پذیر نہیں ہیں۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ترتیب کو الٹنے سے حاصل ہوگا

(عف - ۲) {(لا + ۲) عف - ۱} ما = {(لا + ۲) عف۲ - (۲ لا + ۴) عف + ۲} ما

حل طلب مثالیں۔

(۱) (لا + ۱) ما$_{۲}$ + (لا − ۱) ما$_{۱}$ − ۲ ما = ۰،

(۲) لا ما$_{۲}$ + (لا − ۱) ما$_{۱}$ − ما = ۰،

(۳) لا ما$_{۲}$ + (لا − ۱) ما$_{۱}$ − ما = لا^{۲}،

(۴) لا ما$_{۲}$ + (لا^{۲} + ۱) ما$_{۱}$ + ۲ لا ما = ۲ لا، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۲ اور ما$_{۱}$ = ۰ جبکہ لا = ۰

(۵) (لا^{۲} − ۱) ما$_{۲}$ − (۴ لا^{۲} − ۳ لا − ۵) ما$_{۱}$ + (۴ لا^{۲} − ۶ لا − ۵) ما = قو$^{۲ لا}$، اگر یہ دیا گیا ہو کہ ما = ۱ اور ما$_{۱}$ = ۲ جبکہ لا = ۰۔

۷۶ - متمم تفاعل[1] سے متعلق ایک تکملہ کا معلوم ہونا۔

جب مساوات

ما$_{۲}$ + ف ما$_{۱}$ + ق ما = ۰ . . . . (۱)

کا ایک تکملہ معلوم ہو (فرض کرو کہ ما = ی معلوم ہے) تو دوسرے رتبہ کی زیادہ عام مساوات

ما$_{۲}$ + ف ما$_{۱}$ + ق ما = س

کو جس میں ف، ق، س سب لا کے تفاعل ہیں اندراج

ما = و ی

کے ذریعہ پہلے رتبہ کی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

تفرق کرنے پر ما$_{۱}$ = و$_{۱}$ ی + و ی$_{۱}$،

ما$_{۲}$ = و$_{۲}$ ی + ۲ و$_{۱}$ ی$_{۱}$ + و ی$_{۲}$

اس لیے مساوات (۲) ہو جاتی ہے

و$_{۲}$ ی + و$_{۱}$ (۲ ی$_{۱}$ + ف ی) + و (ی$_{۲}$ + ف ی$_{۱}$ + ق ی) = س

[1] دفعہ ۲۹ کا ثبوت کہ ایک تفرقی مساوات کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا حاصل جمع ہوتا ہے اسوقت اطلاق پذیر ہوتا ہے جبکہ اس کے سر لا کے تفاعل ہوں اور نیز اسوقت جبکہ وہ مستقل ہوں۔

یعنی $$\text{ی}\,\frac{\text{فر و}_1}{\text{فر لا}} + \text{و}_1(\text{۲ ی}_1 + \text{ف ی}) = \text{ک}' \quad \ldots\ldots (۳)$$

کیونکہ بموجب فرض $\text{ی}_2 + \text{ف ی}_1 + \text{ق ی} = ۰$

مساوات (۳) و_1 میں پہلے رتبہ کی خطی مساوات ہے۔

اسی طرح ن ویں رتبہ کی کسی خطی مساوات کو (ن-۱) ویں رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے اگر متمم تفاعل سے متعلق ایک تکملہ معلوم ہو۔

۷۷ — مثال۔ مساوات

$$(\text{لا}+۲)\,\text{ما}_2 - (۲\text{لا}+۵)\,\text{ما}_1 + ۲\,\text{ما} = (\text{لا}+۱)\,\text{قو}^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

پر پھر غور کرو۔

اگر یہ معلوم ہو کہ $\text{ما} = \text{قو}^{۲\text{لا}}$ سے مساوات کی دائیں جانب کا جملہ صفر ہوتا ہے تو ہم (۸۸)

$$\text{ما} = \text{و}\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$$

رکھ سکتے ہیں۔ اس سے حاصل ہوگا

$$\text{ما}_1 = (\text{و}_1 + ۲\text{و})\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$$

اور
$$\text{ما}_2 = (\text{و}_2 + ۴\text{و}_1 + ۴\text{و})\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$$

(۴) میں درج کرنے پر

$$(\text{لا}+۲)\,\text{و}_2\,\text{قو}^{۲\text{لا}} + \{۴(\text{لا}+۲) - (۲\text{لا}+۵)\}\,\text{و}_1\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$$
$$+ \{۴(\text{لا}+۲) - ۲(۲\text{لا}+۵) + ۲\}\,\text{و}\,\text{قو}^{۲\text{لا}} = (\text{لا}+۱)\,\text{قو}^{\text{لا}}$$

یعنی $$(\text{لا}+۲)\,\frac{\text{فر و}_1}{\text{فر لا}} + (۲\text{لا}+۳)\,\text{و}_1 = (\text{لا}+۱)\,\text{قو}^{-\text{لا}}$$

اِس کو معمولی طریقہ پر (متکمل جزو ضربی معلوم کر کے) حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$و_۱ = قو^{-لا} + ج\,(لا + ۲)\,قو^{-۲لا}$$

تکمیل کرنے سے $و = -قو^{-لا} - \frac{۱}{۴}ج\,(۲لا + ۵)\,قو^{-۲لا} + ب$

اِس لیے $ما = و\,قو^{۲لا} = -قو^{لا} - \frac{۱}{۴}ج\,(۲لا + ۵) + ب\,قو^{۲لا}$

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مساوات $ما_۲ + ف\,ما_۱ + ق\,ما = ۰$ ، $ما = قو^{لا}$ سے پوری ہوتی ہے اگر $۱ + ف + ق = ۰$ ۔ اور $ما = لا$ سے پوری ہوتی ہے اگر $ف + ق\,لا = ۰$ ۔

(۲) $لا^۲ ما_۲ + لا\,ما_۱ - ما = ۸\,لا^۳$ ،

(۳) $لا^۲ ما_۲ - (لا^۲ + ۲لا)\,ما_۱ + (لا + ۲)\,ما = لا^۳ قو^{لا}$ ،

(۴) $لا\,ما_۲ - ۲(لا + ۱)\,ما_۱ + (لا + ۲)\,ما = (لا - ۲)\,قو^{۲لا}$ ،

(۵) $لا^۲ ما_۲ + لا\,ما_۱ - ۹\,ما = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $ما = لا^۳$ ایک حل ہے۔

(۶) $لا\,ما_۲\,(لا\,جم\,لا - ۲\,جب\,لا) + (لا^۲ + ۲)\,ما_۱\,جب\,لا - ۲\,ما\,(لا\,جب\,لا + جم\,لا) = ۰$ ، اگر یہ دیا گیا ہو کہ $ما = لا^۲$ ایک حل ہے۔

۸۷ — مبدلوں کا تغیر۔ اب ہم ایک خطی مساوات کا جس کا متمم تفاعل معلوم ہو کامل ابتدائی معلوم کرنے کے لیے ایک نفیس لیکن قدرے مصنوعی طریقہ بیان کریں گے۔

فرض کرو کہ اِس طریقہ کی وضاحت کے لیے ہم وہی مثال لیتے ہیں جو قبل ازیں دو مختلف طریقوں سے حل کیجا چکی ہے یعنے

(لا+۲) ما$_{۲}$ - (۲لا+۵) ما$_{۱}$ + ۲ما = (لا+۱) قو^{لا}، .... (۱)

جس کا متمم تفاعل ما = ا (۲لا+۵) + ب قو^{۲لا} ہے -

فرض کرو کہ ما = (۲لا+۵) ا + قو^{۲لا} ب، .... (۲)

جہاں ا اور ب، لا کے تفاعل ہیں -
یہ "مفروضہ دفعہ" کے مفروضہ ما = و قو^{لا} کے مشابہ ہے لیکن اُس سے زیادہ متشاکل ہے -
(۲) کو تفرق کرنے سے

ما$_{۱}$ = (۲لا+۵) ا$_{۱}$ + قو^{۲لا} ب$_{۱}$ + ۲ا + ۲قو^{۲لا} ب، .... (۳)

ابتک یہ دو تفاعل (یا مبدل) ا اور ب صرف ایک رشتہ میں منسلک ہیں - اِس لیے ہم اِن سے ایک زائد مساوات

(۲لا+۵) ا$_{۱}$ + قو^{۲لا} ب$_{۱}$ = ۰، .... (۴)

پوری کراتے ہیں -
اب مساوات (۳) (۸۹)

ما$_{۱}$ = ۲ا + ۲قو^{۲لا} ب، .... (۵)

میں تحویل ہو گی - اِس کو تفرق کرنے سے

ما$_{۲}$ = ۴قو^{۲لا} ب + ۲ا$_{۱}$ + ۲قو^{۲لا} ب$_{۱}$، .... (۶)

مساواتوں (۲)، (۵)، اور (۶) سے علی الترتیب ما، ما$_{۱}$ اور ما$_{۲}$ کی

قیمتیں لیکر (۱) میں درج کرو ۔ ا اور ب کے ساتھ جو اجزائے ضربی ہیں وہ صفر ہو جاتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

۲ (لا + ۲) ا۱ + ۲ (لا + ۲) قوٗ^لا۲ ب۱ = (لا + ۱) قوٗ^لا ، ......(۷)

(۴) اور (۷) دو ہمزاد مساواتیں ہیں جن کو ہم ا۱ اور ب۱ کیلئے حل کر سکتے ہیں چنانچہ

ا۱ / قوٗ^لا۲ = ب۱ / -(۲لا + ۵) = (لا + ۱) قوٗ^لا / ۲ قوٗ^لا۲ (لا + ۲) (ا - ۲لا - ۵) = - (لا + ۱) قوٗ^-لا / ۴ (لا + ۲)^۲

اِس لیے ا۱ = - (لا + ۱) قوٗ^لا / ۴ (لا + ۲)^۲ = - قوٗ^لا / ۴ { ۱/(لا + ۲) - ۱/(لا + ۲)^۲ }

اور تکمل سے ا = - قوٗ^لا / ۴ (لا + ۲) + ا ، جہاں ا مستقل ہے۔

اسی طرح ب۱ = (۲لا + ۵) (لا + ۱) قوٗ^-لا / ۴ (لا + ۲)^۲ = قوٗ^-لا / ۴ { ۲ - ۱/(لا + ۲) - ۱/(لا + ۲)^۲ }

اور ب = قوٗ^-لا / ۴ { ۲ - ۱/(لا + ۲) } + ب

(۲) میں درج کرنے پر

م = (۲لا + ۵) { - قوٗ^لا / ۴ (لا + ۲) + ا } + قوٗ^لا / ۴ { ۲ - ۱/(لا + ۲) } + ب قوٗ^لا۲

= ا (۲لا + ۵) + ب قوٗ^لا۲ - قوٗ^لا

۹ ۷ ــ فرض کرو کہ ہم اِن اعمال کو دوسرے رتبہ کی عام خطی مساوات

$$\text{ما}_{۲} + \text{ف}\,\text{ما}_{۱} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}، \quad \ldots\ldots (۱)$$

پر استعمال کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس کا متمم تفاعل اۓ + ب و معلوم ہے جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں اور ۓ اور و، لا کے معلومہ تفاعل ہیں۔ مان لو کہ

$$\text{ما} = \text{ۓ}\,\text{ا} + \text{و}\,\text{ب}، \quad \ldots\ldots (۲)$$

تو

$$\text{ما}_{۱} = \text{ۓ}_{۱}\,\text{ا} + \text{و}_{۱}\,\text{ب}، \quad \ldots\ldots (۳)$$

بشرطیکہ

$$\text{ۓ}\,\text{ا}_{۱} + \text{و}\,\text{ب}_{۱} = ۰، \quad \ldots\ldots (۴)$$

(۳) کو تفرق کرنے سے

$$\text{ما}_{۲} = \text{ۓ}_{۲}\,\text{ا} + \text{و}_{۲}\,\text{ب} + \text{ۓ}_{۱}\,\text{ا}_{۱} + \text{و}_{۱}\,\text{ب}_{۱}، \quad \ldots\ldots (۵)$$

(۱) میں ما₂، ما₁ اور ما کی بجائے اندراج کرو۔

وہ رقمیں جن میں ا شامل ہوگا $\text{ا}(\text{ۓ}_{۲} + \text{ف}\,\text{ۓ}_{۱} + \text{ق}\,\text{ۓ})$ ہونگی یعنے صفر کیونکہ بموجب فرض

$$\text{ۓ}_{۲} + \text{ف}\,\text{ۓ}_{۱} + \text{ق}\,\text{ۓ} = ۰$$

اسی طرح وہ رقمیں جن میں ب آتا ہے معدوم ہوتی ہیں، اور مساوات (۱)

$$\text{ۓ}_{۱}\,\text{ا}_{۱} + \text{و}_{۱}\,\text{ب}_{۱} = \text{ر}، \quad \ldots\ldots (۶)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) اور (۶) کو حل کرنے سے (۹۰

$$\frac{\text{ا}_{۱}}{\text{و}} = \frac{\text{ب}_{۱}}{-\text{ۓ}} = \frac{\text{ر}}{\text{و}\,\text{ۓ}_{۱} - \text{ۓ}\,\text{و}_{۱}}$$

اب ا اور ب کو عمل تکمل سے معلوم کیا جا سکتا ہے، فرض کرو

$$\text{ا} = \text{ف}(\text{لا}) + \text{ا}،$$

$$\text{ب} = \text{فا}(\text{لا}) + \text{ب}$$

جہاں ف (لا) اور فا (لا)، لا کے معلومہ تفاعل ہیں اور ا اور ب

اختیاری مستقل ہیں۔

(۲) میں درج کرنے پر بالآخر حاصل ہوتا ہے

$\text{ما} = \text{ع ف(لا)} + \text{و فا(لا)} + \text{ا ع} + \text{ب و}$

*۸۰ — کسی رتبہ کی خطی مساواتوں پر اِس طریقہ کی توسیع عمل میں آسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے رتبہ کی خطی مساوات

$\text{ما}_{۳} + \text{ف ما}_{۲} + \text{ق ما}_{۱} + \text{ر ما} = \text{س}$ ، ......(۱)

لو۔ فرض کرو کہ اِس کا متمم تفاعل $\text{ما} = \text{ا ع} + \text{ب و} + \text{ج ط}$ معلوم ہے۔

حسب ذیل مساواتیں آسانی سے حاصل ہونگی:

$\text{ما} = \text{ع ا} + \text{و ب} + \text{ط ج}$ ، ......(۲)

$\text{ما}_{۱} = \text{ع}_{۱}\text{ ا} + \text{و}_{۱}\text{ ب} + \text{ط}_{۱}\text{ ج}$ ، ......(۳)

بشرطیکہ $۰ = \text{ع ا}_{۱} + \text{و ب}_{۱} + \text{ط ج}_{۱}$ ، ......(۴)

اس لیے $\text{ما}_{۲} = \text{ع}_{۲}\text{ ا} + \text{و}_{۲}\text{ ب} + \text{ط}_{۲}\text{ ج}$ ، ......(۵)

بشرطیکہ $۰ = \text{ع}_{۱}\text{ ا}_{۱} + \text{و}_{۱}\text{ ب}_{۱} + \text{ط}_{۱}\text{ ج}_{۱}$ ، ......(۶)

اب $\text{ما}_{۳} = \text{ع}_{۳}\text{ ا} + \text{و}_{۳}\text{ ب} + \text{ط}_{۳}\text{ ج}$

$+ \text{ع}_{۲}\text{ ا}_{۱} + \text{و}_{۲}\text{ ب}_{۱} + \text{ط}_{۲}\text{ ج}_{۱}$ ، ......(۷)

(۱) میں درج کرنے سے

$\text{س} = \text{ع}_{۲}\text{ ا}_{۱} + \text{و}_{۲}\text{ ب}_{۱} + \text{ط}_{۲}\text{ ج}_{۱}$ ، ......(۸)

پھر $\text{ا}_{۱}$، $\text{ب}_{۱}$، $\text{ج}_{۱}$ کو تین مساواتوں (۴)، (۶)، اور (۸) سے معلوم کرو۔

حل طلب مثالیں۔

(۱) $\text{ما}_{۲} + \text{ما} = \text{قم لا}$

(۲) $\text{ما}_{۳} + ۴\,\text{ما} = ۴\,\text{مسس}\,۲\text{لا}$ ،

(۳) $\text{ما}_{۲} - \text{ما} = \dfrac{۲}{۱ + \text{قو}^{\text{لا}}}$

(۴) $\text{لا}^{۲}\,\text{ما}_{۲} + \text{لا}\,\text{ما}_{۱} - \text{ما} = \text{لا}^{۲}\,\text{قو}^{\text{لا}}$ ، اگر متمم تفاعل $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{لا}^{-۱}$ دیا گیا ہو۔

(۵) $\text{ما}_{۳} - ۶\,\text{ما}_{۲} + ۱۱\,\text{ما}_{۱} - ۶\,\text{ما} = \text{قو}^{۲\text{لا}}$

۸۱ — خطی مساواتوں کو حل کرنے کے مختلف طریقوں کا مقابلہ۔ اگر دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات حل کرنے کے لیے دی گئی ہو اور کسی خاص طریقہ کا اظہار نہ کیا گیا ہو تو بالعموم بہترین راہ عمل یہ ہے کہ متمم تفاعل سے متعلق ایک خاص تکملہ معلوم کرنے کی کوشش کی جائے اور پھر دفعہ ۷۶ کے مطابق عمل کیا جائے۔ یہ طریقہ ن ویں درجہ کی ایک خطی مساوات کو (ن-۱) ویں درجہ کی خطی مساوات میں تحویل کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے طریقہ سے چند صورتوں (۹۱)
میں اچھا حل حاصل ہوتا ہے لیکن یہ صورتیں ایسی ہیں کہ ان میں مثالیں خاص طور پر اس مقصد کے لیے تیار کی جاتی ہیں۔ عام طور پر عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کیا جا سکتا۔

مبدلوں کے تغیر کا طریقہ عملی حیثیت سے دفعہ ۷۶ کے طریقہ کے مقابلہ میں ادنیٰ ہے کیونکہ اس میں متمم تفاعل کو پوری طرح معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے نہ کہ صرف اس کے ایک حصہ کو۔ اسکے علاوہ اگر اس کو تیسرے یا اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساواتوں میں استعمال کیا جائے تو $\text{ا}_{۱}$، $\text{ب}_{۱}$، $\text{ج}_{۱}$ وغیرہ کے لیے ہمزاد مساواتوں کے

حل کرنے میں اور تکملوں کی تکمیل میں بڑی محنت صرف ہوتی ہے۔

اب ہم دوسرے رتبہ کی معمولی تفرقی مساوات کے بقیہ ابتدائی پر غور کریں گے۔ دوسرے رتبہ کی ایسی مساوات کے کامل ابتدائی میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔ اِس سے کے بقیہ ابتدائی کو جسمیں ایک اختیاری مستقل شامل ہو حاصل کرنے کے لیے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ ایک مستقل کو لامتناہی ہو جانے دیا جائے۔ مثلاً تفرقی مساوات

$$\text{ما}\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

سے کامل ابتدائی

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ما} + \text{ب}\ \text{لوگ}\,(\text{ما} - \text{ب})$$

حاصل ہوتا ہے اور $\frac{1}{\text{ب}} = +\infty$ سے بقیہ ابتدائی ما = ب ملتا ہے جو ب کی ہر قیمت کیلیے اُس تحت قبیل (Sub-family) کے ایک مشترک متقارب کو تعبیر کرتا ہے جس کے لیے ب کی یہ قیمت مستقل ہوتی ہے اور ا بدلتا ہے۔

بعض اوقات ہم دونوں مستقلوں کو لامتناہی ہو جانے دیتے ہیں جبکہ ان میں ایک خاص ربط موجود ہو۔ مثلاً تفرقی مساوات

$$8\,\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + 9\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 0$$

سے کاملِ ابتدائی۔ $(\text{ما} + \text{ب})^3 = (\text{لا} + \text{ا})^2$

حاصل ہوتاہے جو نیم کعبی مکافیوں کے ایک دوہرے لامتناہی جُٹ کو جن کے قرنوں پر کے مماس محور ما کے متوازی ہیں تعبیر کرتا ہے۔ اگر ہم ب کی بجائے $(\text{ا}^{\frac{2}{3}} - \text{ک})$ رکھیں تو

$$(\text{ما} - \text{ک})^3 + 3\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}(\text{ما} - \text{ک})^2 + 3\,\text{ا}^{\frac{4}{3}}(\text{ما} - \text{ک}) = \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ا}$$

حاصل ہوتا ہے۔ $ا^{\frac{م}{ن}}$ سے تقسیم کرنے اور پھر ا کو لامتناہی بنانے سے $ما = ک$ حاصل ہوتا ہے۔ ک کی ہر قیمت کے لیے وہ نیم کعبی مکافیوں کے ایک تحت قبیل کا فرن طریق ہے لیکن یہ فرن صرف اتفاقاً ہی طریق میں آگئے ہیں۔ یہ طریق ایک انتہائی شکل کے طور پر پیدا ہوتا ہے جس کی طرف ایک خاص تحت قبیل کے (وہ جنکے راس $(-ا، -ا^{\frac{م}{ن}} + ک)$ ہیں) بہت دور کے ارکان اپنے اُن حصوں کی جانب مائل ہوتے ہیں جو لامتناہی سے دور ہیں۔ یہ طریق نہ تو لشمی لفاف (جو دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات کے نادر حل کی ہندسی تعبیر ہے) ہے نہ مشترک متقارب (اس اصطلاح کے معمولی مفہوم میں)۔

اسی طرح اگر م اور ن کوئی دو مثبت صحیح عدد ہوں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں اور $ن > م$ تو تفرقی مساوات

$$م^{ن}\left(\frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}}\right)^{ن-م} - ن^{م}\left(م-ن\right)^{ن-م}\left(\frac{فر ما}{فر لا}\right)^{2ن-م} = 0$$

کا کامل ابتدائی $\left(ما + ب\right)^{ن} = \left(لا + ا\right)^{م}$ ہے اور بقیہ ابتدائی $ما = ک$ ہے جو ب کی بجائے $\left(ا^{\frac{م}{ن}} - ک\right)$ رکھنے، $ا^{\frac{2ن-م}{ن}}$ سے تقسیم کرنے اور ا کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کی ہندسی تعبیر حسب سابق ہے، صرف یہ فرق ہے کہ $ما = ک$ پر واقع شدہ راسوں کا فرن ہونا ضروری نہیں ہے۔ وہ انعطاف کے نقطے یا تموج (undulation) کے نقطے یا معمولی نقطے ($ن = 2$، $م = 1$ کے لیے) بھی ہو سکتے ہیں۔ تموج کی صورت میں ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ طریق ایک لشمی لفاف ہے لیکن یقیناً ایسا نہیں ہے کیونکہ طریق منحنیوں کو مس کرنے کی بجائے اُن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

ساتویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\text{ما}\,\text{ما}_{۲} - \text{ما}_{۱}^{۲} + \text{ما}_{۱} = ۰$ (۲) $\text{لا}\,\text{ما}_{۲} + \text{لا}\,\text{ما}_{۱}^{۲} - \text{ما}_{۱} = ۰$

(۳) $\text{ما}_{ن}^{۲} = ۴\,\text{ما}_{ن-۱}$ (۴) $\text{ما}_{ن} + \text{ما}_{ن-۲} = ۸\,\text{جم}\,۳\,\text{لا}$

(۵) $(\text{لا}^{۲}\,\text{لوک لا} - \text{لا}^{۲})\,\text{ما}_{۲} - \text{لا}\,\text{ما}_{۱} + \text{ما} = ۰$

(۶) $(\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} - ۱)\,\text{ما}_{۲} - (۳\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} - ۱)\,\text{ما}_{۱} + (۲\,\text{لا}^{۲} + ۶\,\text{لا})\,\text{ما} = ۰$

(۷) تصدیق کرو کہ جم ن لا اور جب ن لا، مساوات

$$\text{ما}_{۲} + \text{ن}^{۲}\,\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$$

کے متکمل اجزائے ضربی ہیں۔ اس لیے

$$\text{ما}_{۲} + \text{ن}^{۲}\,\text{ما} = \text{قط ن لا}$$

کے پہلے دو تکملے معلوم کرو اور $\text{ما}_{۱}$ کے اسقاط سے کامل ابتدائی کو اخذ کرو۔

(۸) ثابت کرو کہ خطی مساوات

$$\text{ا}\,\text{ما} + \text{ب}\,\text{ما}_{۱} + \text{ج}\,\text{ما}_{۲} + \dots + \text{س}\,\text{ما}_{ن} = \text{ت}$$

جس میں ا، ب، ج، ...، س، ت تمام لا کے تفاعل ہیں ٹھیک ہے یعنے وہ نچلے رتبہ کی مساوات سے تفرق کے ذریعہ فوراً اخذ کیجا سکتی ہے اگر ا، ب، ج، ... کے متواتر تفرقی سررشتہ

$$\text{ا} - \text{ب}_{۱} + \text{ج}_{۲} - \dots + (-۱)^{ن}\,\text{س}_{ن} = ۰$$

کو پورا کریں۔

[نوٹ۔ متواتر تکمل بالحصص سے

$$\int \text{س}_{\text{ن}}\,\text{ما}\,\text{فرلا} = \text{س}\,\text{ما}_{\text{ن}-۱} - \text{س}_{۱}\,\text{ما}_{\text{ن}-۲} + \text{س}_{۲}\,\text{ما}_{\text{ن}-۳} + \ldots$$

$$\ldots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,\text{س}_{\text{ن}-۱}\,\text{ما} + \int (-۱)^{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}}\,\text{ما}\,\text{فرلا}]$$

تصدیق کرو کہ یہ شرط حسب ذیل مساوات سے پوری ہوتی ہے،
اِس لیے اِس مساوات کو حل کرو:

$$(۲\,\text{و}^{۲} + ۳\,\text{لا})\,\text{ما}_{۲} + (۶\,\text{لا} + ۳)\,\text{ما}_{۱} + ۲\,\text{ما} = (\text{لا} + ۱)\,\text{نو}^{\text{لا}}$$

(۹) تصدیق کرو کہ حسب ذیل غیر خطی مساواتیں ٹھیک ہیں اور نیز
اِن کو حل کرو:

$$(۱)\quad \text{ما}\,\text{ما}_{۲} + \text{ما}_{۱}^{۲} = ۰$$

$$(۲)\quad \text{لا}\,\text{ما}\,\text{ما}_{۲} + \text{لا}\,\text{ما}_{۱}^{۲} + \text{ما}\,\text{ما}_{۱} = ۰$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج $\text{ما} = \text{و}\,\text{نو}^{-\frac{۱}{۲}\int \text{ف}\,\text{فرلا}}$ سے مساوات

$$\text{ما}_{۲} + \text{ف}\,\text{ما}_{۱} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}$$

طبعی (Normal) شکل $\text{و}_{۲} + \text{ع}\,\text{و} = \text{س}$
میں مستحیل ہوتی ہے جہاں ف، ق، ر سب لا کے تفاعل ہیں اور

$$\text{ع} = \text{ق} - \frac{۱}{۲}\,\text{ف}_{۱} - \frac{۱}{۴}\,\text{ف}^{۲}$$ (۹۲)

اور $$\text{س} = \text{ر}\,\text{نو}^{\frac{۱}{۲}\int \text{ف}\,\text{فرلا}}$$

حسب ذیل مساوات کو طبعی شکل میں رکھو اور حل کرو:

$$\text{ما}_{۲} - ۴\,\text{لا}\,\text{ما}_{۱} + (۴\,\text{لا}^{۲} - ۱)\,\text{ما} = -۳\,\text{نو}^{\text{لا}^{۲}}\,\text{جب}\,۲\,\text{لا}$$

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر دو مساواتیں

$$\text{ما}_2 + \text{ف}\ \text{ما}_1 + \text{ق}\ \text{ما} = ۰$$

اور

$$\text{ی}_2 + \text{ف}\ \text{ی}_1 + \text{ق}\ \text{ی} = ۰$$

ایک ہی طبعی شکل میں تحویل ہوں تو وہ رشتہ

$$\text{ما}\ \text{قو}^{\frac{1}{2}\int \text{ف}\ \text{فرلا}} = \text{ی}\ \text{قو}^{\frac{1}{2}\int \text{ف}\ \text{فرلا}}$$

سے ایک دوسرے میں مستحیل کی جا سکتی ہیں جیسے معادل ہونے کی شرط یہ ہے کہ غیر متغیرہ (Invariant) ع وہی ہو۔

(۱۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$\text{لا}^2\,\text{ما}_2 + ۲(\text{لا}^3 - \text{لا})\,\text{ما}_1 + (۱ - ۲\,\text{لا}^2)\,\text{ما} = ۰$$

اور

$$\text{لا}^2\,\text{ی}_2 + ۲(\text{لا}^3 + \text{لا})\,\text{ی}_1 - (۱ - ۲\,\text{لا}^2)\,\text{ی} = ۰$$

کا غیر متغیرہ وہی ہے۔ وہ رشتہ معلوم کرو جس سے یہ ایک دوسرے میں مستحیل ہو سکیں۔ استحالہ کو عمل میں لا کر تصدیق کرو۔

(۱۳) اگر $\text{و}_2 + \text{ع}\ \text{و} = ۰$، .... (۱)

کے کوئی دو حل ۶ اور س ۶ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{س}_2}{\text{س}_1} = -۲\,\frac{۶_1}{۶}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

اور اس لیے یہ کہ

$$\frac{\text{س}_3}{\text{س}_1} - \frac{۳}{۲}\left(\frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}\right)^2 = ۲\,\text{ع}\text{،} \quad \ldots\ldots (۳)$$

(۲) سے ثابت کرو کہ اگر س، (۳) کا کوئی حل ہو تو $\text{س}_1^{-\frac{1}{2}}$ اور $\text{س}\,\text{س}_1^{-\frac{1}{2}}$

(۱) کے حل ہیں۔

[(۳) کے دائیں جانب س کے تفرقی سروں کا جو تفاعل ہے اُس کو شوارشین (Schwarzian) مشتق کہتے ہیں کیونکہ اس کو برلن کے

[ایچ - اے شوارتس نے دریافت کیا تھا اور اس کو اختصاراً {س، لا} سے تعبیر کرتے ہیں - وہ (Hypergeometric) زائد ہندسی سلسلوں میں اہمیت رکھتا ہے]

$$(\text{۱۴})\ \text{مساوات}\ \text{لا}^{۲}\,\text{ما}_{۲} + (\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا})\,\text{ما}_{۱} + (\text{لا} + ۲)\,\text{ما} = ۰$$

کے غیر متغیرہ ع کو محسوب کرو۔

دو حلوں لا قو^لا اور لا کے خارج قسمت کو س لیکر تصدیق کرو کہ

$$\{\text{س}،\ \text{لا}\} = ۲\,\text{ع}$$

اور یہ کہ $\text{س}_{۱}^{-\frac{۱}{۲}}$ اور $\text{س}\,\text{س}_{۱}^{-\frac{۱}{۲}}$ ابتدائی مساوات کی طبعی شکل کے حل ہیں۔

$$(\text{۱۵})\ \text{اگر}\quad \text{ما}_{۲} + \text{ف}\,\text{ما}_{۱} + \text{ق}\,\text{ما} = ۰$$

کے دو حل ع اور و ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}\,\text{و}_{۲} - \text{و}\,\text{ع}_{۲} + \text{ف}\,(\text{ع}\,\text{و}_{۱} - \text{و}\,\text{ع}_{۱}) = ۰$$

اور اس سے ثابت کرو کہ $\text{ع}\,\text{و}_{۱} - \text{و}\,\text{ع}_{۱} = \text{ا}\,\text{قو}^{-\int \text{ف}\,\text{فلا}}$

اس کی تصدیق پچھلی مثال کی آخری مساوات کے لیے کرو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ $\text{ما}\,\text{ما}_{۱} =$ مستقل، اس مساوات کا پہلا تکملہ ہے جو (۹۳)

$$\text{ما}_{۲} + \frac{۱}{\text{ما}}\,\text{ما}_{۱}^{۲} + \text{ما} = ۰$$

کی آخری رقم کو ترک کرنے سے بنتی ہے۔

$\text{ما}\,\text{ما}_{۱} = \text{ج}$ رکھ کر جہاں ج اب لا کا ایک تفاعل ہے (یعنے مبدل ج کو متغیر کرنے سے) ثابت کرو کہ اگر ما پوری مساوات کا حل ہو تو

$$\text{ج}_{۱} = -\,\text{ما}^{۲}$$

$$\text{اور اس لیے}\qquad \text{ج}^{۲} = \text{مستقل} - \frac{۱}{۲}\,\text{ما}^{۴}$$

$$\text{اور بالآخر}\qquad \text{ما}^{۲} = \text{ا}\ \text{جب}\,(\text{لا}\sqrt{۲} + \text{ب})$$

[بہ طریقہ شکل

$$\text{ما}_{2} + \text{ما}_{1}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{فا}(\text{ما}) = 0$$

کی کسی مساوات پر اطلاق پذیر ہے]

(١٧) متبوع متغیر کو تبدیل کر کے حسب ذیل مساواتوں کو حل کرو:

$$(1)\quad \text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} - \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - 4\,\text{لا}^{3}\,\text{ما} = 8\,\text{لا}^{3}\,\text{جب}\,\text{لا}^{2}$$

$$(2)\quad (1+\text{لا}^{2})^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + 2\,\text{لا}(1+\text{لا}^{2})\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + 4\,\text{ما} = 0$$

(١٨) تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}}\,\text{جم}\,\text{لا} + \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}\,\text{جب}\,\text{لا} - 2\,\text{ما}\,\text{جم}^{3}\,\text{لا} = 2\,\text{جم}^{5}\,\text{لا}$$

کو ایسی مساوات میں مستحیل کرو جس میں ی متبوع متغیر ہو جہاں

$$\text{ی} = \text{جب}\,\text{لا}$$

[لندن]

اور مساوات کو حل کرو۔

(١٩) اگر متبوع متغیر کو لا سے ی میں تبدیل کیا جائے اور ی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ی}}{\text{فر}\,\text{لا}} = 0$$

کو پورا کرے تو مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}$$

مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ی}^{2}} + \text{س}\,\text{ما} = \text{ت}$$

میں مستحیل ہو گی۔ پس مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \left(1 - \frac{1}{\text{لا}}\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 4\,\text{لا}^{2}\,\text{ما}\,\text{قو}^{-2\,\text{لا}}$$

$$= 4\left(\text{لا}^{2} + \text{لا}^{3}\right)\text{قو}^{-3\,\text{لا}}$$

کو حل کرو۔

آٹھواں باب

تفرقی مساواتوں کے حلوں کے عددی تقرب

۸۲ — طالب علم کو یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ وہ طریقے جو پچھلے بابوں میں حلوں کو محدود شکل میں حاصل کرنے کے لیے بیان کئے گئے ہیں صرف خاص نمونوں کی تفرقی مساواتوں پر اطلاق پذیر ہیں۔ اگر کوئی مساوات ان میں سے کسی خاص نمونہ سے متعلق نہ ہو تو ہمیں تقریبی طریقے استعمال کرنا ہو گا۔ ڈاکٹر براڈسکی کے ترسیمی طریقہ سے جس کو پہلے باب میں بیان کیا گیا ہے حل کی نوعیت کا ایک اچھا اندازہ حاصل ہوتا ہے لیکن عددی قیمتوں کے لیے اس پر بھروسہ نہیں کیا جا سکتا۔

اس باب میں ہم پہلے پکرڈ (Picard) [1] کا وہ طریقہ بیان کریں گے جس سے متواتر جبری تقرب حاصل ہوتے ہیں۔ ان میں اعداد رکھنے سے بالعموم عمدہ عددی نتیجے حاصل ہوں گے۔ مگر بد قسمتی سے یہ طریقہ مساواتوں کی صرف ایک محدود جماعت پر جن میں متواتر تکملوں کی تکمیل آسانی سے ہو سکتی ہے استعمال

---

[1] ای۔ پکرڈ فرو فیسر جامعہ پیرس اس زمانہ کے بہت ممتاز اور مشہور ریاضی داں ہیں۔ تفاعلوں کے نظریہ میں ان کی تحقیقات بہت مشہور ہے اور ان کی کتاب (Traite d'analyse) نصاب کی ایک معیاری کتاب ہے۔

کیا جا سکتا ہے۔

دوسرا طریقہ جو کُلاً عددی ہے اور اِس کا استعمال بھی بہت زیادہ عام ہے رُنجے (Runge) [1] سے منسوب ہے۔ اگر کافی احتیاط ملحوظ رکھی جائے تو اِس سے بہت سی صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے ہیں اگرچہ بعض اوقات عمل حساب بہت طول طویل ہو جاتا ہے۔ رُنجے کے طریقہ کو کچھ تغیرات کے ساتھ ہیون، کوٹا، اور اِس کتاب کے مصنف نے بیان کیا ہے۔

۸۳ ۔ متواتر تقربوں کو تکمل کرنے کا پکرڈ کا طریقہ۔

تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا، ما})$$

کو جہاں ما = ب جبکہ لا = و، (۹۵)

$$\text{ما} = \text{ب} + \int_{\text{و}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا، ما})\,\text{فرلا}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

پہلے تقرب کے لیے ہم ف (لا، ما) میں ما کی بجائے ب رکھتے ہیں، دوسرے تقرب کے لیے ما کی بجائے پہلا تقرب، تیسرے تقرب کے لیے ما کی بجائے دوسرا تقرب اور علیٰ ہذا۔

مثال (۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} + \text{ما}^2$، جہاں ما = ۰ جبکہ لا = ۰

یہاں $\text{ما} = \int_{0}^{\text{لا}} (\text{لا} + \text{ما}^2)\,\text{فرلا}$

[1] سی۔ رُنجے پروفیسر جامعہ گوٹنجن (Gottingen) ترسیمی طریقوں کے لیے مستند مانے جاتے ہیں۔

پہلا تقرب: رکھو $\text{لا} + \text{ما}^{2}$ میں $\text{ما} = 0$ تو

$$\text{ما} = \int_{0}^{\text{لا}} \text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2}$$

دوسرا تقرب: رکھو $\text{لا} + \text{ما}^{2}$ میں $\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2}$ تو

$$\text{ما} = \int_{0}^{\text{لا}} \left(\text{لا} + \frac{1}{4}\,\text{لا}^{4}\right)\text{فرلا} = \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2} + \frac{1}{20}\,\text{لا}^{5}$$

تیسرا تقرب: رکھو $\text{لا} + \text{ما}^{2}$ میں $\text{ما} = \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2} + \frac{1}{20}\,\text{لا}^{5}$ تو

$$\text{ما} = \int_{0}^{\text{لا}} \left(\text{لا} + \frac{1}{4}\,\text{لا}^{4} + \frac{1}{20}\,\text{لا}^{7} + \frac{1}{400}\,\text{لا}^{10}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2} + \frac{1}{20}\,\text{لا}^{5} + \frac{1}{160}\,\text{لا}^{8} + \frac{1}{4400}\,\text{لا}^{11}$$

اور علیٰ ہذا۔

مثال (۲)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی} \\[2ex] \dfrac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{3}\,(\text{ما} + \text{ی}) \end{array}\right.$$

جہاں $\text{ما} = 1$ اور $\text{ی} = \frac{1}{2}$ جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

یہاں $\text{ما} = 1 + \int_{0}^{\text{لا}} \text{ی}\,\text{فرلا}$ اور $\text{ی} = \frac{1}{2} + \int_{0}^{\text{لا}} \text{لا}^{3}(\text{ما} + \text{ی})\,\text{فرلا}$

پہلا تقرب:

$$\text{ما} = 1 + \int_{0}^{\text{لا}} \frac{1}{2}\,\text{فرلا} = 1 + \frac{1}{2}\,\text{لا}$$

$$\text{ی} = \frac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\text{فرلا} = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴}$$

دوسرا تقرب:

$$\text{ما} = ۱ + \int_{۰}^{\text{لا}} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴}\right)\text{فرلا} = ۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۴۰}\text{لا}^{۵}،$$

$$\text{ی} = \frac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳}\left(\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۱۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۶۴}\text{لا}^{۸}$$

تیسرا تقرب: (۹۶)

$$\text{ما} = ۱ + \int_{۰}^{\text{لا}} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۱۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۶۴}\text{لا}^{۸}\right)\text{فرلا}$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۴۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۱}{۶۰}\text{لا}^{۶} + \frac{۱}{۱۹۲}\text{لا}^{۹}$$

$$\text{ی} = \frac{۱}{۲} + \int_{۰}^{\text{لا}} \text{لا}^{۳}\left(\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴} + \frac{۷}{۴۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۶۴}\text{لا}^{۸}\right)\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۱۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۶۴}\text{لا}^{۸} + \frac{۷}{۳۶۰}\text{لا}^{۹} + \frac{۱}{۲۵۶}\text{لا}^{۱۲}$$

اور علیٰ ہذا۔

مثال (۳) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{لا}^{۳}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما}\right)$ جہاں $\text{ما} = ۱$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۲}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$۔

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}$ رکھنے سے یہ مساوات مثال (۲) کی مساوات میں تحویل ہوتی ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ پکرڈ کے طریقہ سے تفرقی مساوات ایسی مساواتیں

تبدیل ہوتی ہے جس میں تکملے شامل ہوتے ہیں، اس لیے اس کو تکملی مساوات کہتے ہیں۔

حل طلب مثالیں۔ حسب ذیل صورتوں میں تیسرا تقرب معلوم کرو۔ نیز مثالوں (۱) اور (۲) میں ٹھیک حل معمولی طریقوں سے معلوم کرو۔

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۲ما} - \text{۲لا}^{۲} - ۳$ جہاں ما = ۲ جبکہ لا = ۰

(۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲ - \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ جہاں ما = ۲ جبکہ لا = ۱

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۲لا} + \text{ی}$ ، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{۳لاما} + \text{لا}^{۲}\text{ی}$ ، جہاں ما = ۲، ی = ۰ جبکہ لا = ۰

(۴) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}$ ، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{۲}\text{ی} + \text{لا}^{۴}\text{ما}$ ، جہاں ما = ۵ اور ی = ۱ جبکہ لا = ۰

(۵) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \text{لا}^{۲}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^{۴}\text{ما}$ جہاں ما = ۵ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱$ جبکہ لا = ۰

۸۴ ۔ ان تقربوں سے عددی قیمتوں کو معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ پچھلے دفعہ کی مثال (۱) میں ہم ما کی قیمت، اعشاریہ کے سات صحیح مقاموں تک، معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ لا = ۰٫۳۔

لا = ۰٫۳ درج کرنے پر پہلے تقرب سے $\frac{۱}{۲}(۰٫۳)^{۲} = ۰٫۰۴۵$

حاصل ہوگا۔

دوسرے تقرب کے لیے $\frac{۱}{۲۰}(۰٫۱۳)^{۵} = ۰٫۰۰۰۱۲۱۵$ جمع کرنا ہوگا۔

تیسرے تقرب کے لیے $\frac{۱}{۱۶۰}(۰٫۱۳)^{۸} + \frac{۱}{۴۴۰۰}(۰٫۱۳)^{۱۱} = ۰٫۰۰۰۰۰۰۴۱$

جمع کرنا ہوگا۔

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ متواتر تقرب بڑی سرعت سے گھٹ رہے ہیں، (۹۷)
اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چوتھے تقرب میں پہلے سات مقاموں تک کوئی اثر نہیں پڑے گا، اس لیے مطلوبہ قیمت ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ ہے۔
بلاشبہ لا کی بڑی قیمتوں کے لیے تین سے زیادہ تقرب لینے ہوں گے تاکہ نتیجہ مطلوبہ درجہ تک صحیح حاصل ہو سکے۔

دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ حاصل شدہ تقرب بعض شرطوں کے تحت ایک انتہا کی جانب مائل ہوتے ہیں اور اس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اس کو مسئلہ موجودگی کہتے ہیں۔

حل طلب مثال۔

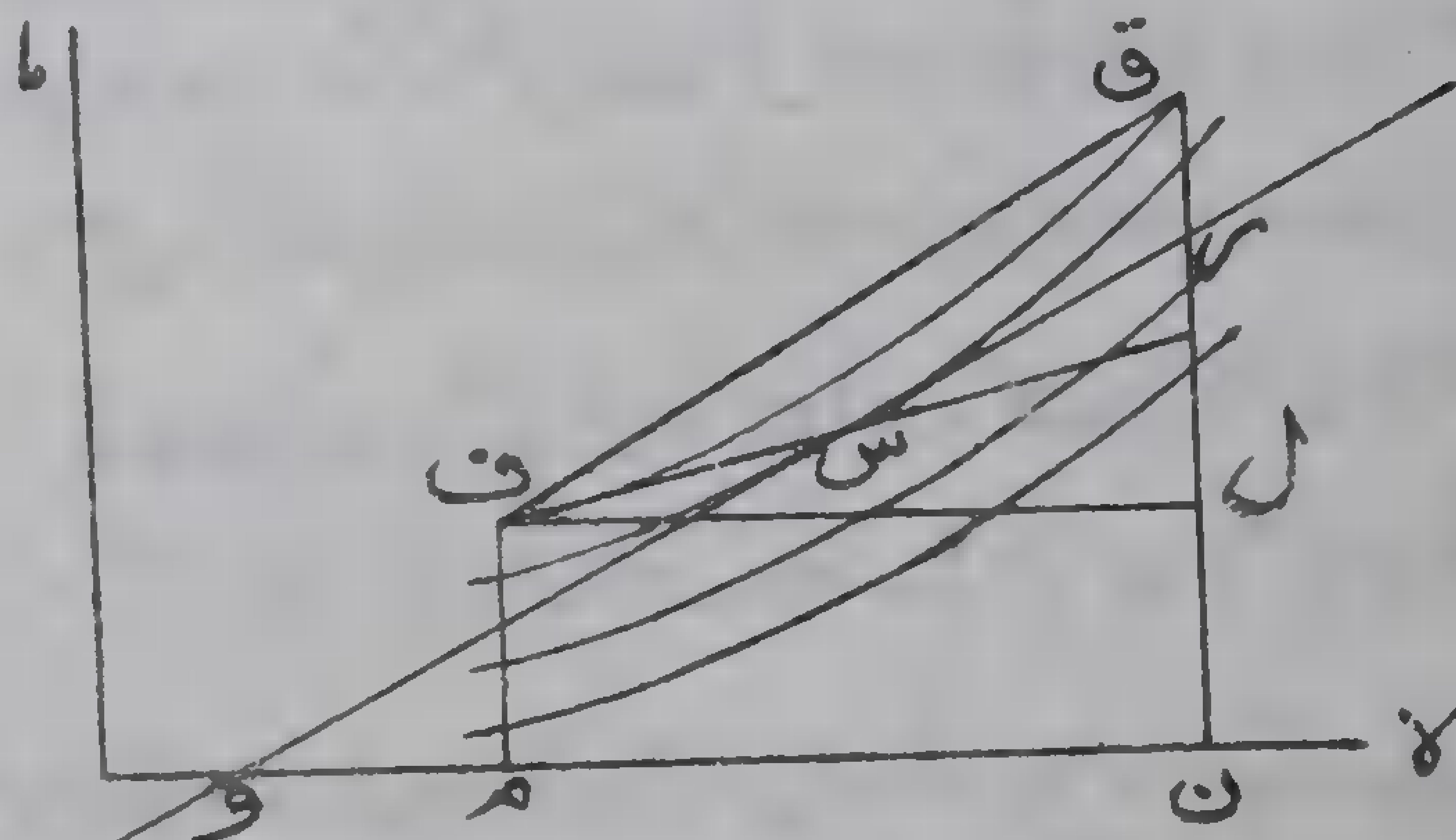
(۱) ثابت کرو کہ دفعہ ۸۳ مثال (۲) میں لا = ۰٫۵ سے ما = ...۱٫۲۵۲ اور ی = ...۰٫۵۲۶ حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰٫۲ سے ما = ...۱٫۰۱۲۵ اور ی = ...۰٫۵۰۶۳۲ حاصل ہوتے ہیں۔

۸۵ — عددی تقرب راست تفرقی مساوات سے۔

متواتر تقربوں کو تکمل کرنے کا طریقہ ناکام ہوتا ہے اگر اعمال تکمل ناقابل استعمال ہوں، یہ اکثر ہوتا ہے۔ لیکن دوسرے طریقے ہیں جو ہمیشہ استعمال کیے جا سکتے ہیں۔ اس مسئلہ پر ہندسی طور پر غور کرو۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف (لا، ما)}$$

سے منحنیوں ("ممیز") کے ایک قبیل کی تعیین ہوتی ہے جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے اور اِن میں سے



شکل (۲۳)

ایک منحنی مستوی کے ہر نقطہ میں سے گذرتا ہے[۱]۔ اگر ایک نقطہ ف (ا، ب) دیا گیا ہو تو ہم جانتے ہیں کہ نقطہ ف میں سے گذرنے والے ممیز کا ڈھال ف (ا، ب) ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ اُسی ممیز پر کسی دوسرے نقطہ کا معیّن ما = ن ق معلوم کریں جبکہ لا = و ن = ا + ہ (فرض کرو)
(۹۸) دیا گیا ہو۔ پہلا تقرب اِس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ہم ممیز ف ق کو لینے کی بجائے مماس ف ر کو لیں یعنے

ا = ن ل + ل ر = ن ل + ف ل س د ر ف ل

[۱] یہ اِس مفروضہ پر مبنی ہے کہ مستوی کے ہر نقطہ پر ف (لا، ما) کی قیمت بالکل معین ہوتی ہے۔ لیکن اگر ف (لا، ما) ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر غیر معین ہو جائے تو اِن نقطوں کو مساوات کے نادر نقطے کہا جاتا ہے اور ایسے نقطوں پر ممیزوں کا سلوک خاص تحقیقات کا محتاج ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰ ۔

= ب + ہ ف (ا، ب) = ب + ہ ف، (فرض کرو)

لیں۔

لیکن جب تک ہ فی الواقع بہت چھوٹا نہ ہو خطاء سماق نظر انداز نہیں کیجا سکتی۔ اس سے زیادہ مناسب تقرب وترف ق کو اُس مماس کے متوازی لینے سے حاصل ہوتا ہے جو ف ر کے وسطی نقطہ س میں سے گذرنیوالے ممیز کا کھینچا گیا ہو۔

چونکہ س نقطہ (ا + $\frac{1}{2}$ ہ، ب + $\frac{1}{2}$ ہ ف) ہے اسلئے

ما = ن ل + ل ق = ن ل + ف ل س د ق ف ل

= ب + ہ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ہ، ب + $\frac{1}{2}$ ہ ف)

اِس سادہ ضابطے سے بعض صورتوں میں اچھے نتیجے حاصل ہوتے ہیں جیسا کہ حسب ذیل مثالوں سے معلوم ہو گا۔

مثال (۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = لا + ما^2، اگر ما = ۰ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۳

یہاں ا = ب = ۰ اور ہ = ۰٫۳، ف (لا، ما) = لا + ما^2

اِس لیے ف = ف (ا، ب) = ۰، ا + $\frac{1}{2}$ ہ = ۰٫۱۵، ب + $\frac{1}{2}$ ہ ف = ۰

اِس لیے ب + ہ ف (ا + $\frac{1}{2}$ ہ، ب + $\frac{1}{2}$ ہ ف) = ۰ + ۰٫۳ × ف (۰٫۱۵، ۰) = ۰٫۰۴۵

دفعہ ۸۴ میں حاصل شدہ قیمت ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ تھی، اِس لیے خطاء ۰٫۰۰۰۱۲... یعنے تقریباً $\frac{1}{4}$ فیصدی ہے۔

مثال (۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ - $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱٫۲

یہاں ا = ۱، ب = ۲، ہ = ۰٫۲، ف = ۲ - $\frac{2}{1}$ = ۰

اِس لیے ب + ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ ھ ف ب) = ۲ + ۰٫۲ × ف (۱٫۱، ۲)

= ۲ + ۰٫۲ (۲ − ۲/۱٫۱) = ...۲٫۰۳۶

یہ تفرقی مساوات آسانی سے تکمل کی جاسکتی ہے چنانچہ ما = لا + ۱/لا
حاصل ہوتا ہے اور اس لیے جب لا = ۱٫۲ تو ما = ...۲٫۰۳۳ - پس
خطا .....۰٫۰۰۳ ہے جو ما کے اضافہ کے مقابلہ میں یعنی ۰٫۰۳۶ کے
مقابلہ میں قدرے بڑی ہے۔

مثال (۳) فرما/فرلا = ی = ف (لا، ما، ی)، فرض کرو۔

فری/فرلا = لا² (ما + ی) = گ (لا، ما، ی)، فرض کرو

اگر ما = ۱ اور ی = ۰٫۵ جبکہ لا = ۰ تو ما اور ی معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۵
یہاں ا = ۰، ب = ۱، ج (ی کی ابتدائی قیمت) = ۰٫۵، ھ = ۰٫۵
اِس لیے ف ب = ف (۰، ۱، ۰٫۵) = ۰٫۵، گ ب = گ (۰، ۱، ۰٫۵) = ۰
(۹۹) اوپر کے طریقہ کو دو متغیروں کے لیے وسیع کیا جائے تو صریحاً

ما = ب + ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ ھ ف ب، ج + ½ ھ گ ب)

اور ی = ج + ھ گ (ا + ½ ھ، ب + ½ ھ ف ب، ج + ½ ھ گ ب)

اِس لیے حاصل شدہ قیمتیں درج کرنے پر

ما = ۱ + ۰٫۵ × ف (۰٫۲۵، ۱٫۱۲۵، ۰٫۵) = ۱٫۲۵۰۰

اور ی = ۰٫۵ + ۰٫۵ × گ (۰٫۲۵، ۱٫۱۲۵، ۰٫۵) = ۰٫۵۱۲۷

صحیح قیمتیں حسب دفعہ ۸۴

ما = ...۱٫۲۵۲ اور ی = ...۰٫۵۲۶

ہیں۔ اِس طرح ہمیں ما کے لیے تو بہت اچھا نتیجہ حاصل ہوا لیکن ی کیلئے

بہت ہی خراب۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اس طریقہ میں نتیجہ کی صحت کا درجہ غیر متیقن رہتا ہے اور اس لیے اس طریقہ کی بہت کچھ قدر گھٹ جاتی ہے۔ لیکن یہ صرف اُس طریقہ کی تمہید ہے جو بہت ہی عمدہ اور رُنجے (Runge) سے منسوب ہے۔ اِس کو ہم آئندہ باب میں سمجھائیں گے۔

حل طلب مثالیں

(۱) فرما / فرلا = (لا۲ - ما)^(۱/۲) - ۱، اگر ما = ۴ جبکہ لا = ۲٫۳ تو قیمت ما = ۴٫۱۲۲ حاصل کرو جبکہ لا = ۲٫۷۔ [رُنجے کے طریقہ سے قیمت ۴٫۱۱۸ حاصل ہوگی]

(۲) فرما / فرلا = ۱/۱۰ { ما^(۱/۲) - ۱ + لوگ‌و (لا + ما) }، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱- تو قیمت ما = ۲٫۱۹۴ حاصل کرو جبکہ لا = ۱۔ [رُنجے کے طریقہ سے قیمت ۲٫۱۹۲ حاصل ہوگی]

(۳) فرما / فرلا = ۲ لا - ما/لا، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو قیمت ما = ۲٫۰۷۶ حاصل کرو جبکہ لا = ۱٫۲۔ نیز ثابت کرو کہ ما = ۲/۳ لا۲ + ۴/(۳ لا)، اس لیے جب، لا = ۱٫۲ تو ما = ...۲٫۰۷۱۔

۸۶ — **رُنجے کا طریقہ**۔ فرض کرو کہ ما کے تفاعل کو جس کی تعریف[۱]

[۱] وہ شرطیں جن کے تحت تفرقی مساوات اور ابتدائی شرط ایک تفاعل کی فی الواقع تعیین کرتے ہیں دسویں باب میں بیان کی گئی ہیں۔ پچھلے دفعہ کی ترسیمی بحث میں یہ مان لیا گیا ہے کہ یہ شرطیں پوری ہوتی ہیں۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ما})،\quad \text{ما} = \text{ب جبکہ لا} = ١$$

سے کی گئی ہے ما = فا (لا) سے تعبیر کیا گیا ہے۔
اگر اِس کو ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلایا جائے تو

$$\text{فا}(١+\text{ھ}) = \text{فا}(١) + \text{ھ}\,\text{فاَ}(١) + \frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\,\text{فاً}(١) + \frac{\text{ھ}^3}{\lfloor 3}\,\text{فاًَ}(١) + \dots$$

اب $\text{فاَ}(\text{لا}) = \dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا}،\ \text{ما}) = \text{ف}$، فرض کرو

اب ہم لا کے لحاظ سے کُل تفرقی سر لیں گے (یعنے یہ سمجھیں گے کہ لا کے تغیر کے ساتھ ما متغیر ہوتا ہے)۔ فرض کرو کہ ہم جزئی تفرقی سروں کو

$$\text{پ} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}،\quad \text{ق} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}،\quad \text{ر} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ف}}{\text{جف لا}^2}،$$

$$\text{س} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}}،\quad \text{ت} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ف}}{\text{جف ما}^2}$$

سے تعبیر کرتے ہیں اور اِن کی قیمتوں کو جبکہ لا = ١ اور ما = ب، پ، ق، ر، .... سے بیان کرتے ہیں۔

$$\text{تب}\quad \text{فاَ}(\text{لا}) = \frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}} = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فرما جف}}{\text{فرلا جف ما}}\right)\text{ف} = \text{پ} + \text{ف ق} \qquad (١٠٠)$$

$$\text{اسی طرح}\quad \text{فاً}(\text{لا}) = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\right)(\text{پ} + \text{ف ق})$$

$$= \text{ر} + \text{پ ق} + \text{ف س} + \text{ف}(\text{س} + \text{ق}^2 + \text{ف ت})$$

اِس طرح

$$\text{فا}(١+\text{ھ}) - \text{فا}(١)$$

$$= \text{ھ ف}_\text{ب} + \tfrac{1}{2}\text{ھ}^2(\text{پ}_\text{ب} + \text{ف ق}_\text{ب}) + \tfrac{1}{6}\text{ھ}^3(\text{ر}_\text{ب} + ٢\,\text{ف س}_\text{ب}

$$+ \text{ف}^{2}\text{ت} + \text{پ ق} + \text{ف ق}^{2}) + \ldots\ldots (1)$$

پہلی رقم سے پہلا تقریب تغیر ہوتا ہے، یہ تقریب دفعہ ۸۵ میں زیر بحث آ چکا تھا اور اُس کو رد کر دیا گیا تھا۔

دفعہ ۸۵ کے دوسرے تقریب

$$\text{ما} - \text{ب} = \text{ھ ف}\left(\text{ا} + \tfrac{1}{2}\text{ھ}، \text{ب} + \tfrac{1}{2}\text{ھ ف}_{\text{ب}}\right) = \text{ک}_{1}$$ فرض کرو

کو پہلا کر اب (۱) کے ساتھ مقابلہ کیا جا سکتا ہے۔

ٹیلر کے مسئلہ (جو دو متبوع متغیروں کے لیے ہے) سے

$$\text{ف}\left(\text{ا} + \tfrac{1}{2}\text{ھ}، \text{ب} + \tfrac{1}{2}\text{ھ ف}_{\text{ب}}\right)$$

$$= \text{ف}_{\text{ب}} + \tfrac{1}{2}\text{ھ پ}_{\text{ب}} + \tfrac{1}{2}\text{ھ ف}_{\text{ب}}\text{ق}_{\text{ب}} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\tfrac{1}{4}\text{ھ}^{2}\text{ر}_{\text{ب}}\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\text{ھ}^{2}\text{ف}_{\text{ب}}\text{س}_{\text{ب}} + \tfrac{1}{4}\text{ھ}^{2}\text{ف}^{2}\text{ت}_{\text{ب}}\right) + \ldots\ldots،$$

جس سے

$$\text{ک}_{1} = \text{ھ ف}_{\text{ب}} + \tfrac{1}{2}\text{ھ}^{2}(\text{پ}_{\text{ب}} + \text{ف}_{\text{ب}}\text{ق}_{\text{ب}}) + \tfrac{1}{8}\text{ھ}^{3}(\text{ر}_{\text{ب}} + 2\text{ف}_{\text{ب}}\text{س}_{\text{ب}}$$
$$+ \text{ف}^{2}\text{ت}_{\text{ب}}) + \ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ ک_{1}، ھ^{3} کے سر میں ناقص ہے۔
اس کے بعد کا عمل اُن معمولی طریقوں[1] سے حاصل ہوتا ہے جو سادہ تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ف}(\text{لا})$$

کے عددی تکمل کے لیے دئے جاتے ہیں۔
اس صورت میں دوسرا تقریب منحرفی قاعدہ

---

[1] دیکھو گبن یا لیمب کی نصابی کتابیں احصاء پر۔

$$\text{ا} - \text{ب} = \text{ہ ف}\left(\text{ا} + \tfrac{1}{2}\,\text{ہ}\right)$$

میں تحویل ہوتا ہے۔

اِس کے بعد کا تقرب بالعموم سمپسن کے قاعدے سے معلوم کیا جاتا ہے جس کو شکل

$$\text{ا} - \text{ب} = \tfrac{1}{6}\,\text{ہ}\left\{\text{ف}(\text{ا}) + 4\,\text{ف}\left(\text{ا} + \tfrac{1}{2}\,\text{ہ}\right) + \text{ف}(\text{ا} + \text{ہ})\right\}$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔

اگر ہم دو متغیروں والے متناظر ضابطے

$$\tfrac{1}{6}\,\text{ہ}\left\{\text{ف} + 4\,\text{ف}\left(\text{ا} + \tfrac{1}{2}\,\text{ہ}،\ \text{ب} + \tfrac{1}{2}\,\text{ہ ف}\right) + \text{ف}\left(\text{ا} + \text{ہ}،\ \text{ب} + \text{ہ ف}\right)\right\}$$

کو پھیلائیں تو آسانی سے

$$\text{ہ ف} + \tfrac{1}{2}\,\text{ہ}^2(\text{پ} + \text{ف ق}) + \tfrac{1}{6}\,\text{ہ}^3(\text{ر} + 2\,\text{ف س} + \text{ف}^2\,\text{ت}) + \ldots\ldots \quad (3)$$

حاصل ہوگا جو ک۱ سے بہتر تقرب ہے لیکن اب بھی ہ^3 کا سر (۱) کے مطابق نہیں ہے۔

ہ^3 کی زائد رقمیں حاصل کرنے کے لیے رُنجے[1] نے

$$\text{ہ ف}\left(\text{ا} + \text{ہ}،\ \text{ب} + \text{ہ ف}\right)$$

کی بجائے $\text{ک}_3 = \text{ہ ف}\left(\text{ا} + \text{ہ}،\ \text{ب} + \text{ک}_2\right)$ جہاں $\text{ک}_2 = \text{ہ ف}\ (\text{ا}$ (۱۰۱)

رکھا جہاں $\text{ک}_2 = \text{ہ ف}\left(\text{ا} + \text{ہ}،\ \text{ب} + \text{ہ ف}\right)$

اِس ترمیم شدہ ضابطہ کو اختصاراً $\tfrac{1}{6}\left\{\text{ک}_1 + 4\,\text{ک}_2 + \text{ک}_3\right\}$ لکھا جاسکتا ہے

[1] (Math. Ann. Vol. XLVI, pp. 167—178

جہاں $\text{کَ} = \text{ھ ف ب}$ یا $\frac{2}{3}\text{ک}_1 + \frac{1}{3}\text{ک}_2 = \text{ک}_1 + \frac{1}{3}(\text{ک}_2 - \text{ک}_1)$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $\text{ک}_2 = \frac{1}{2}(\text{کَ} + \text{کً})$۔

اب اِس امر کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ رُنجے کے ضابطہ کا پھیلاؤ، (۱) کے ساتھ وہاں تک مطابق ہے جہاں تک رقموں ھ، ھ^2، اور ھ^3 کا تعلق ہے۔

بلاشبہ اِس طریقہ سے خراب نتیجے حاصل ہوں گے اگر سلسلہ (۱) بہت سُستی سے مستدق ہو۔

اگر عدد اَ ف ب > 1 تو مساوات کو شکل

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{ف (لا، ما)}} = \text{فا (لا، ما)}$$ فرض کرو

یں لکھا جاتا ہے اور اب فا عدد اَ < 1 اور ہم ما کو متبوع غیر متغیر لیتے ہیں۔

۸۷ ـ رُنجے کے طریقہ سے مثالوں کو حل کرنے کا طریقہ۔

اعمال حساب کو صاف طور پر ذہن میں رکھنے کے لیے ان کو کسی خاص ترتیب میں مرتب کرنا چاہیئے مثلاً ترتیب ذیل میں:

ترتیب وار محسوب کرو

$$\text{کَ} = \text{ھ ف}،$$

$$\text{کً} = \text{ھ ف}(1 + \text{ھ، ب} + \text{کَ})،$$

$$\text{کٌ} = \text{ھ ف}(1 + \text{ھ، ب} + \text{کً})،$$

$$\text{ک}_1 = \text{ھ ف}(1 + \tfrac{1}{2}\text{ھ، ب} + \tfrac{1}{2}\text{کَ})،$$

$$\text{ک}_2 = \frac{1}{2}(\text{کَ} + \text{کٌ})،$$

اور بالآخر $$\text{ک} = \text{ک}_1 + \frac{1}{3}(\text{ک}_2 - \text{ک}_1)$$

چونکہ ک۱ خود مطلوبہ قیمت کا ایک تقریب ہے اس لیے یہ واضح ہے کہ اگر ک اور ک۱ کے درمیان فرق یعنی ۱/۳ (ک۲ - ک۱)، ک اور ک۱ کے مقابلہ میں خفیف ہو تو ک کی خطاء کا خفیف تر ہونا ممکن ہے۔

مثال (۱) فرما / فرلا = لا + ما^۲، اگر ما = ۰ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۰٫۳ ۔

یہاں ا = ۰، ب = ۰، ھ = ۰٫۳، ف (لا، ما) = لا + ما^۲، ف۰ = ۰

اس لیے ک′ = ھ ف۰ = ۰

ک″ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک′) = ۰٫۳ × ف (۰٫۳، ۰)

= ۰٫۳ × ۰٫۳ = ۰٫۰۹۰۰

ک‴ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک″) = ۰٫۳ × ف (۰٫۳، ۰٫۰۹)

= ۰٫۳ × (۰٫۳ + ۰٫۰۰۸۱) = ۰٫۰۹۲۴

ک۱ = ھ ف (ا + ۱/۲ ھ، ب + ۱/۲ ک′) = ۰٫۳ × ف (۰٫۱۵، ۰)

= ۰٫۰۴۵۰

ک۲ = ۱/۲ (ک′ + ک‴) = ۱/۲ × ۰٫۰۹۲۴

= ۰٫۰۴۶۲

اور ک = ک۱ + ۱/۳ (ک۲ - ک۱) = ۰٫۰۴۵۰ + ۰٫۰۰۰۴

= ۰٫۰۴۵۴

چونکہ ک = ۰٫۰۴۵۴ اور ک۱ = ۰٫۰۴۵۰ کے درمیان فرق
ان میں سے کسی کے مقابلہ میں خاصا کم ہے اس لیے ک کی خطاء کا اس (۱۰۲)
فرق ۰٫۰۰۰۴ سے بھی کم ہونے کا بہت امکان ہے۔ اس کا یہ مطلب ہے کہ ہم قیمت کو اعشاریہ کے تین صحیح مقامات تک ۰٫۰۴۵ لے سکتے ہیں۔ ہم اس نتیجہ کی جانچ دفعہ ۸۴ کے محصلہ نتیجہ ۰٫۰۴۵۱۲۱۹ کے ساتھ

مقابلہ کر کے کر سکتے ہیں۔

مثال (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ ، اگر ما = ۱ جبکہ لا = ۰ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱

یہ مثال رُنجے کے اصلی مقالہ سے لی گئی ہے۔ سعت کو تین حصوں ۰ تا ۲ء۰ ، ۲ء۰ تا ۵ء۰ ، ۵ء۰ تا ۱ میں تقسیم کرو۔ ہم نے اول چھوٹا اضافہ لیا ہے کیونکہ ف (لا، ما) ابتداء میں بڑے سے بڑا ہے۔

پہلا عمل : ا = ۰ ، ب = ۱ ، ھ = ۲ء۰ ، ف = ۱

کَ = ھ ف = ۲۰۰ء۰

کً = ھ ف (ا + ھ ، ب + کَ) = ۲ء۰ × ف (۲ء۰ ، ۲ء۱)

= ۱۶۷ء۰

کٌ = ھ ف (ا + ھ ، ب + کً) = ۲ء۰ × ف (۲ء۰ ، ۱۶۷ء۱)

= ۱۴۰ء۰

ک۱ = ھ ف (ا + ½ ھ ، ب + ½ کَ) = ۲ء۰ × ف (۱ء۰ ، ۱ء۱)

= ۱۶۷ء۰

ک۲ = ½ (کَ + کٌ) = ½ × ۳۴۰ء۰ = ۱۷۰ء۰

اور ک = ک۱ + ⅓ (ک۲ - ک۱) = ۱۶۷ء۰ + ۰۰۱ء۰ = ۱۶۸ء۰

جس سے ما = ۱۶۸ء۱ جبکہ لا = ۲ء۰

دوسرا عمل : ا = ۲ء۰ ، ب = ۱۶۸ء۱ ، ھ = ۳ء۰ ،

ف = ف (۲ء۰ ، ۱۶۸ء۱) = ۷۰۸ء۰

حسب سابق عمل کرنے سے ک۱ = ۱۷۰ء۰ ، ک۲ = ۱۷۳ء۰ اور اس لیے

ک = ۱۷۱ء۰

جس سے
ما = ۱٫۱۲۸ + ۱٫۱۷۱ = ۱٫۳۳۹ جبکہ لا = ۰٫۵

تیسرا عمل: ل = ۰٫۵ ، ب = ۱٫۳۳۹ ، ھ = ۰٫۵

معلوم ہوگا ک۱ = ک۲ = ک = ۰٫۱۶۰

جس سے ما = ۱٫۴۹۹ جبکہ لا = ۱

ک اور ک۱ پر غور کرو تو معلوم ہوگا کہ پہلے اور دوسرے عمل میں خطا ۰٫۰۰۱ سے بھی کم ہے اور تیسرے میں (اعشاریہ کے تین مقامات تک) ناقابل قدر یعنے بہ حیثیت مجموعی ۰٫۰۰۲ سے بھی کم۔

واقعہ یہ ہے کہ ما کی قیمت ۱٫۴۹۸ اور ۱٫۴۹۹ کے درمیان ہے اور اس لیے خطا ۰٫۰۰۱ سے کم ہے۔ ما کی یہ قیمت اُس مساوات کے تکمل سے معلوم ہوئی ہے جس سے

$$۲ \text{ مس}^{-1} \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{لوک}_{\text{و}} (\text{لا}^2 + \text{ما}^2) - ۴$$

حاصل ہوتا ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں کے عددی نتیجے حاصل کرو جن میں اعشاریہ کے اتنے مقامات لو جن کا صحیح ہونا ممکن ہو۔

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{10} \left\{ \text{ما}^{\frac{1}{2}} - 1 + \text{لوک}_{\text{و}} (\text{لا} + \text{ما}) \right\}$ ، اگر ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو ما معلوم کرو جبکہ لا = ۱ ، ھ کو ۲ کے مساوی لو (کیونکہ ف بہت چھوٹا ہے)۔

(۲) پچھلے سوال میں قریب تر تقرب ، عمل کو دو حصوں میں تقسیم کرکے ، حاصل کرو۔

(۳) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{لا}^2 - \text{ما})^{\frac{1}{2}} - 1$ ، اگر ما = ۴ جبکہ لا = ۲٫۳ تو ما معلوم

کرو جبکہ لا = ۷٫۲ (ا) صرف ایک حصہ عمل سے، (ب) عمل کو دو حصوں میں تقسیم کر کے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲ - \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اور ما = ۲ جبکہ لا = ۱ تو (۱۰۱

$\text{ما} = \text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}$

پس رُنجے کے طریقہ سے حاصل شدہ نتیجے کی خطائیں، (ا) ه = ۴٫۰، (ب) ه = ۲٫۰، (ج) ه = ۱٫۰ لیکر (ہر صورت میں ایک حصہ عمل سے) معلوم کرو اور اِن خطاؤں کا مقابلہ اِن کی محسوبہ بالائی انتہاؤں کے ساتھ کرو۔

(۵) اگر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات کو رُنجے کے طریقہ سے حل کیا جائے اور نتیجہ میں ع (ه) کی خطاء ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{\text{ه} \leftarrow ۰} \frac{\text{ع (ه)}}{\text{ع (ن ه)}} = \frac{۱}{\text{ن}^۴}$$

پس ثابت کرو کہ عمل کو دو حصوں میں تقسیم کرنے سے جو خطاء حاصل ہوتی ہے وہ ایک حصہ عمل سے حاصل شدہ خطاء کا تقریباً $\frac{۱}{۱۶}$ ہے، یعنے عمل کے حصوں کو دگنا کرنے سے اعشاریہ کے ایک زائد مقام تک صحیح نتیجہ (تقریباً) حاصل ہوتا ہے۔

۸۸ — ہمزاد مساواتوں پر توسیع*۔ اِس طریقہ کی توسیع ہمزاد مساواتوں پر بہ آسانی عمل میں آسکتی ہے۔ ثبوت چونکہ دفعہ ۸۶ کے مشابہ ہے اور ذرا طویل ہے اِس لیے ہم صرف ایک مثال سے اِس کی توضیح کرتے ہیں۔ یہ مثال اور حل طلب مثالوں میں دی ہوئی مثالیں قدرے ترمیم کے ساتھ رُنجے کے مقالہ سے لی گئی ہیں۔

مثال — $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۲\text{ی} - \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{ف (لا، ما، ی)}$، فرض کرو

فری / فرلا = گ (لا، ما، ی) = ما / (۱ − ما^۲)^½ ، فرض کرو

اگر ما = ۰ء۲۰۲۷ اور ی = ۱ء۰۲۰۲ جبکہ لا = ۰ء۲ تو ما اور ی معلوم کرو جبکہ لا = ۰ء۴۔

یہاں ا = ۰ء۲، ب = ۰ء۲۰۲۷، ج = ۱ء۰۲۰۲، ف ب = ف (۰ء۲، ۰ء۲۰۲۷، ۱ء۰۲۰۲) = ۱ء۰۲۷، گ ب = ۰ء۲۰۷۰، ھ = ۰ء۲

ک′ = ھ ف ب = ۰ء۲ × ۱ء۱۰۲۷ = ۰ء۲۰۵۴

ل′ = ھ گ ب = ۰ء۲ × ۰ء۲۰۷۰ = ۰ء۰۴۱۴

ک″ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک′، ج + ل′)

= ۰ء۲ × ف (۰ء۴، ۰ء۴۰۸۱، ۱ء۰۶۱۶)

= ۰ء۲۲۰۶

ل″ = ھ گ (ا + ھ، ب + ک′، ج + ل′)

= ۰ء۲ × گ (۰ء۴، ۰ء۴۰۸۱، ۱ء۰۶۱۶)

= ۰ء۰۸۹۴

ک‴ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک″، ج + ل″)

= ۰ء۲ × ف (۰ء۴، ۰ء۴۲۳۳، ۱ء۱۰۹۶)

= ۰ء۲۳۲۲

ل‴ = ھ گ (ا + ھ، ب + ک″، ج + ل″)

= ۰ء۲ × گ (۰ء۴، ۰ء۴۲۳۳، ۱ء۱۰۹۶)

= ۰ء۰۹۳۴

ک۱ = ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ ک′، ج + ½ ل′)

= ۰ء۲ × ف (۰ء۳، ۰ء۳۰۵۴، ۱ء۰۴۰۹)

= ۰ء۲۱۲۸

ل۱ = ھ گ (ا + ½ ھ، ب + ½ ک′، ج + ½ ل′)

= ۲ء۰ × گ (۳ء۰، ۰۵۴ء۳، ۰۴۰۹ء۱)

= ۰۶۴۱ء۰

ک۲ = ۱/۲ (کَ + کً) = ۲۱۸۸ء۰

ل۲ = ۱/۲ (لَ + لً) = ۰۶۷۴ء۰

ک = ک۱ + ۱/۳ (ک۲ − ک۱) = ۲۱۴۸ء۰ + ۰۰۲۰ء۰ = ۲۱۴۸ء۰

ل = ل۱ + ۱/۳ (ل۲ − ل۱) = ۰۶۴۱ء۰ + ۰۰۱۱ء۰ = ۰۶۵۲ء۰

پس ما = ۲۰۲۷ء۰ + ۲۱۴۸ء۰ = ۴۱۷۵ء۰

اور ی = ۰۲۰۲ء۱ + ۰۶۵۲ء۰ = ۰۸۵۴ء۱

غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح –

حل طلب مثالیں

(۱) دفعہ ۸۸ کی مثال میں ثابت کرو کہ اگر ما = ۴۱۷۵ء۰ اور ی = ۰۸۵۴ء۱ جبکہ لا = ۴ء۰ تو ما = ۶۶۱۴ء۰ اور ی = ۲۱۴۵ء۱ (غالباً اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح) جبکہ لا = ۶ء۰

(۲) فرط/فری = −۲ی + (۱ − طؔ)^½ / ر ، فرر/فری = ط / (۱ − طؔ)^½ ،

اگر ط = ۷۵۰۰ء۰ اور ر = ۶ء۰ جبکہ ی = ۲۱۴۵ء۱ تو قیمتیں ط = ۵۱۶۳ء۰ اور ر = ۷۳۴۸ء۰ حاصل کرو جبکہ ی (جسکو متبوع متغیر لینا ہوگا) = ۳۷۴۵ء۱ – ثابت کرو کہ ر کی قیمت اعشاریہ کے چار مقاموں تک غالباً صحیح ہے لیکن ط کی قیمت میں اعشاریہ کا تیسرا مقام غلط ہوسکتا ہے –

(۳) پچھلی مثال میں ط = جم فہ اور دفعہ ۸۸ کی مثال میں ما = جب فہ،

لا = ر رکھ کر ثابت کرو کہ ہر صورت میں مساواتیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرر}} = \text{مس فہ} ، \quad ۲\,\text{ی} = \frac{\text{جب فہ}}{\text{ر}} + \text{جم فہ}\ \frac{\text{فرفہ}}{\text{فرر}}$$

حاصل ہوتی ہیں اِن سے پانی کے ایک قطرہ کی شکل جو ایک افقی مستوی پر ساکن ہو حاصل ہوتی ہے۔

۸۹ — ہیون اور کُٹا کے طریقے[ف۱] - یہ طریقے رُنجے کے طریقہ کے بہت مشابہ ہیں، اِس لیے ہم اِن کو اختصاراً بیان کریں گے۔

مسئلہ یہ ہے کہ اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ف (لا ، ما) اور ما = ب جبکہ لا = ا تو ما کا اضافہ ک معلوم کرنا جبکہ لا کا اضافہ ھ معلوم ہو۔

ہیون نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

کَ = ھ ف (ا ، ب)

کً = ھ ف (ا + $\frac{۱}{۳}$ ھ ، ب + $\frac{۱}{۳}$ کَ)

کٍ = ھ ف (ا + $\frac{۲}{۳}$ ھ ، ب + $\frac{۲}{۳}$ کً)

اِس کے بعد وہ $\frac{۱}{۴}$ (کَ + ۳ کٍ) کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

کُٹا نے ترتیب ذیل میں محسوب کیا ہے:

کَ = ھ ف (ا ، ب)

کً = ھ ف (ا + $\frac{۱}{۳}$ ھ ، ب + $\frac{۱}{۳}$ کَ)

ف۱ *Zeitschrift fur Mathematik und Physik,* Vols 45 and 46

ک‴ = ھ ف (ا + ۲/۳ ھ، ب + ک″ − ۱/۳ ک′)

ک⁗ = ھ ف (ا + ھ، ب + ک‴ − ک″ + ک′)

اِس کے بعد وہ ۱/۸ (ک′ + ۳ک″ + ۳ک‴ + ک⁗) کو ک کی تقریبی قیمت کے طور پر لیتا ہے۔

اِن تقریبوں کی تصدیق ٹیلر کے سلسلہ میں پھیلانے سے ہوسکتی ہے جیساکہ رُنجے کی صورت میں کیا گیا تھا۔

حل طلب مثالیں

اگر فرما/فرلا = (ما − لا)/(ما + لا) اور ما = ۱ جبکہ لا = ۰۔ تو ما کی قیمت رُنجے، ہیون، اور کُٹا کے طریقوں سے (۸ اہم مقاموں تک) معلوم کرو جبکہ لا = ۲،۱ اور اِن کا مقابلہ صحیح قیمت ۱،۱۶۷۸۱۴۷ کے ساتھ کرو۔ [کُٹا کے مقالہ سے]

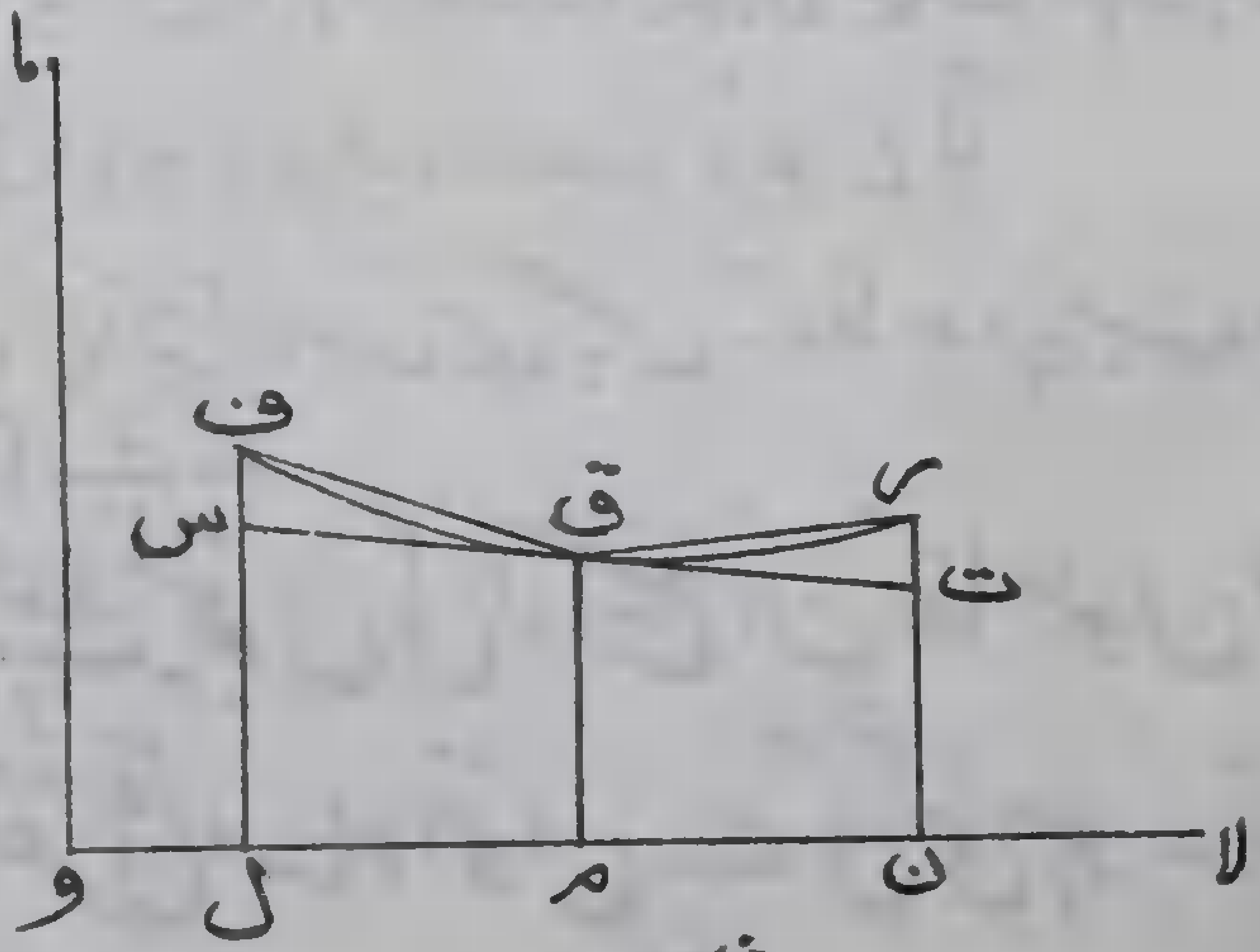
۹۰ ۔ دوسرا طریقہ اور خطاء کے حدود۔ اِس کتاب کے مصنف نے چار ضابطے معلوم کئے ہیں[1] جن سے چار عدد حاصل ہوتے ہیں، اِن میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان ما کا مطلوبہ اضافہ واقع ہونا چاہیئے۔ جب اس کو رُنجے کی مثال پر استعمال کیا جاتا ہے تو اِس نئے ضابطہ سے بمقابلہ کسی پچھلے طریقہ کے زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہوتے ہیں۔ (۱۰۵

یہ طریقہ محدود تکملوں سے متعلق حسب ذیل مشہور نتیجوں کی توسیع ہے۔

[1] Phil. Mag. June 1919 اِس مقالہ کا بیشتر حصہ یہاں لیا گیا ہے۔

۹۱ — حدود جن کے درمیان ایک محدود تکملہ کی قیمت واقع ہوتی ہے

فرض کرو کہ فا (لا) ایک تفاعل ہے جو لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان مع اپنے پہلے اور دوسرے تفرقی سروں کے مسلسل (اور اس لیے محدود) ہے۔ فرض کرو کہ اس وقفہ میں فا (لا) کی علامت نہیں بدلتی۔ شکل میں یہ علامت مثبت ہے چنانچہ منحنی اوپر وار مقعر ہے۔ ل ف، م ق، اور ن ر محور ما کے متوازی ہیں اور ل ن کا وسطی نقطہ م ہے اور ق پر کا مماس س ق ت ہے۔ و ل = ا، ل ن = ھ



شکل (۲۴)

تب رقبہ ف ل ن ر منحرف س ل ن ت کے رقبہ اور منحرفوں ف ل م ق، ق م ن ر کے رقبوں کے مجموعہ کے درمیان واقع ہے یعنے تکملہ

$$\int_{ا}^{ا+ھ} فا(لا)\, فرلا$$

قیمتوں ہ فا (ا + ½ ہ) = ا (فرض کرو)

اور ⅙ ہ {فا(ا) + ۲ فا(ا + ½ ہ) + فا(ا + ہ)} = ب (فرض کرو)

کے درمیان واقع ہے۔

شکل میں فاً(لا) مثبت ہے اور ا زیرین حد اور ب بالائی حد ہے۔ اگر فاً(لا) منفی ہوتا تو ا بالائی حد اور ب زیرین حد ہوتی۔ تکملہ کی تقریبی قیمت کو ا اور ب کا اوسط حسابی نہیں بلکہ

⅔ ب + ⅓ ا لینا مناسب ترین ہے۔ یہ قیمت ٹھیک ہوتی ہے جبکہ ف ق ر ایک مکانی کی قوس ہو جس کا محور محور ما کے متوازی ہو۔ یہ اس عام تر صورت میں بھی ٹھیک ہے جبکہ

فا(لا) = ا + ب لا + ج لا² + ع لا³

جیسا کہ احصاء کی اکثر کتابوں میں سمپسن کے قاعدہ پر بحث کرتے وقت ثابت کیا جاتا ہے۔

۹۲ - پچھلے نتیجوں کی توسیع اُن تفاعلوں پر جن کی تعریف تفرقی مساواتوں سے کی گئی ہو۔

اُس تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف

فرما / فرلا = ف (لا، ما)، ما = ب جبکہ لا = ا

سے کی گئی ہے جہاں ف (لا، ما)، لا کی قیمتوں ا تا ا + ہ اور ما کی قیمتوں ب - ہ تا ب + ہ کی سعت میں حسب ذیل قیود کے تحت ہے۔ یہ معلوم ہو گا کہ ما کا اضافہ عدداً ہ سے کم ہوتا ہے اور اسلیے

ما کی تمام قیمتیں اوپر کی سمت میں واقع ہوتی ہیں - قیود حسب ذیل ہیں:

(۱) ف (لا، ما) محدود اور مسلسل ہو، نیز اِس کے پہلے اور دوسرے جزئی تفرقی سر بھی محدود اور مسلسل ہوں -

(۲) وہ کبھی اکائی سے متجاوز نہ ہو - اگر یہ شرط پوری نہ ہو تو ہم بالعموم ایک نئی مساوات حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی بجائے ما کو متبوع متغیر لینے سے یہ شرط پوری ہوتی ہے -

(۳) $\dfrac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فرلا}^3}$ اور $\dfrac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ علامت نہ بدلیں -

فرض کرو کہ م اور مـ کوئی دو ایسے عدد ہیں کہ

- ۱ ≤ م < ف < مـ ≤ ۱

تب اگر ما کی قیمتوں کو جبکہ لا، ا + ½ ھ اور ا + ھ ہو علی الترتیب ب + ز اور ب + ک سے تعبیر کیا جائے[۱] تو

- ½ ھ ≤ ½ م ھ < ز < ½ مـ ھ ≤ ½ ھ ...... (۱)

اور - ھ ≤ م ھ < ک < مـ ھ ≤ ھ، ...... (۲)

اب ہم پچھلے دفعہ کے ضابطے استعمال کریں گے اور ما کو وہی تفاعل سمجھیں گے جس کی تعریف

$$\text{ما} = \text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{ا}+\text{ھ}} \text{فا}(\text{لا})\,\text{فرلا}$$

سے ہوتی ہے، اِس لیے

[۱] نچلی تمام مساواتیں صرف ھ کے مثبت ہونے کی صورت میں درست ہیں لیکن اگر وہ منفی ہو تو اِن میں ترمیم کرنی ہوگی لیکن اِس دفعہ کا آخری نتیجہ پھر بھی درست رہتا ہے -

$$\text{ک} = \int_{\text{ا}}^{\text{ا}+\text{ھ}} \text{فا (لا) فرلا}$$

ہمیں اِن ضابطوں کو فا کی بجائے ف کی رقوم میں بیان کرنا ہے۔

اب فا (ا) = $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت جبکہ لا = ا

اِس لیے فا (ا) = ف (ا ، ب)

اسی طرح فا (ا + $\frac{1}{2}$ ھ) = ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + ز) (۱۰۷

اور فا (ا + ھ) = ف (ا + ھ ، ب + ک)

اب اگر $\dfrac{\text{جفف}}{\text{جفما}}$ مثبت ہے اور اِس لیے ف ، ما کے ساتھ بڑھتا ہے تو نامساواتوں (۱) اور (۲) سے

ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) > ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + ز)

> ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + $\frac{1}{2}$ مھ) ..... (۳)

اور ف (ا + ھ ، ب + م ھ) > ف (ا + ھ ، ب + ک)

> ف (ا + ھ ، ب + مھ) ...... (۴)

لیکن اگر $\dfrac{\text{جفف}}{\text{جفما}}$ منفی ہے تو

ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + $\frac{1}{2}$ م ھ) < ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ،

ب + ز) < ف (ا + $\frac{1}{2}$ ھ ، ب + $\frac{1}{2}$ مھ) ..... (۵)

اور ف (ا + ھ ، ب + م ھ) < ف (ا + ھ ، ب + ک)

< ف (ا + ھ، ب + م ھ) ...... (۶)

پس اگر فاً(لا) = (فز۲ ما)/(فز لا۲) مثبت ہو اور (جف ف)/(جف ما) بھی مثبت ہو تو دفعہ ۹۱ کے نتیجہ

ا < ک < ب

کی بجائے ع < ک < ق، .... (۷)

کو رکھا جا سکتا ہے جہاں

ع = ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ م ھ)

اور ق = ¼ ھ {ف (ا، ب) + ۲ف (ا + ½ ھ، ب + ½ م ھ) + ف (ا + ھ، ب + م ھ)}

لیکن اگر فاً (لا) مثبت ہو اور (جف ف)/(جف ما) منفی تو

ع < ک < ق، .... (۸)

جہاں ع = ھ ف (ا + ½ ھ، ب + ½ م ھ)

اور ق = ¼ ھ {ف (ا، ب) + ۲ف (ا + ½ ھ، ب + ½ م ھ) + ف (ا + ھ، ب + م ھ)}

اسی طرح اگر فاً(لا) اور (جف ف)/(جف ما) دونوں منفی ہوں تو

ع > ک > ق، .... (۹)

لیکن اگر فاً (لا) منفی اور (جف ف)/(جف ما) مثبت ہو تو

ع > ک > ق، .... (۱۰)

اِن نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر اِس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ **ہر صورت میں** (اُن قیود کے تحت جن کا ذکر اِس دفعہ کی ابتدا میں کیا جا چکا ہے) کہ **چار عددوں پ، ع، ق اور ق میں سے بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے کے درمیان واقع ہوتا ہے۔**

تقریبی ضابطہ کے طور پر ہم ک ≑ $\frac{2}{3}$ ب + $\frac{1}{3}$ ا کو استعمال کرتے ہیں اور اِس میں ب کی بجائے ق یا ق اور ا کی بجائے ع یا ع درج کرتے ہیں۔

۹۳ ـ ایک عددی مثال پر اطلاق

اُس مثال پر غور کرو جس کو رُنجے اور کُٹا نے اپنے طریقوں کی توضیح میں استعمال کیا ہے یعنے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}} \text{، ما} = 1 \text{ جبکہ لا} = 0$$

ما کا اضافہ ک معلوم کرنا مطلوب ہے جبکہ لا میں ۲ء۰ کا اضافہ ہو۔ یہاں ف (لا، ما) = $\frac{\text{ما} - \text{لا}}{\text{ما} + \text{لا}}$ ۔ یہ تفاعل اُن شرطوں کو پورا کرتا ہے جو پچھلے دفعہ میں بیان ہوئیں[1]۔

---

[1] چونکہ ف (لا، ما) مثبت ہے اِس لیے ما، ۱ اور ۲ء۱ کے درمیان واقع ہے۔ م اور م کو معلوم کرتے وقت ہم ہمیشہ ما کے لیے وہ کم سے کم سعت لیتے ہیں جو مل سکتی ہے۔ (شرطوں م > ف > م کی بجائے م ≤ ف ≤ م کو لیا جا سکتا ہے اور اِس سے آخری نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑیگا، صرف یہ فرق ہوگا کہ > جیسی چند علامتوں کی بجائے ≤ جیسی چند علامتیں ہوں گی۔)

ہم لیتے ہیں ھ = ۱، $م = \frac{۱ - ۰٫۲}{۱٫۲ + ۰٫۲} = \frac{۴}{۷}$

تب

$$ع_ب = ۰٫۱۶۵۴۳۲۱$$ (۱۰۸)

$$ع_پ = ۰٫۱۶۶۶۶۶۷$$

$$ق_ب = ۰٫۱۶۷۴۹۸۷$$

$$ق = ۰٫۱۶۹۰۴۷۶$$

اِس طرح ک، ع اور ق کے درمیان واقع ہے۔

		خطائیں
$\frac{۲}{۳}ق + \frac{۱}{۳}ع_پ$	= ۰٫۱۶۷۸۴۲۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۷
کٹا کی قیمت	۰٫۱۶۷۸۴۴۹	۰٫۰۰۰۰۰۳۲
رُنجے کی قیمت	۰٫۱۶۷۸۴۸۷	۰٫۰۰۰۰۰۷۰
ہیون کی قیمت	۰٫۱۶۸۰۲۵۰	۰٫۰۰۰۱۸۳۳

اِن میں سے دوسری، تیسری، اور چوتھی قیمتیں کُٹا نے محسوب کی تھیں۔ اب یہ مخصوص مثال محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$لوک\,(لا^۲ + ما^۲) - ۲\,مس^{-۱}\left(\frac{لا}{ما}\right) = ۰$$

اِس لیے ہم ک کی صحیح قیمت معلوم کرسکتے ہیں چنانچہ

صحیح قیمت = ۰٫۱۶۷۸۴۱۷

ظاہر ہے کہ اِس مثال میں مصنف کے طریقہ سے جو قیمت حاصل ہوئی ہے وہ صحیح قیمت سے قریب ترین ہے، خطائیں ساتھ ساتھ بیان کردی گئی ہیں۔

ہم اِس طریقہ کی جانچ زیادہ بڑے وقفہ ھ = ۱ کو لیکر بھی کرینگے۔ بلاشبہ نتیجہ کو حاصل کرنے کا زیادہ صحیح طریقہ عمل حساب کو کئی حصوں میں تقسیم کرکے تکمیل کرنا ہے مثلاً ھ = ۰٫۲، ۰٫۳ اور بالآخر ۰٫۵۔

تاہم یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ بڑے وقفہ کے لیے نتیجے کتنے غلط ہوتے ہیں:

ہم لیتے ہیں ہ = ۱، م = $\frac{۱-۱}{۱+۲}$ = ۰

تب $\frac{۲}{۳}$ ق + $\frac{۱}{۳}$ ع = ۰٫۵۰۰۰۰

		خطائیں
صحیح قیمت	= ۰٫۴۹۸۲۸	
ہماری قیمت	= ۰٫۵۰۰۰۰	۰٫۰۰۱۷۲
کُٹا کی قیمت	= ۰٫۴۹۹۱۴	۰٫۰۰۰۸۶
ہیون کی قیمت	= ۰٫۵۱۶۱۳	۰٫۰۱۷۸۵
رُنج کی قیمت	= ۰٫۵۲۳۸۱	۰٫۰۲۵۵۳

اب کُٹا کی قیمت قریب ترین ہے اور ہماری اس کے بعد۔

[ہ اور م کو متعین کرنے کا باقاعدہ طریقہ اور دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی رَیم کی توسیع کے لیے دفعہ ۱۸۳ کا مطالعہ کرو۔]

آڈمس کا عددی طریقہ جو شاید سب میں بہترین ہے دفعہ ۱۸۲ میں بیان کیا گیا ہے۔

(۱-۹)

نواں باب

سلسلوں میں حل۔ فرابنیس کا طریقہ

۹۴ — ساتویں باب میں ہم نے شکل

$$\frac{\text{فز}^{2}\,\text{ما}}{\text{فز لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} + \text{ق ما} = 0$$

کی متعدد مساواتوں کو حل کیا جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل تھے۔ ہر صورت میں حل شکل

$$\text{ما} = \text{ا ف (لا)} + \text{ب فا (لا)}$$

کا تھا جہاں ا اور ب اختیاری مستقل تھے۔

تفاعل ف (لا) اور فا (لا)، لا کی صحیح یا کسری قوتوں، جیوب اور جیوب التمام قوت نماؤں، اور لوکارثموں سے بنے تھے مثلاً

قو$^{\frac{1}{\text{لا}}}$، لا + لوک لا، لا$^{\frac{1}{2}}$ + لا$^{-\frac{1}{2}}$، لاجم لا، جب لا + قو$^{\text{لا}}$ (۱ + ۲ لا)

اِن میں سے پہلے اور دوسرے تفاعل میکلارن کے مسئلہ سے لا کی صحیح عددی اور صعودی قوتوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں، باقی دوسرے نہیں پھیلائے جا سکتے اگرچہ آخری تفاعل کو $\frac{1}{\text{لا}}$ کی رقوم میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اِس باب میں ہم فرابنیس[۵۱] (باشندہ برلن) کی اتباع کرتے ہوئے آزمائشی حل

$$ما = لا^{ج} (ا_{۰} + ا_{۱} لا + ا_{۲} لا^{۲} + ... ∞ \text{ تک})$$

اختیار کریں گے جس میں تمام ا مستقل[۵۲] ہیں۔

قوت نماج کو ایک دو درجی مساوات سے جس کو قوت نمائی مساوات کہتے ہیں معلوم کیا جائے گا۔ اِس مساوات کی اصلیں مساوی، مختلف مگر اِن کا فرق ایک صحیح عدد ہو، یا مختلف مگر اِن کا فرق صحیح عدد نہ ہو ہو سکتی ہیں۔ اِن صورتوں پر علحدہ علحدہ بحث کرنی ہوگی۔

اس آزمائشی حل کی خاص خوبی یہ ہے کہ اس سے حل کی ایک دوسری شکل جس میں لوگ لا شامل ہوتا ہے فوراً حاصل ہوتی ہے جبکہ تفرقی مساوات کا حل اس دوسری شکل ہوتا ہے۔

چونکہ $ق^{لا}$ جیسے تفاعلوں کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا نہیں جا سکتا (۱۱۰)

اِس لیے اُن تفرقی مساواتوں کی صورت میں جن کا حل اِس نوعیت کا ہو یہ طریقہ ناکام رہے گا۔ ہم ایک ایسے طریقہ کا ذکر کریں گے جس سے فوراً یہ معلوم ہو سکیگا کہ کونسی مساواتوں کو فرابنیس کی شکلوں (باقاعدہ تکملوں) میں حل کیا جا سکتا ہے اور لا کی قیمتوں کی کس وسعت میں یہ حل متدرق ہوں گے۔

اِس باب کا مقصد یہ ہے کہ مثالوں کو کس طرح حل کیا جائے۔ اِس میں جو مسئلے پیش کئے گئے ہیں اُن کے باقاعدہ ثبوت آئندہ باب میں دئے جائیں گے۔

[۵۱] Crelle, Vol. LXXVI., 1873, pp. 214-224

[۵۲] اِس باب میں لاحقوں کو تفرقوں کی تعبیر کے لیے استعمال نہیں کیا جائے گا۔

اِن مثالوں میں بیسل[۱]، لیجنڈر[۱] اور ریکٹی[۱] کی اہم مساواتیں ملیں گی۔ زائد ہندسی گاس[۱] کی مساوات اور اس کے جو بیس حلوں کا ایک خاکہ بھی دیا گیا ہے۔

۹۵ - صورت (۱) - قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی لیکن اِن کا فرق ایک صحیح عدد نہیں۔

مساوات

$$(\text{۲لا} + \text{لا}^{۳})\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{۶ لا ما} = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

پر غور کرو۔

$$\text{رکھو}\quad \text{ی} = \text{لا}^{\text{ج}}(\text{ا}_{۰} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا}^{۲} + \ldots)\ \text{جہاں}\ \text{ا}_{۰} \neq ۰$$ [۲]

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ا}_{۰}\,\text{ج}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱} + \text{ا}_{۱}(\text{ج}+۱)\,\text{لا}^{\text{ج}} + \text{ا}_{۲}(\text{ج}+۲)\,\text{لا}^{\text{ج}+۱} + \ldots\ldots$$

---

[۱] فریڈرک ولہم بیسل (مینڈن، ۱۷۸۴ء تا ۱۸۴۶ء) کونیشسبرگ کی رصدگاہ کے ناظم تھے۔ وہ "بیسل کے تفاعلات" کے لیے بہت مشہور ہیں۔

اڈرین میری لیجنڈر (ٹولوس، ۱۷۵۲ء تا ۱۸۳۳ء) اپنے (Zonal Harmonics) یا "لیجنڈر کے سروں" کی وجہ سے بہت مشہور ہیں۔ موصوف نے ناقصی تکملوں اور عددوں کے نظریہ پر بھی بہت کام کیا ہے۔

کاونٹ ریکٹی (وینس، ۱۶۷۶ء تا ۱۷۵۴ء) نے "ریکٹی کی مساوات" اور نیز ایک دی ہوئی مساوات کے رتبہ کو گھٹانے کے امکان پر مقالات تحریر کئے۔

کارل فریڈرک گاس (برنسوک، ۱۷۷۷ء تا ۱۸۵۵ء) "انیسویں صدی کے ارشمیدس" مشہور ہیں، آپ نے بہت سے مضامین پر اپنی تحقیقات شائع کی ہیں، ان میں عددوں کا نظریہ، مقطعات، لامتناہی سلسلے، خطاوں کا نظریہ، علم ہیئت، ارضیات، برق اور مقناطیس شامل ہیں۔

[۲] لا کی صعودی قوتوں کے کسی سلسلہ کو اس طرح رقم بہ رقم تفرق کرنا جائز ہے بشرطیکہ تفرق استدقاق کے علاقہ کے اندر ہو۔ دیکھو برامویچ Infinite Series دفعہ ۵۲

اور فر۲ ی / فر لا۲ = اِ٠ ج (ج - ۱) لا^(ج-۲) + اِ۱ (ج + ۱) ج لا^(ج-۱)

+ اِ۲ (ج + ۲) (ج + ۱) لا^ج + ...

(۱) میں[لہ] درج کرو اور لا کی متواتر قوتوں کے سروں کو صفر کے مساوی رکھو۔

لا کی کم ترین قوت لا^(ج-۱) ہے۔ اِس کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے

اِ٠ { ۲ ج (ج - ۱) - ج } = ٠

یعنی ج (۲ ج - ۳) = ٠ ، .... (۲)

کیونکہ اِ٠ ≠ ٠

(۲) کو قوت نمائی مساوات کہتے ہیں۔ (۱۱۱)

لا^ج کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے

اِ۱ { ۲ (ج + ۱) ج - (ج + ۱) } = ٠ یعنی اِ۱ = ٠ ، ..... (۳)

لا^(ج+۱) کے سر میں زیادہ رقمیں ہیں اور اِس سے حاصل ہوتا ہے

اِ۲ { ۲ (ج + ۲) (ج + ۱) - (ج + ۲) } + اِ٠ { ج (ج - ۱) - ۶ } = ٠

یعنی اِ۲ (ج + ۲) (۲ ج + ۱) + اِ٠ (ج + ۲) (ج - ۳) = ٠

یعنی اِ۲ (۲ ج + ۱) + اِ٠ (ج - ۳) = ٠ ، .... (۴)

اسی طرح اِ۳ (۲ ج + ۳) + اِ۱ (ج - ۲) = ٠ ، .... (۵)

اِ۴ (۲ ج + ۵) + اِ۲ (ج - ۱) = ٠ ، .... (۶)

لہ یا اُس جملہ میں جو ما کی بجائے ی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

علیٰ ہذا۔

(۳)، (۵)، وغیرہ سے

$$ا_{۲ن+۱} = \cdots = ا_{۵} = ا_{۳} = ا_{۱} = ۰$$

(۴)، (۶) وغیرہ سے

$$\frac{ا_{۲}}{ا_{۰}} = -\frac{ج-۲}{۲ج+۱} \text{ ، } \frac{ا_{۴}}{ا_{۲}} = -\frac{ج-۱}{۲ج+۵} \text{ ، }$$

$$\frac{ا_{۶}}{ا_{۴}} = -\frac{ج+۱}{۲ج+۹} \text{ ، } \cdots \text{ ، } \frac{ا_{۲ن}}{ا_{۲ن-۲}} = -\frac{ج+۲ن-۵}{۲ج+۴ن-۳}$$

لیکن (۲) سے ج = ۰ یا $\frac{۳}{۲}$

اِس طرح اگر ج = ۰ تو $ا_{۰}$ کی بجائے ا رکھنے سے

$$ی = ا\{۱ + ۳لا^{۲} + \frac{۳}{۵}لا^{۴} - \frac{۱}{۱۵}لا^{۶} + \frac{۱}{۶۵}لا^{۸} + \cdots\} = ا ع \text{ (فرض کرو)}$$

اور اگر ج = $\frac{۳}{۲}$ تو $ا_{۰}$ کی بجائے (جو اختیاری مستقل ہے) ب رکھنے سے

$$ی = ب لا^{\frac{۳}{۲}}\{۱ + \frac{۳}{۸}لا^{۲} - \frac{۳\times۱}{۱۶\times۸}لا^{۴} + \frac{۵\times۳\times۱}{۲۴\times۱۶\times۸}لا^{۶} - \cdots\}$$

$$= ب و \text{ (فرض کرو)}$$

پس ی = ا ع + ب و ایسا حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں اور اِس لیے اِس کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو نامساوی اصلیں عہ اور بہ ہوں اور اِن کا فرق ایک صحیح عدد نہ ہو تو ج کی اِن قیمتوں کو ی کے سلسلہ میں درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں۔

حل طلب مثالیں۔

$$(\text{۱})\quad \text{۴ لا}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} + \text{۲}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ما} = \text{۰}$$

$$(\text{۲})\quad \text{۲ لا}\,(\text{۱} - \text{لا})\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} + (\text{۱} - \text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{۳ ما} = \text{۰}$$

$$(\text{۳})\quad \text{۹ لا}\,(\text{۱} - \text{لا})\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} - \text{۱۲}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{۴ ما} = \text{۰}$$

$$(\text{۴})\quad \text{لا}^{\text{۲}}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + (\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ن}^{\text{۲}})\,\text{ما} = \text{۰}$$

؛ یہ مساوات ن ویں رتبہ کی بیسل کی مساوات ہے جس میں ۲ ن صحیح عدد نہیں ہے۔

۹۶ ـ پچھلے دفعہ میں حاصل شدہ سلسلہ کا استدقاق۔ (۱۱۲)

اعلیٰ جبر و مقابلہ یا علم تحلیل کی تقریباً ہر کتاب میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ لامتناہی سلسلہ $\text{ع}_{\text{۱}} + \text{ع}_{\text{۲}} + \text{ع}_{\text{۳}} + \dots$ مستدق ہوتا ہے اگر

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \left| \frac{\text{ع}_{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \right| < \text{۱}$$

اس سلسلہ میں جو گذشتہ دفعہ میں حاصل کیا گیا ہے $\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{۲ن}-\text{۲}}\,\text{لا}^{\text{ج}+\text{۲ن}-\text{۲}}$

یعنی

$$\frac{\text{ع}_{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ا}_{\text{۲ن}}}{\text{ا}_{\text{۲ن}-\text{۲}}}\,\text{لا}^{\text{۲}}$$

$$= -\,\frac{\text{ج} + \text{۲ن} - \text{۵}}{\text{۲ج} + \text{۴ن} - \text{۳}}\,\text{لا}^{\text{۲}}$$

اور اس کی انتہا جبکہ ن ← ∞، ۔ ½ لا^۲ ہے جو ج کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔
اِس لیے دونوں محصلہ سلسلے |لا| < √۲ کے لیے مستدق ہیں۔

یہ دیکھنا دلچسپ ہے کہ اگر تفرقی مساوات شکل

$$\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا ع (لا)}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق (لا) ما} = 0$$

میں تحویل ہو تو ع (لا) اور ق (لا) قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں مثلاً اوپر کی مثال میں ایسے سلسلوں میں جو لا کی اُن قیمتوں کے لیے مستدق ہیں جن کا مقیاس |لا| < √۲ ہے

$$\text{ع (لا)} = \frac{-1}{2+\text{لا}^{2}}$$

اور

$$\text{ق (لا)} = \frac{-6\,\text{لا}^{2}}{2+\text{لا}^{2}}$$

یعنے اِس مثال میں استدقاق کا علاقہ اُس علاقہ پر منطبق ہے جس کے لیے ع (لا) اور ق (لا)، قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں۔ دسویں باب میں ہم ثابت کریں گے کہ یہ مسئلہ عام طور پر درست ہے۔

حل طلب مثالیں۔

مثالوں کے پچھلے جٹ کے حلوں کے لیے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔ ہر صورت میں اِس امر کی تصدیق کرو کہ استدقاق کا علاقہ اُس علاقہ کے مماثل ہے جس کے لیے ع (لا) اور ق (لا)، قوت کے مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں۔

۹۷ ۔ صورت (۲)۔ جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں

مساوی ہوں ۔ مساوات

$$(\text{لا}-\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2}+(1-5\,\text{لا})\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}}-4\,\text{ما}=0$$

پر غور کرو ۔

رکھو $\text{ی}=\text{لا}^{\text{ج}}(\text{ا}_0+\text{ا}_1\,\text{لا}+\text{ا}_2\,\text{لا}^2+\ldots\ldots)$

اور تفرقی مساوات میں درج کرنے کے بعد لا کی متواتر قوتوں کے سروں کو صفر کے مساوی رکھو (حسب دفعہ ۹۵) ۔ تو

$$\text{ا}_0\left\{\text{ج}(\text{ج}-1)+\text{ج}\right\}=0$$ (۱۱۳)

یعنی $\text{ج}^2=0$ .... (1)

$$\text{ا}_1\left\{(\text{ج}+1)\text{ج}+\text{ج}+1\right\}-\text{ا}_0\left\{\text{ج}(\text{ج}-1)+5\,\text{ج}+4\right\}=0$$

یعنی $\text{ا}_1(\text{ج}+1)^2-\text{ا}_0(\text{ج}+2)^2=0$ .... (2)

$\text{ا}_2(\text{ج}+2)^2-\text{ا}_1(\text{ج}+3)^2=0$ .... (3)

$\text{ا}_3(\text{ج}+3)^2-\text{ا}_2(\text{ج}+4)^2=0$ .... (4)

اور علیٰ ہذا

$$\text{پس ی}=\text{ا}_0\,\text{لا}^{\text{ج}}\left\{1+\left(\frac{\text{ج}+2}{\text{ج}+1}\right)^2\text{لا}+\left(\frac{\text{ج}+3}{\text{ج}+1}\right)^2\text{لا}^2+\left(\frac{\text{ج}+4}{\text{ج}+1}\right)^2\text{لا}^3+\ldots\ldots\right\}$$

ایک حل ہے اگر ج = ۰

اِس سے دو کی بجائے صرف ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن اگر ہم تفرقی مساوات کی دائیں جانب اِس سلسلہ کو

درج کریں (ج = ۰ رکھے بغیر) تو ہمیں صرف واحد رقم $\text{ا}_{۰}\,\text{ج}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱}$ حاصل ہوتی ہے۔ چونکہ اس میں ج کا مربع شریک ہے اس لیے ج کے لحاظ سے اس کا جزئی تفرقی سر یعنے $۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{ج}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱} + \text{ا}_{۰}\,\text{ج}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱}\,\text{لوگ لا}$ بھی معدوم ہوگا جبکہ ج = ۰ ۔ یعنے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ج}}\left[(\text{لا}-\text{لا}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر لا}^{۲}}+(۱-۵\,\text{لا})\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}-۴\right]\text{ی}$$

$$= ۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{ج}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱} + \text{ا}_{۰}\,\text{ج}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱}\,\text{لوگ لا}$$

چونکہ تفرقی عامل تبادلہ پذیر ہوتے ہیں اس لیے اس کو

$$\left[(\text{لا}-\text{لا}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر لا}^{۲}}+(۱-۵\,\text{لا})\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}-۴\right]\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$$

$$= ۲\,\text{ا}_{۰}\,\text{ج}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱} + \text{ا}_{۰}\,\text{ج}^{۲}\,\text{لا}^{\text{ج}-۱}\,\text{لوگ لا}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

پس $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ تفرقی مساوات کا دوسرا حل ہے اگر تفرق کے بعد ج کو صفر کے مساوی رکھا جائے۔

تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}} = \text{ی لوگ لا} + \text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ج}}\left\{۲\left(\frac{\text{ج}+۲}{\text{ج}+۱}\right)\frac{-۱}{(\text{ج}+۱)^{۲}}\,\text{لا}\right.$$

$$\left.+۲\left(\frac{\text{ج}+۳}{\text{ج}+۱}\right)\frac{-۲}{(\text{ج}+۱)^{۲}}\,\text{لا}^{۲}+۲\left(\frac{\text{ج}+۴}{\text{ج}+۱}\right)\frac{-۳}{(\text{ج}+۱)^{۲}}\,\text{لا}^{۳}+\ldots\right\}$$

اوپر کے دو سلسلوں میں ج = ۰ اور علی الترتیب $\text{ا}_{۰} = ۱$ اور ب رکھنے سے

ی = ا { ۱² + ۲² لا + ۳² لا² + ۴² لا³ + ... } = ا ی، فرض کرو

اور جف ی / جف ج = ب ی لوک لا - ۲ ب { ۱ × ۲ لا + ۲ × ۳ لا² + ۳ × ۴ لا³
+ .... } = ب و، فرض کرو

کامل ابتدائی ا ی + ب و ہے۔

(۱۱۴) عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلیں ج = ۱ مساوی ہوں تو ج کی اس قیمت کو ی میں اور جف ی / جف ج میں درج کرنے سے دو غیر تابع حل حاصل ہوتے ہیں۔ دوسرے حل میں ہمیشہ پہلے حل (یا اس کے عددی ضعف) اور لوک لا کا حاصل ضرب، جمع شدہ شریک ہوگا۔

اوپر کی مخصوص مثال پر غور کرو اور ع (لا) اور ق (لا) پر دفعہ ۹۶ کے مطابق غور کرو تو معلوم ہوگا کہ یہ سلسلہ مستدق ہے اگر |لا| < ۱۔ یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ درست ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) (لا - لا²) فر² ما / فر لا² + (۱ - لا) فر ما / فر لا - ما = ۰

(۲) صفر رتبہ کی بیسل کی مساوات

لا فر² ما / فر لا² + فر ما / فر لا + لا ما = ۰

(۳) لا فر² ما / فر لا² + (۱ + لا) فر ما / فر لا + ۲ ما = ۰

$$(۴)\quad ۴\,(\text{لا}^{۴}-\text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}+۸\,\text{لا}^{۳}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}-\text{ما}=۰$$

۹۸ - صورت (۳) جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں صحیح عدد کا فرق ہو اور اِن میں سے ایک اصل سے ی کا ایک سر لامتناہی ہو جائے۔

ایک رتبہ کی بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^{۲}\,\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}+\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}+(\text{لا}^{۲}-۱)\,\text{ما}=۰$$

پر غور کرو۔

اگر ہم دفعہ ۹۵ کے مطابق عمل کریں تو معلوم ہوگا کہ

$$\text{ا}_{۰}\left\{\text{ج}(\text{ج}-۱)+\text{ج}-۱\right\}=۰$$

یعنے

$$\text{ج}^{۲}-۱=۰ \qquad \ldots\ldots\ (۱)$$

$$\text{ا}_{۱}\left\{(\text{ج}+۱)^{۲}-۱\right\}=۰$$

$$\text{ا}_{۱}\left\{(\text{ج}+۱)^{۲}-۱\right\}=۰$$

یعنے

$$\text{ا}_{۱}=۰ \qquad \ldots\ldots\ (۲)$$

$$\text{ا}_{۲}\left\{(\text{ج}+۲)^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{۰}=۰ \qquad \ldots\ldots\ (۳)$$

اور

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(\text{ج}+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰ \qquad \ldots\ldots\ (۴)$$

اِس لیے

$$\text{ی}=\text{ا}_{۰}\,\text{لا}^{\text{ج}}\left\{۱-\frac{\text{لا}^{۲}}{(\text{ج}+۱)(\text{ج}+۳)}+\frac{\text{لا}^{۴}}{(\text{ج}+۱)(\text{ج}+۳)^{۲}(\text{ج}+۵)}-\frac{\text{لا}^{۶}}{(\text{ج}+۱)(\text{ج}+۳)^{۲}(\text{ج}+۵)^{۲}(\text{ج}+۷)}+\ldots\right\}$$

قوت نما مساوات (۱) کی اصلیں ج = ۱ یا -۱ ہیں -
لیکن اگر ہم اوپر کے سلسلہ میں ج = -۱ رکھتے ہیں تو سر لامتناہی
ہو جاتے ہیں کیونکہ نسب نما میں ج + ۱ جزو ضربی ہے -
(۱۱۵) اِس مشکل سے بچنے کے لیے اب کی بجائے (ج + ۱) ک رکھو تو

$$\text{ی} = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}\left\{(\text{ج}+۱) - \frac{۱}{(\text{ج}+۳)}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{(\text{ج}+۳)^{۲}(\text{ج}+۵)}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{(\text{ج}+۳)^{۲}(\text{ج}+۵)^{۲}(\text{ج}+۷)}\text{لا}^{۶} \ldots\ldots\right\}\ldots\ldots (۵)$$

اور
$$\text{لا}^{۲}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ی}}{\text{فر لا}^{۲}} + \text{لا}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + (\text{لا}^{۲}-۱)\text{ی} = \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}(\text{ج}+۱)(\text{ج}^{۲}-۱)$$
$$= \text{ک}\,\text{لا}^{\text{ج}}(\text{ج}+۱)^{۲}(\text{ج}-۱)$$

عین صورت (۲) کی طرح مربع دار جزو ضربی $(\text{ج}+۱)^{۲}$ سے
یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ اور ی دونوں تفرقی مساوات کو پورا
کرتے ہیں جبکہ ج = -۱ - نیز ی میں ج = ۱ رکھنے سے ایک حل
حاصل ہوتا ہے - اِس لیے بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِس تفرقی
مساوات کے جس کا رتبہ صرف دو ہے تین حل حاصل ہوئے ہیں
اِن کو حسب ذیل تفصیلاً لکھو:

$$\text{ک}\,\text{لا}^{-۱}\left\{-\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۴\times۲^{۲}}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۶\times۴^{۲}\times۲^{۲}}\text{لا}^{۶} + \ldots\right\} = \text{ک}\,\text{ء}' \text{ فرض کرو}$$

$$\text{ک}\,\text{ء}\,\text{لوک لا} + \text{ک}\,\text{لا}^{-۱}\left\{۱ + \frac{۱}{۲^{۲}}\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۴\times۲^{۲}}\left(\frac{۲}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)\text{لا}^{۴}\right.$$
$$\left. + \frac{۱}{۶\times۴^{۲}\times۲^{۲}}\left(\frac{۲}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۶}\right)\text{لا}^{۶} + \ldots\right\} = \text{ک}\,\text{و}'$$
فرض کرو

اور $\text{ک لا}\left\{۲ - \frac{۱}{۴}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۶\times۴^{۲}}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۸\times۶^{۲}\times۴^{۲}}\text{لا}^{۶} + \dots\right\} = \text{ک ط}$،

فرض کرو

یہ ظاہر ہے کہ ط = - ۴ ع، اِس لیے فی الحقیقت ہم نے صرف دو حل جو خطی طور پر غیر تابع ہیں معلوم کئے ہیں اور کامل ابتدائی ا ع + ب و ہے - یہ سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہیں اور اِس کو آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے -

اُن سلسلوں کی مماثلت (مستقل ضارب کو چھوڑ کر) جو ی کے جملہ میں علی الترتیب ج = ۱ اور ج = - ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اتفاقی نہیں ہے - یہ چیز ربط (۴)

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(\text{ج}+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰$$

سے فوراً واضح ہو جاتی ہے - چنانچہ اگر ج = ۱ تو اِس سے

$$\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰، \qquad \dots\dots\dots (۶)$$

اور ج = - ۱ تو $\text{ا}_{\text{ن}}\left\{(-۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}=۰$

اِس لیے اِس میں ن کی بجائے ن + ۲ رکھنے سے

$$\text{ا}_{\text{ن}+۲}\left\{(۱+\text{ن})^{۲}-۱\right\}+\text{ا}_{\text{ن}}=۰، \qquad \dots\dots\dots (۷)$$

اِس طرح $\left[\frac{\text{ا}_{\text{ن}+۲}}{\text{ا}_{\text{ن}}}\right]_{\text{ج}=-۱} = \left[\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}-۲}}\right]_{\text{ج}=۱} \qquad \dots\dots\dots (۸)$

چونکہ $[\text{ی}]_{\text{ج}=۱}$ میں خطوط وحدانی کے باہر لا جزو ضربی اور $[\text{ی}]_{\text{ج}=-۱}$ میں

ایسا جزو ضربی لا ہے اس لیے رشتہ (۸) کا حقیقت میں یہ مطلب
ہے کہ مذکورہ دو سلسلوں میں لا کی متناظر قوتوں کے سر ایک (۱۱۶)
دوسرے کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ پہلے سلسلے میں
بظاہر ایک رقم زائد معلوم ہوتی ہے یعنی وہ جس میں $\text{لا}^{\text{ا}}$ شریک ہے
لیکن یہ رقم جزو ضربی (ج + ۱) کی وجہ سے معدوم ہو جاتی ہے۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں عہ اور
بہ (عہ > بہ) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر ج = بہ رکھنے
سے ی کے بعض سر لامتناہی ہو جائیں تو ہم ا کی بجائے
ک (ج - بہ) رکھ کر ی کی شکل میں ترمیم کرتے ہیں اور پھر
ی کی ترمیم شدہ شکل اور $\dfrac{\text{جف ی}}{\text{جف ج}}$ میں ج = بہ رکھ کر دو غیر
تابع حل حاصل کرتے ہیں۔ ی میں ج = عہ رکھنے سے
جو نتیجہ حاصل ہو گا وہ صرف اُس نتیجہ کا ایک عددی ضعف
ہو گا جو ج = بہ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ۲ کی بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + (\text{لا}^{2} - 4)\,\text{ما} = 0$$

$$(2)\quad \text{لا}(1 - \text{لا})\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - 3\,\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = 0$$

(۳) لا(۱-لا) فر۲ما/فرلا۲ - (۱+۳لا) فرما/فرلا - ما = ۰

(۴) (لا+لا۲+لا۳) فر۲ما/فرلا۲ + ۳لا۲ فرما/فرلا - ۲ما = ۰

۹۹ - صورت (۴) - جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اِن میں سے ایک اصل سے ی کا ایک سر غیر متعین ہو جائے۔

مساوات

(۱-لا۲) فر۲ما/فرلا۲ + ۲لا فرما/فرلا + ما = ۰

پر غور کرو۔

حسب سابق عمل کرنے پر

ج(ج-۱) = ۰ .... (۱)

ا۱(ج+۱)ج = ۰ .... (۲)

ا۲(ج+۲)(ج+۱) + ا۱{-ج(ج-۱) + ۲ج + ۱} = ۰ (۳)

ا۳(ج+۳)(ج+۲) + ا۲{-(ج+۱)ج + ۲(ج+۱) + ۱} = ۰ ... (۴)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

(۱) سے ج = ۰ یا ۱

(۲) میں ا۱ کا سر معدوم ہوتا ہے جبکہ ج = ۰۔ لیکن چونکہ مساوات میں کوئی اور رقم نہیں ہے اِس لیے اِس سے ا۱ لامتناہی ہونے کی بجائے غیر متعین ہو جاتا ہے۔

اگر ج = ۱ تو $ل_{۱} = ۰$

اِس طرح اگر ج = ۰ تو مساواتوں (۳)، (۴)، ..... سے

$$۲ ل_{۲} + ل_{۰} = ۰،$$
$$۶ ل_{۳} + ۳ ل_{۱} = ۰،$$
$$۱۲ ل_{۴} + ۳ ل_{۲} = ۰،$$

وغیرہ

اور اس لیے $$[ی]_{ج=۰} = ل_{۰}\left\{۱ - \frac{۱}{۲} لا^{۲} + \frac{۱}{۸} لا^{۴} + \frac{۱}{۸۰} لا^{۶} \ldots\ldots\right\}$$ (۱۱۷)

$$+ ل_{۱}\left\{لا - \frac{۱}{۲} لا^{۳} + \frac{۱}{۴۰} لا^{۵} + \frac{۳}{۵۶۰} لا^{۶} \ldots\ldots\right\}$$

اس میں دو اختیاری مستقل ہیں اِس لیے اس کو کامل ابتدائی سمجھا جا سکتا ہے ۔ اِس سلسلہ کو |لا| < ۱ کے لیے مستدق ثابت کیا جا سکتا ہے ۔

لیکن ہمیں ایک دوسرا حل، ج = ۱ رکھنے سے ملتا ہے ۔ سروں کو محسوب کرنے سے

$$[ی]_{ج=۱} = ل_{۰} لا \left\{۱ - \frac{۱}{۲} لا^{۲} + \frac{۱}{۴۰} لا^{۴} + \frac{۳}{۵۶۰} لا^{۶} + \ldots\ldots\right\}$$

یعنے پہلے حل کے دوسرے سلسلہ کو ایک مستقل جزو ضربی سے ضرب دیا گیا ہے ۔

اِس کی اُسی استدلال سے پیش بینی کی جا سکتی تھی جس کو صورت (۳) میں بیان کیا گیا ہے ۔

عام طور پر اگر قوت نمائی مساوات کی دو اصلوں عہ اور بہ (عہ > بہ) میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو اور اگر ج = بہ رکھنے سے

ی کا ایک سر غیر متعین ہو جائے تو کامل ابتدائی ج = بہ رکھنے سے حاصل ہو جاتا ہے کیونکہ اس میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں ۔ ی میں ج = عہ رکھنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ صرف (ایک جزو ضربی کے ساتھ) ایسا سلسلہ ہوتا ہے جو پہلے حل کے سلسلوں میں شامل رہتا ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) رتبہ ایک کی لیجنڈر کی مساوات

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{۲}\,\text{لا}\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{۲}\,\text{ما} = \text{۰}$$

(۲) رتبہ ن کی لیجنڈر کی مساوات

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} - \text{۲}\,\text{لا}\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ن}(\text{ن}+\text{۱})\,\text{ما} = \text{۰}$$

(۳) $$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا}^{\text{۲}}\,\text{ما} = \text{۰}$$

(۴) $$(\text{۲}+\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{۲}}} + \text{لا}\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + (\text{۱}+\text{لا})\,\text{ما} = \text{۰}$$

۱۰۰ — چند صورتیں جن میں اوپر کا طریقہ ناکام ہوتا ہے

چونکہ $\text{ق}^{\text{۱}/\text{لا}}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں نہیں پھیلایا جا سکتا اس لیے ہمیں اس طریقہ کی ناکامی کی توقع رکھنی چاہئے جبکہ تفرقی مساوات کا

حل ایسی شکل کا ہو۔ مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - \text{ما} = 0$ پر غور کرو جس کے حل $\text{و}^{\text{ی}}$ اور $\text{قو}^{\text{ی}}$ ہیں۔ اِس کو $\text{ی} = \frac{1}{\text{لا}}$ رکھ کر مستحیل کرو تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{1}{\text{ی}^{2}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\text{لا}^{2}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر ی}^{2}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ی}}\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}\right) = -\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(-\text{لا}^{2}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)$$

$$= \text{لا}^{4}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 2\,\text{لا}^{3}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس نئی مساوات (۱۱۸)

$$\text{لا}^{4}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 2\,\text{لا}^{3}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما} = 0$$

ہے۔

اگر ہم معمولی طریقہ استعمال کرتے ہیں تو قوت نمائی مساوات $\text{ا}_{0} = 0$ حاصل ہوتی ہے جس کی کوئی اصلیں[1] نہیں ہیں کیونکہ بموجب فرض $\text{ا}_{0} \neq 0$۔

ہم کہتے ہیں کہ ایسی تفرقی مساوات لا کی صعودی قوتوں میں کوئی باقاعدہ تکملے نہیں رکھتی۔ بلاشبہ $\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$ اور $\text{قو}^{\frac{1}{\text{لا}}}$ کو $\frac{1}{\text{لا}}$ کی قوتوں میں پھیلایا جاسکتا ہے۔

حسب ذیل مثالوں سے دوسری ممکن صورتیں جہاں مذکورۂ بالا طریقہ ناکام رہتا ہے واضح ہوں گی مثلاً جبکہ قوت نمائی مساوات کی صرف ایک اصل ہو اور اِس سے ممکن ہے ایک مستدق سلسلہ

[1] یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دو لا متناہی اصلیں ہیں۔

حاصل ہو یا نہ ہو۔

یہ قابل ذکر ہے کہ مساوات کو ہر صورت میں شکل

$$\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\text{ع}\,(\text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق}\,(\text{لا})\,\text{ما} = 0$$

میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب طریقہ کامیاب ہوتا ہے تو ع (لا) اور ق (لا)، لا = ۰ کے لیے محدود ہوتے ہیں لیکن ناکامی کی ہر صورت میں یہ شرط پوری نہیں ہوتی۔

مثلاً اوپر کی مثال میں

$$\text{ع}\,(\text{لا}) = 2$$

$\text{ق}\,(\text{لا}) = -\frac{1}{\text{لا}^{2}}$ جو لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰۔

حل طلب مثالیں

(۱) بیسل کی مساوات کو اندراج $\text{لا} = \frac{1}{\text{ی}}$ سے مستحیل کرو۔

اِس سے ثابت کرو کہ لا کی نزولی قوتوں میں اس کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا صرف ایک تکملہ ہے جو لا کی صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہے۔ اِس کو معلوم کرو۔

$$\text{لا}^{3}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,(1 - 3\,\text{لا})\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - 2\,\text{ما} = 0$$

(۳) $\text{ما} = \text{ولا}^{2}\,(1 + 2\,\text{لا})$ رکھ کر پچھلی مثال کا کامل ابتدائی معلوم کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا کوئی ایسا تکملہ نہیں ہے جو لا کی صعودی قوتوں میں باقاعدہ ہو کیونکہ وہ ایک سلسلہ جو حاصل ہوتا ہے لا کی تمام قیمتوں کے لیے متبع ہے:

$$\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}-(\text{۱}-\text{۳لا})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ما}=\text{۰}$$

(۵) پچھلی مثال کے دو تکملے معلوم کرو جو لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کے کوئی ایسے تکملے نہیں ہیں (۱۱۹)
جو لا کی صعودی قوتوں میں یا نزولی قوتوں میں باقاعدہ ہوں

$$\text{لا}^{4}(\text{۱}-\text{لا}^{2})\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\text{۲لا}^{3}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-(\text{۱}-\text{لا}^{2})^{2}\text{ما}=\text{۰}$$

[یہ وہ مساوات ہے جس کا ابتدائی $\text{ا قو}^{\text{لا}+\text{لا}^{-1}}+\text{ب قو}^{-\text{لا}-\text{لا}^{-1}}$ ہے]

نویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\text{۹لا}^{2}\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}}+\text{۲۷لا}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+\text{۸}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}=\text{۰}$

کے تین غیر تابع حل معلوم کرو۔

(۲) مساوات $\text{لا}^{2}\frac{\text{فر}^{3}\text{ما}}{\text{فرلا}^{3}}+\text{۳لا}\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}+(\text{۱}-\text{لا})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{ما}=\text{۰}$

کے تین غیر تابع حل، شکل

$$\text{ی}،\ \frac{\text{جفی}}{\text{جفج}}،\ \text{اور}\ \frac{\text{جف}^{2}\text{ی}}{\text{جفج}^{2}}$$

کے، معلوم کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ استحالہ $\text{ما}=\frac{\text{۱}}{\text{ب و}}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ سے ریکٹی کی مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ب ما}^{2}=\text{ج لا}^{\text{م}}$$

خطی شکل

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{و}}{\text{فر لا}^{2}} - \text{ب ج و لا}^{1} = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر جہ صفر ہو نہ ایک صحیح عدد تو زائد ہندسی (Hypergeometric) حل

$$\text{لا}(۱-\text{لا})\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \left\{\text{جہ} - (\text{عہ}+\text{بہ}+۱)\text{لا}\right\}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{عہ بہ ما} = ۰$$

کے حل (مستدق اگر $|\text{لا}| < ۱$)

$$\text{فا}(\text{عہ}، \text{بہ}، \text{جہ}، \text{لا}) \ \text{اور}\ \text{لا}^{۱-\text{جہ}}\ \text{فا}(\text{عہ}-\text{جہ}+۱، \text{بہ}-\text{جہ}+۱، ۲-\text{جہ}، \text{لا})$$

ہیں جہاں فا(عہ، بہ، جہ، لا) سے زائد ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{\text{عہ بہ}}{۱\times\text{جہ}}\text{لا} + \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)\,\text{بہ}(\text{بہ}+۱)}{۱\times۲\times\text{جہ}(\text{جہ}+۱)}\text{لا}^{2}$$

$$+ \frac{\text{عہ}(\text{عہ}+۱)(\text{عہ}+۲)\,\text{بہ}(\text{بہ}+۱)(\text{بہ}+۲)}{۱\times۲\times۳\times\text{جہ}(\text{جہ}+۱)(\text{جہ}+۲)}\text{لا}^{3} + \ldots$$

تعبیر ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ اندراجات $\text{لا} = ۱-\text{ی}$ اور $\text{لا} = \frac{۱}{\text{ی}}$ سے زائد ہندسی مساوات علی الترتیب

$$\text{ی}(۱-\text{ی})\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ی}^{2}} + \left\{\text{عہ}+\text{بہ}+۱-\text{جہ}-(\text{عہ}+\text{بہ}+۱)\text{ی}\right\}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} - \text{عہ بہ ما} = ۰$$

اور

$$\text{ی}^{2}(۱-\text{ی})\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ی}^{2}} + \text{ی}\left\{(۱-\text{عہ}-\text{بہ})-(۲-\text{جہ})\text{ی}\right\}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}} + \text{عہ بہ ما} = ۰$$

میں مستحیل ہوتی ہے جن میں پہلی مساوات کی شکل بھی زائد ہندسی ہے۔

پس پچھلی مثال سے یہ اخذ کرو کہ ابتدائی مساوات کے چار مزید حل (۱۲۰)

فا(عہ، بہ، عہ + بہ + ۱ - جہ، ۱ - لا)،

(۱ - لا)^(جہ - عہ - بہ) فا(جہ - بہ، جہ - عہ، ۱ + جہ - عہ - بہ، ۱ - لا)،

لا^(-عہ) فا(عہ، عہ + ۱ - جہ، عہ + ۱ - بہ، لا^(-۱))

اور لا^(-بہ) فا(بہ، بہ + ۱ - جہ، بہ + ۱ - عہ، لا^(-۱))

ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ اندراج ما = (۱ - لا)^ن ما سے زائد ہندسی مساوات دوسری زائد ہندسی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے اگر

ن = جہ - عہ - بہ

پس ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کے دو مزید حل

(۱ - لا)^(جہ - عہ - بہ) فا(جہ - عہ، جہ - بہ، جہ، لا)

اور لا^(۱ - جہ) (۱ - لا)^(جہ - عہ - بہ) فا(۱ - عہ، ۱ - بہ، ۲ - جہ، لا)

ہیں۔

[نوٹ: مثال ۵ سے یہ معلوم ہوا کہ زائد ہندسی مساوات کے ابتدائی حلوں سے کس طرح دو دوسرے حل استحالوں لا = ۱ - ی اور لا = ۱/ی کے ذریعہ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح لا = ۱/(۱ - ی)، لا = ی/(ی - ۱)، لا = (ی - ۱)/ی میں سے ہر استحالہ سے دو زائد حل حاصل ہوتے ہیں اور اس طرح کل ۱۲ حل ملتے ہیں۔ مثال ۶ کی طرح عمل کرنے پر یہ تعداد دگنی کی جا سکتی ہے اور کل ۲۴ حل حاصل ہوں گے۔ یہ پانچ

استحالے معہ مماثل استحالہ لا = ی کے ایک گروہ بناتے ہیں یعنے ایسے دو استحالوں کو علی التواتر عمل میں لانے سے ہمیشہ ابتدائی گروہ کا ایک استحالہ حاصل ہوگا۔]

(۷) ثابت کرو کہ اگر ٢ن ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) نہ ہو تو لیجنڈر کی مساوات

$$(\text{١} - \text{لا}^{\text{٢}})\,\frac{\text{فر}^{\text{٢}}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{\text{٢}}} - \text{٢}\,\text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ن}\,(\text{ن} + \text{١})\,\text{ما} = \text{٠}$$

کے حل، لا کی نزولی قوتوں میں باقاعدہ،

$$\text{لا}^{-\text{ن}-\text{١}}\;\text{فا}\left(\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{، } \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن} + \text{١}\text{، ن} + \tfrac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{، }\text{لا}^{-\text{٢}}\right)$$

اور

$$\text{لا}^{\text{ن}}\;\text{فا}\left(-\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن}\text{، } \tfrac{\text{١}}{\text{٢}} - \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن}\text{، } \tfrac{\text{١}}{\text{٢}} - \text{ن}\text{، }\text{لا}^{-\text{٢}}\right)$$

ہیں۔

[وہ حل جو صورت ٢ن = -١ کے جواب میں ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ دفعہ ۷، ۹ کی مثال (۴) کے نتیجہ میں لا کو $\text{لا}^{-\text{١}}$ میں تبدیل کیا جائے]

(۸) ثابت کرو کہ رتبہ ن کی بیسل کی مساوات کے حل کی شکل اس پر منحصر ہوتی ہے کہ آیا ن صفر ہے، یا صحیح عدد ہے، یا غیر صحیح عدد اگرچہ قوت نما مساوات کی اصلوں کا فرق ن نہ ہو بلکہ ٢ن ہو۔

دسواں باب* (١٢١)

پکرڈ، کوشی ۱؎، اور فرابنیس کے مسائل موجودگی

١٠١ ۔ مسئلہ کی نوعیت ۔ گذشتہ بابوں میں بعض خاص شکلوں کی تفرقی مساواتوں کے حل حاصل کرنے کے لیے ہم نے متعدد ترکیبیں معلوم کیں ۔ ایک زمانہ میں علماء ریاضی کو ایک ایسے طریقہ کے انکشاف کی امید تھی کہ کسی تفرقی مساوات کا حل معلومہ تفاعلوں یا ان کے تکملوں کی ایک محدود تعداد کی رقوم میں بیان ہو سکے ۔ لیکن جب یہ حقیقت واضح ہوئی کہ یہ ناممکن ہے تو یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا تفرقی مساوات کا حل عام طور پر ہوتا بھی ہے یا نہیں اور اگر ہوتا ہے تو کس قسم کا ۔

اس سوال پر بحث کرنے کے دو جدا جدا طریقے ہیں ۔ ایک پکرڈ کا طریقہ ہے جس کو مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جا چکا ہے (دفعہ ۸۳ اور ۸۴) ۔ اس میں ہم نے متواتر تقرب حاصل کئے جو بظاہر

---

* مطالعہ اول میں اس باب کو چھوڑ دو ۔

۱؎ آگسٹن لوئی کوشی (پیرس ۱۷۸۹ء تا ۱۸۵۷ء) کو تفاعلوں کے نظریہ کا اور تفرقی مساواتوں کے موجودہ نظریہ کا موجد سمجھا جا سکتا ہے ۔ موصوف نے محدود تکملوں کو گھیرا (Contour) تکمل کے ذریعہ معلوم کرنے کا طریقہ تجویز کیا ۔

ایک انتہا کی طرف مائل تھے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ یہ تقرب فی الواقع ایک انتہا کی طرف مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ اِس انتہا سے حل حاصل ہوتا ہے۔ اِس طرح ہم ثابت کریں گے کہ خاصی عام نمونہ کی تفرقی مساوات کا حل موجود ہوتا ہے۔ اِس قسم کے مسئلہ کو مسئلہ موجودگی[۵] کہتے ہیں۔ پکرڈ کا طریقہ مشکل نہیں ہے اور اِس لیے دوسرے طریقہ کے متعلق کچھ کہنے سے بیشتر ہم فوراً اِس پر متوجہ ہوں گے۔ یہ ذہن نشیں رہے کہ اِس باب کا مقصد مخصوص مساواتوں کے ایسے حل دریافت کرنا نہیں ہے جو عملاً بھی مفید ہوں۔ ہم ثابت کریں گے کہ حلوں کو حاصل کرنے میں جو مفروضے اختیار کیے گئے تھے وہ صحیح تھے اور نیز ہم اُن شرطوں کو ٹھیک طور پر بیان کریں گے جو حل کردہ مساواتوں کے مشابہ مساواتوں میں صحت کا یقین دلانے کے لیے کافی ہیں اِن مساواتوں کو اِس قدر عام شکل میں رکھا گیا ہے جس قدر ممکن ہے۔

۱۰۲ ـ پکرڈ کا متواتر تقرب کا طریقہ۔ اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (۲۲
= ف (لا، ما) اور ما = ب جبکہ لا = ا تو لا کی رقوم میں ما کی قیمت کے لیے حسب ذیل متواتر تقرب حاصل ہوتے ہیں:

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}\,(\text{لا، ب})\,\text{فرلا} = \text{ما}_{\text{۱}} \quad \text{، فرض کرو}$$

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}\,(\text{لا، ما}_{\text{۱}})\,\text{فرلا} = \text{ما}_{\text{۲}} \quad \text{،} \quad \text{" "}$$

$$\text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}\,(\text{لا، ما}_{\text{۲}})\,\text{فرلا} = \text{ما}_{\text{۳}} \quad \text{،} \quad \text{" "}$$

اور علی ہذا القیاس۔

ہم اِس طریقہ کو مختلف مثالوں پر استعمال کر کے سمجھا چکے ہیں دفعات (۸۳ اور ۸۴) ہم نے وہ صورت لی تھی جس میں ف (لا، ما) = لا + ما$^{\text{۲}}$ اور ب = ا = ۰۔

۵- Existence Theorem

چنانچہ حاصل ہوا تھا

$$\text{ما}_1 = \frac{1}{2}\,\text{لا}^2 ،$$

$$\text{ما}_2 = \frac{1}{2}\,\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\,\text{لا}^5 ،$$

$$\text{ما}_3 = \frac{1}{2}\,\text{لا}^2 + \frac{1}{20}\,\text{لا}^5 + \frac{1}{160}\,\text{لا}^8 + \frac{1}{4400}\,\text{لا}^{11}$$

یہ تفاعل، لا کی کافی چھوٹی قیمت کے لیے ایک انتہا کی طرف مائل نظر آتے ہیں۔ اِس دفعہ کا مقصد یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ امر نہ صرف اِس مخصوص مثال میں درست ہے بلکہ اُس وقت بھی جبکہ ف (لا، ما) چند شرطوں کو جو مشخص کی جائیں گی، پورا کرے۔

شرطیں یہ ہیں کہ دو مثبت عدد ھ اور ک کے درست انتخاب کے بعد ہم یہ دعویٰ کر سکیں کہ ل ـ ھ اور ل + ھ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے اور ب ـ ک اور ب + ک کے درمیان ما کی تمام قیمتوں کے لیے ہم ایسے مثبت عدد م اور ا معلوم کر سکتے ہیں کہ

(۱) |ف (لا، ما)| < م

(۲) |ف (لا، ما) ـ ف (لا، مَا)| < ا |ما ـ مَا|

جہاں ما اور مَا زیر بحث سعت میں ما کی کوئی دو قیمتیں ہیں۔

اوپر کی مثال میں ف (لا، ما) = لا + ما^2، شرط (۱) صریحاً پوری ہوتی ہے اگر م کی بجائے کوئی ایسا مثبت عدد لیا جائے جو |ل| + ھ + (|ب| + ک)^2 سے بڑا ہو۔

نیز |(لا + ما^2) ـ (لا + مَا^2)| = |ما + مَا| |ما ـ مَا| < ۲ (|ب| + ک) |ما ـ مَا|

اِس لیے شرط (۲) بھی پوری ہوتی ہے اگر ا = ۲ (|ب| + ک) لیا جائے۔

عام صورت میں ہم اُن فرقوں پر غور کرتے ہیں جو متواتر

تقربوں کے درمیان ہوتے ہیں۔

ا۱ - ب = ∫و^لا ف(لا، ب) فرلا ، بموجب تعریف

لیکن |ف(لا، ب)| < م ، بموجب شرط (۱)

اِس لیے |ا۱ - ب| < |∫و^لا م فرلا| یعنے < م|لا - و| < م ہ ، ... (۱)

نیز ا۲ - ا۱ = ب + ∫و^لا ف(لا، ا۱) فرلا - ب - ∫و^لا ف(لا، ب) فرلا ، (۲

بموجب تعریف

= ∫و^لا {ف(لا، ا۱) - ف(لا، ب)} فرلا

لیکن |ف(لا، ا۱) - ف(لا، ب)| < ا |ا۱ - ب| ، حسب شرط (۲)

< ا م |لا - و| ، (۱) سے

اِس لیے |ا۲ - ا۱| < |∫و^لا ا م (لا - و) فرلا| یعنے < ½ ا م (لا - و)²

< ½ ا م ہ² ... (۲)

اسی طرح |ان - ان-۱| < (1/|ن) م ا^(ن-۱) ہ^ن ... (۳)

اب لامتناہی سلسلہ

ب + م ہ + ½ م ا ہ² + ... + (1/|ن) م ا^(ن-۱) ہ^ن ...

= (م/ا)(قو^(ا ہ) - ۱) + ب

ہ، ا، اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

اِس لیے لامتناہی سلسلہ

ب + (ما$_1$ − ب) + (ما$_2$ − ما$_1$) + …… + (ما$_ن$ − ما$_{ن-1}$) + ……

جس کی ہر رقم گذشتہ سلسلہ کی متناظر رقم کے مساوی یا اِس سے کم ہے بدرجۂ اولیٰ مستدق ہے۔

اِس کا یہ مطلب ہے کہ تواتر

ما$_1$ = ب + (ما$_1$ − ب)

ما$_2$ = ب + (ما$_1$ − ب) + (ما$_2$ − ما$_1$)

ایک معین انتہا [فرض کرو ما (لا)] کی طرف مائل ہے اور یہی ثابت کرنا تھا۔

اب یہ ثابت کرنا چاہیے کہ ما تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے پہلی نظر میں یہ بالکل درست معلوم ہوتا ہے لیکن فی الواقع ایسا نہیں ہے کیونکہ ثبوت کے بغیر یہ فرض نہیں کر لینا چاہیے کہ

نہا$_{ن \to \infty}$ $\int_{د}^{لا}$ ف (لا، ما$_{ن-1}$) فرلا = $\int_{د}^{لا}$ ف (لا، نہا$_{ن \to \infty}$ ما$_{ن-1}$) فرلا

وہ طالب علم جو یہ جانتا ہے کہ "یکساں استدقاق" کا مفہوم کیا ہے فوراً سمجھ لے گا کہ نامساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے جن کو ہم نے سلسلہ کے صرف استدقاق کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کیا ہے فی الحقیقت اِس سلسلہ کا یکساں استدقاق ثابت ہوتا ہے۔ پس اگر ف (لا، ما) مسلسل ہے تو ما$_1$، ما$_2$ وغیرہ بھی مسلسل ہیں اور ما مسلسل تفاعلوں کا ایک یکساں مستدق سلسلہ ہے یعنے ما خود بھی مسلسل ہے[1] اور ما − ما$_{ن-1}$ یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے،

[1] دیکھو برامویچ کی کتاب "(Infinite Series)" دفعہ ۴۵۔

جبکہ ن بڑھتا ہے۔

پس شرط (۲) کی رو سے $\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}_{\text{ن-۱}})$ یکساں طور پر صفر کی جانب مائل ہے۔

اِس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

$$\int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \{\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}_{\text{ن-۱}})\}\, \text{فرلا} \qquad (۱۲۴$$

صفر کی جانب مائل ہے۔

اِس طرح رشتہ

$$\text{ما}_{\text{ن}} = \text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما}_{\text{ن-۱}})\, \text{فرلا}$$

کی انتہا $\text{ما} = \text{ب} + \int_{\text{ا}}^{\text{لا}} \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})\, \text{فرلا}$

ہے، اِس لیے[۱] $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})$ اور $\text{ما} = \text{ب}$ جبکہ $\text{لا} = \text{ا}$۔

پس ثبوت مکمل ہو چکا۔

۱۰۳۔ کوشی کا طریقہ - لامتناہی سلسلوں کے لیے مسئلے

کوشی کا طریقہ یہ ہے کہ تفرقی مساوات سے ایک لامتناہی سلسلہ حاصل کیا جاتا ہے اور پھر دوسرے لامتناہی سلسلہ کے ساتھ مقابلہ کر کے اُس کو مستدق ثابت کیا جاتا ہے۔ یہ دوسرا سلسلہ مساوات کا حل نہیں ہوتا لیکن اِس کے سروں کے درمیان رشتہ اصلی سلسلہ کے سروں کے درمیانی رشتہ کی بہ نسبت زیادہ سادہ اور آسان ہوتا ہے۔ اِس طریقہ کی توضیح کے لیے ہم (پہلی مثال) پہلے رتبہ کی خطی مساوات

[۱] تکملہ کو تفرق کرتے وقت طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ تکملہ صرف اپنی بالائی حد کے تغیر کی وجہ سے بدلتا ہے۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ع (لا)} \times \text{ما}$$

کو لیں گے۔

بلا شبہ اس مساوات کو متغیروں کی جدائی سے فوراً حل کیا جاسکتا ہے چنانچہ

$$\text{لوک ما} = \text{ج} + \int \text{ع (لا) فر لا}$$

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن ہم یہاں اس پر لامتناہی سلسلہ کے ذریعہ اس وجہ سے بحث کر رہے ہیں کہ یہ بحث

$$\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{ع (لا)} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق (لا)} \times \text{ما}$$

اور اعلیٰ ترتیبوں کی مساواتوں کی ذرا مشکل بحث کے بہت مشابہ ہے۔

قوت کے سلسلوں سے متعلق حسب ذیل مسئلوں کی ضرورت پیش آئے گی۔ متغیر لا کو ملتف فرض کیا گیا ہے۔ مطلق قیمتوں کو $|\text{ا}_\text{ن}|$ کی بجائے اختصاراً بڑے حرفوں $\text{ا}_\text{ن}$ وغیرہ سے تعبیر کیا جائے گا۔

(ا) قوت کا سلسلہ $\sum_{}^{\infty} \text{ا}_\text{ن} \text{ لا}^\text{ن}$، اپنے استدقاق کے دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ کے اندر تمام نقطوں پر مطلقاً مستدق ہوتا ہے۔

(ب) اس دائرہ کا نصف قطر ر، مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}} = \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\text{ا}_{\text{ن}+1}}{\text{ا}_\text{ن}}$$

سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو۔

(ج) $|\text{لا}| = \text{ر}$ کے اندر $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \left(\sum^{\infty} \text{ا}_\text{ن} \text{ لا}^\text{ن} \right) = \sum^{\infty} \text{ن ا}_\text{ن} \text{ لا}^{\text{ن}-1}$

(د) اگر قوت کے دو سلسلے ہوں تو اُس علاقہ کے اندر جو اِن کے استدقاق کے دائروں میں مشترک ہے

$$\left(\sum_{\text{۰}}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}}\right)\left(\sum_{\text{۰}}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}}\right) = \sum_{\text{۰}}^{\infty}\left(\text{ا}_{\text{ن}}\text{ب}_{\text{۰}} + \text{ا}_{\text{ن-۱}}\text{ب}_{\text{۱}} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{۰}}\text{ب}_{\text{ن}}\right)\text{لا}^{\text{ن}}$$

(ع) اگر دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\sum_{\text{۰}}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} = \sum_{\text{۰}}^{\infty} \text{ب}_{\text{ن}}\text{لا}^{\text{ن}} \text{ تو } \text{ا}_{\text{ن}} = \text{ب}_{\text{ن}}$$

(ف) $\text{ا}_{\text{ن}} < \text{م}\,\text{ر}^{-\text{ن}}$ جہاں م، سلسلہ کے اُس حاصل جمع کی مطلق قیمت سے بڑا ہے جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{ر}$ پر کے نقطوں کے لیے حاصل ہوتا ہے جبکہ اِس دائرہ پر سلسلہ مستدق ہو۔

اِن مسئلوں کے ثبوت برامویچ کی کتاب (Infinite Series) میں ملیں گے:

(ا) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۴ میں]

(ب)، جو ڈلمبر کی نسبتی جانچ کا صریح نتیجہ ہے، دفعہ ۱۲ میں

(ج) دفعہ ۵۲ میں [دفعہ ۱۲ دوسرے ایڈیشن میں دفعہ ۵۲ و ۱۲ ہے]

(د) دفعہ ۵۴ میں

(ع) دفعہ ۵۲ میں

(ف) دفعہ ۸۲ میں [دوسرے اڈیشن کے دفعہ ۸۴ میں]

آئندہ چل کر یکساں استدقاق پر دو مسئلوں کی ضرورت ہوگی لیکن ہم اِس کو یہاں اس وقت تک ملتوی کرتے ہیں جب تک کہ اِن کی ضرورت نہ ہو۔

۱۰۴ ـ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ما ع (لا) کے حل (سلسلہ میں) کا استدقاق [۱]

فرض کروکہ ع (لا) کو قوت کے سلسلہ $\sum_{0}^{\infty}$ ع$_{ن}$ لا^{ن} میں پھیلایا جاسکتا ہے جو دائرہ | لا | = سا پر اور اِس کے اندر ہر جگہ مستدق ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ ایک حل ما = $\sum_{0}^{\infty}$ ا$_{ن}$ لا^{ن} حاصل ہو سکتا ہے جو اِس دائرہ کے اندر مستدق ہے۔

تفرقی مساوات میں اندراج کرنے پر

$\sum_{0}^{\infty}$ ن ا$_{ن}$ لا$^{ن-۱}$ = $\sum_{0}^{\infty}$ ا$_{ن}$ لا^{ن} $\sum_{0}^{\infty}$ ع$_{ن}$ لا^{ن} (مسئلہ ج)

= $\sum_{0}^{\infty}$ (ا$_{ن}$ ع$_{۰}$ + ا$_{ن-۱}$ ع$_{۱}$ + ا$_{ن-۲}$ ع$_{۲}$ + ... + ا ع$_{ن}$) لا^{ن}

(مسئلہ د)

لا$^{ن-۱}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (مسئلہ ع)

ن ا$_{ن}$ = ا$_{ن-۱}$ ع + ا$_{ن-۲}$ ع$_{۱}$ + ا$_{ن-۳}$ ع$_{۲}$ + ... + ا ع$_{ن-۱}$

.....(۱)

اِس لیے ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، .... اور ع، ع$_{۱}$، .... کی مطلق قیمتوں کے لیے جبکہ انہیں متناظر بڑے حرفوں سے تعبیر کیا گیا ہو حاصل ہوتا ہے (۱۲۶)

ن ا$_{ن}$ ≤ ا$_{ن-۱}$ ع + ا$_{ن-۲}$ ع$_{۱}$ + ا$_{ن-۳}$ ع$_{۲}$ + ... + ا ع$_{ن-۱}$ ....(۲)

[۱] اِس کو پڑھنے سے پہلے دفعہ ۷ کا مکرر مطالعہ کرو۔

فرض کرو کہ م ایک مثبت صحیح عدد ہے جو دائرہ $|لا| = ر$ پر ع(لا) کی جو قیمت ہے اُس سے بڑا ہے۔ تب

$$ع_ن < م\, ر^{-ن} \quad \dots\dots (۳) \quad (\text{مسئلہ ف})$$

اِس لیے (۲) اور (۳) سے

$$ا_ن < \frac{م}{ن}\left(ا_{ن-۱} + ا_{ن-۲}\, ر^{-۱} + ا_{ن-۳}\, ر^{-۲} + \dots + ا_{.}\, ر^{-ن+۱}\right)$$

$\dots\dots (۴)$

فرض کرو کہ $ب_ن$ $(ن > ۰)$ (۴) کی بائیں جانب کو تعبیر کرتا ہے اور فرض کرو کہ ب کوئی مثبت عدد ہے جو $ا_{.}$ سے بڑا ہے، پس $ا_ن < ب_ن$

لیکن $\frac{م}{ن}\left(ا_{ن-۱} + ا_{ن-۲}\, ر^{-۱} + ا_{ن-۳}\, ر^{-۲} + \dots + ا_{.}\, ر^{-ن+۱}\right)$

$$= \frac{م}{ن}\, ا_{ن-۱} + \frac{ن-۱}{ن\, ر}\, \frac{م}{ن-۱}\left(ا_{ن-۲} + ا_{ن-۳}\, ر^{-۱} + \dots + ا_{.}\, ر^{-ن+۲}\right)$$

پس $ب_ن$ کی اوپر کے مطابق تعریف کرنے سے

$$ب_ن = \frac{م}{ن}\, ا_{ن-۱} + \frac{(ن-۱)}{ن} \times \frac{ب_{ن-۱}}{ر}$$

اِس لیے $ب_{ن-۱}$ سے تقسیم کرنے اور $\frac{ا_{ن-۱}}{ب_{ن-۱}}$ کی بجائے ک استعمال کرنے سے (تاکہ $۰ \leq ک < ۱$)

$$\frac{ب_ن}{ب_{ن-۱}} = \frac{م\, ک}{ن} + \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ن\, ر}$$

اِس لیے

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}-1}} = \frac{1}{\text{س}}$$

اِس لیے سلسلہ $\sum_{}^{\infty}$ ب$_{\text{ن}}$ لا$^{\text{ن}}$ دائرہ |لا| = س کے اندر مستدق ہے۔
(مسئلہ ب)

اِس لیے سلسلہ $\sum_{}^{\infty}$ ا$_{\text{ن}}$ لا$^{\text{ن}}$ اُسی دائرہ کے اندر بدرجۂ اولیٰ مستدق ہے

کیونکہ

$$\text{ا}_{\text{ن}} < \text{ب}_{\text{ن}}$$

تمام سروں ا$_1$، ا$_2$ ....کو (ا) سے ع$_1$، ع$_2$، ... کی (جو معلوم فرض کیے گئے ہیں) اور اختیاری مستقل ا$_\cdot$ کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۰۵ — اِس ثبوت کے متعلق چند امور۔ طالب علم کو گذشتہ دفعہ کے سمجھنے میں غالباً بڑی دقت ہوئی ہوگی۔ لیکن کام کی تفصیلات سے پریشان نہیں ہونا چاہیئے۔ خاص بات یہ ہے کہ ہم

نہا $\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}-1}} = \frac{1}{\text{س}}$ کو ثابت کرنا پسند کرتے لیکن بدقسمتی سے وہ رشتہ

جس سے ا$_1$، ا$_2$ وغیرہ کی تعریف ہوتی ہے ذرا پیچیدہ ہے۔ اِس کو ہم اول ن مقداروں ع$_1$، ع$_2$، .... ، ع$_{\text{ن}-1}$ کو خارج کر کے مختصر

بناتے ہیں۔ لیکن اِس کے بعد بھی رشتہ پیچیدہ ہی رہتا ہے (۱۲۷)
کیونکہ اس میں ن ا شامل ہوتے ہیں۔ ہمیں تو ایسے رشتہ کی ضرورت ہے جس میں صرف دو ا شامل ہوں۔ ب$_{\text{ن}}$ کی مناسب تعریف اختیار کرنے سے ب$_{\text{ن}}$ اور ب$_{\text{ن}-1}$ کے درمیان ایک ایسا رشتہ مل جاتا،

جس سے ہم

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{ب}_{\text{ن}-1}} = \frac{1}{\text{ر}}$$

پر پہنچتے ہیں۔
ہم مکرر یہ کہتے ہیں کہ ایک بہت ہی سادہ مساوات کی اسقدر پیچیدہ بحث کا صرف یہ مقصد ہے کہ ایک نمونہ حاصل ہو جائے تاکہ طالب علم اس کو دوسری صورتوں میں نقل کر سکے ۔

حل طلب مثالیں

(۱) اگر ع (لا) اور ق (لا) کو قوت کے ایسے سلسلوں میں پھیلایا جا سکے جو دائرہ $\text{لا} = \text{ر}$ کے اندر اور اس کے اوپر تمام نقطوں کے لیے مستدق ہوں تو ثابت کرو کہ ایک ایسا سلسلہ، اسی دائرہ کے اندر مستدق، پہلے دو سلسلوں کے سروں (اختیاری مستقل) کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے کہ وہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} = \text{ع}(\text{لا}) \times \frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} + \text{ق}(\text{لا})\,\text{ما}$$

کو پورا کرے۔

[یہاں $\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ا}_{\text{ن}} = (\text{ن}-1)\,\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ع}_0 + (\text{ن}-2)\,\text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{ع}_1 + \dots$

$\dots + \text{ا}_1\,\text{ع}_{\text{ن}-2} + \text{ا}_{\text{ن}-2}\,\text{ق}_0 + \text{ا}_{\text{ن}-3}\,\text{ق}_1 + \dots + \text{ا}_0\,\text{ق}_{\text{ن}-2}$

پس اگر م کوئی عدد ہو جو ع (لا) اور ق (لا) دونوں کی اُن مطلق قیمتوں سے جو دائرہ $\text{لا} = \text{ر}$ پر حاصل ہوتی ہیں بڑا ہو تو

$$\text{ا}_{\text{ن}} < \frac{\text{م}}{\text{ن}} \left\{ |\text{ا}_{\text{ن}-1}| + |\text{ا}_{\text{ن}-2}|\,\text{ر}^{-1} + \dots + |\text{ا}_1|\,\text{ر}^{-\text{ن}+2} \right)$$

$$+\left(\text{ا}_{\text{ن}-۲}+\text{ا}_{\text{ن}-۳}\,\text{ت}^{-۱}+\cdots+\text{ا}_{\cdot}\,\text{ت}^{-\text{ن}+۲}\right)$$

$$<\frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(۱+\text{ت}\right)\left(\text{ا}_{\text{ن}-۱}+\text{ا}_{\text{ن}-۲}\,\text{ت}^{-۱}+\cdots+\text{ا}_{\cdot}\,\text{ت}^{-\text{ن}+۱}\right)$$

[اِس نامساوات کی بائیں جانب کو $\text{ب}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرکے حسبِ سابق عمل کرو۔]

(۲) مساوات $\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۳}}=\text{ع(لا)}\times\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}+\text{ق(لا)}\times\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}+\text{ر(لا)}\times\text{ما}$

کے لیے متشابہ نتیجے ثابت کرو۔

۱۰۶ ۔ فرابنیس کا طریقہ ۔ ابتدائی بحث۔

اگر طالب علم گذشتہ دفعہ کو خوب سمجھ چکا ہے تو فرابنیس کے طریقہ سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے اُس کے استدقاق کی تحقیق کرنے کا مشکل مسئلہ ذہن نشین کرنے میں آسانی ہوگی۔ گذشتہ باب میں (جس کو آگے پڑھنے سے پہلے اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے) ہم نے یہ دیکھا کہ بعض صورتوں میں ہمیں دو سلسلے حاصل ہوئے تھے جن میں صرف لا کی قوتیں شریک تھیں لیکن دوسروں میں لوکارتھم موجود تھے۔

پہلی صورت میں عمل کا طریقہ گذشتہ دفعہ کے طریقہ کے بہت مشابہ ہے۔ لیکن دوسری صورت میں ایک نئی مشکل پیدا ہوتی ہے۔ لوکارتھموں والے سلسلے، سلسلوں کو مبدل ج کے لحاظ سے تفرق (۱۲۸) کرنے سے حاصل ہوئے تھے۔ اب تفرق انتہا لینے کا ایک عمل ہے اور ایک لامتناہی سلسلہ کو جمع کرنا بھی انتہا لینے کا دوسرا عمل ہے۔ کسی طرح واضح نہیں کہ نتیجہ وہی ہوگا خواہ اِن دو عملوں میں سے کسی ایک کو پہلے کیا جائے اُس صورت میں بھی جبکہ تفرقی سروں والا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

ہم ثابت کریں گے ہم نے جو صورت لی ہے اُس میں عمل تفرق

جائز ہے لیکن یہ ثبوت کہ ہمارے سلسلے اُن شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو رقم به رقم تفرق کرنے کے لیے کافی ہیں قدرے طویل اور پریشان کن ہے۔
مضمون ذیل پڑھتے وقت طالب علم کو اولاً جبر و مقابلہ کی تفصیلات سے چشم پوشی کرنی چاہیئے اور اپنی توجہ کو خاص کر استدلال کے عام رُخ پر مرکوز رکھنا چاہیئے۔ جب یہ اچھی طرح ذہن نشین ہو جائے تو پھر وہ اِن تفصیلات پر غور کر کے اِن کی تصدیق کر سکتا ہے۔

۱۰۷۔ فرابنیس کے سلسلہ میں سرول کو حاصل کرنا جبکہ قوت نما مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد یا صفر کا فرق نہ ہو۔

جملہ

$$\text{لا}^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} - \text{لا}\,\text{ع}(\text{لا}) \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ق}(\text{لا}) \times \text{ما}$$

$$= \text{فہ}\left(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}،\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right)$$ فرض کرو

پر غور کرو جہاں ع (لا) اور ق (لا) دونوں کو قوت کے سلسلوں $\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ اور $\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{ق}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ میں جو دائرہ $|\text{لا}| = \text{س}$ کے اندر اور اس کے اوپر مستدق ہیں پھیلایا جا سکتا ہے۔

ہم تفرقی مساوات

$$\text{فہ}\left(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}،\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right) = 0 ، \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کا حل حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اگر ما کی بجائے $\text{لا}^{\text{ج}} \sum_{0}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ (جس میں $\text{ا}_0 \neq 0$) رکھا جائے تو $\text{فہ}\left(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}،\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}\right)$ کا

$$\sum_{0}^{\infty} ا_ن لا^{ج+ن} \{ (ج+ن)(ج+ن-۱) - (ج+ن) ع(لا) - ق(لا) \}$$

ہو جاتا ہے، فرض کرو کہ یہ $= \sum_{0}^{\infty} گ_ن لا^{ج+ن}$

جہاں $گ_. = ا_. \{ ج(ج-۱) - ع_. ج - ق_. \}$

اور $گ_ن = ا_ن \{ (ج+ن)(ج+ن-۱) - ع_.(ج+ن) - ق_. \}$

$$- ا_{ن-۱} \{ ع_۱ (ج+ن-۱) + ق_۱ \}$$

$$- ا_{ن-۲} \{ ع_۲ (ج+ن-۲) + ق_۲ \} \ldots\ldots - ا_. (ع_ن ج + ق_ن)$$

اختصار کے لیے

$ج(ج-۱) - ع_. ج - ق_.$ کو $ف(ج)$

سے تعبیر کرو تو

$(ج+ن)(ج+ن-۱) - ع_.(ج+ن) - ق_. = ف(ج+ن)$

تب $گ_ن = ۰$ اگر

$$ا_ن ف(ج+ن) = ا_{ن-۱} \{ ع_۱ (ج+ن-۱) + ق_۱ \}$$

$$+ ا_{ن-۲} \{ ع_۲ (ج+ن-۲) + ق_۲ \} + \ldots + ا_. (ع_ن ج + ق_ن) \ldots (۲)$$ (۱۲۹)

اگر ہم ا وں کو ایسا منتخب کریں کہ تمام گ معدوم ہو جائیں اور اگر حاصل شدہ سلسلہ $\sum_{0}^{\infty} ا_ن لا^ن$ مستدق ہو تو گویا (۱) کا حل حاصل ہو جائے گا۔

اب چونکہ $ا_. \neq ۰$ اس لیے $گ_. = ۰$ سے

ج (ج - ۱) - ع ج - ق = ۰، .... (۳)

یہ ج میں دو درجی مساوات ہے اور اِس کو قوت نما مساوات کہتے ہیں -

فرض کرو کہ اِس کی اصلیں عہ اور بہ ہیں -

اگر ج کی اِن قیمتوں میں سے کسی ایک کو مساواتوں گ۱ = ۰، گ۲ = ۰، گ۳ = ۰، ..... میں درج کیا جائے تو ا۱، ا۲، ا۳، ..... کی قیمتیں شکل

ان = ا۰ ھن (ج) / ف (ج + ن) ف (ج + ن - ۱) ... ف (ج + ۱)، ... (۴)

میں حاصل ہوتی ہیں جس میں ھن (ج)، ج میں ایک کثیر رقمی ہے۔ اگر طالب علم کو اِس موقع پر کوئی مشکل محسوس ہو تو ا۱ اور ا۲ کی قیمتوں کو پوری طرح محسوب کرنا چاہئے -

اُس عمل میں جس کے ذریعہ ان کو (۲) سے حاصل کیا جاتا ہے ف (ج + ن) سے تقسیم کرنے کی ضرورت پڑتی ہے - یہ صرف اُس وقت جائز ہے جبکہ ف (ج + ن) ≠ ۰ -

اب چونکہ

ف (ج) = (ج - عہ) (ج - بہ)

ف (ج + ن) = (ج + ن - عہ) (ج + ن - بہ)

اِس لیے

ف (عہ + ن) = ن (عہ + ن - بہ)، ..... (۵)

اور

ف (بہ + ن) = ن (بہ + ن - عہ)، ..... (۶)

اِس طرح اگر عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق نہیں ہے تو مقسوم علیہ معدوم نہیں ہو سکتے اور اِس لیے ان کو معلوم کرنے کا اوپر کا عمل ٹھیک ہے - اگر عہ = بہ تو صرف ایک سلسلہ حاصل ہوگا -

۱۰۸ - حاصل شدہ سلسلے کا استدقاق - فرض کرو کہ

م ایک مثبت عدد ہے جو اُن تمام نقطوں پر جو دائرہ $|لا| = ر$ پر ہیں ع (لا) اور ق (لا) کی مطلق قیمتوں سے بڑا ہے۔

$$تب \quad ع_س < م\, ر^{-س}$$

$$اور \quad ق_س < م\, ر^{-س}$$

اس لیے $|ع_س (ج+ن-س) + ق_س| < م (ج+ن-س+1)\, ر^{-س}$

ان نامساواتوں اور (۲) سے

$$ا_ن < م \{ ا_{ن-1} (ج+ن)\, ر^{-1} + \dots$$

$$+ ا_0 (ج+1)\, ر^{-ن} \} \Big| ف(ج+ن) \quad \dots\dots (۷)$$

(۷) کی بائیں جانب کے جملے کو $ب_ن$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ $ا_ن < ب_ن$۔ اِس سے $ب_ن$ کی تعریف ملتی ہے اگر $ن > 0$۔ فرض کرو کہ $ب_0$ کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ وہ کوئی مثبت عدد ہے جو $ا_0$ سے بڑا ہے۔ $ب_ن$ کی اِس تعریف سے حاصل ہوتا ہے

$$ب_{ن+1} ف(ج+ن+1) - ب_ن ف(ج+ن)\, ر^{-1} = ا_ن م (ج+ن+1)\, ر^{-1} = ک\, ب_ن م (ج+ن+1)\, ر^{-1}$$ جہاں $0 < ک < 1$

(۱۲۰) اِس لیے $$\frac{ب_{ن+1}}{ب_ن} = \frac{ف(ج+ن) + ک\, م (ج+ن+1)}{ر\, ف(ج+ن+1)}$$

یعنی = |(ج + ن)(ج + ن - ۱) - ع(ج + ن) - ق| + ک م (ج + ن + ۱) / م |(ج + ن + ۱)(ج + ن) - ع (ج + ن + ۱) - ق|

اب ن کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں جانب کا جملہ قیمت

$$\frac{ن^2}{م ن^2} = \frac{1}{م}$$

کے قریب آتا ہے۔ اِس لیے

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{ب_{ن+1}}{ب_ن} = \frac{1}{م}$$

اِس لیے سلسلہ $\sum^{\infty}$ $ب_ن$ $لا^ن$ اور بدرجہ اولیٰ سلسلہ $\sum^{\infty}$ $ا_ن$ $لا^ن$، دائرہ $|لا| = م$ کے اندر مستدق ہیں۔

پس جب، عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق نہیں ہوتا تو دو مستدق لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو تفرقی مساوات کو پورا کرتے ہیں۔

۱۰۹۔ ترمیم جبکہ قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں فرق صفر ہو یا ایک صحیح عدد ہو۔

جب، عہ اور بہ مساوی ہوتے ہیں تو اِس طریقہ سے صرف ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے جب، عہ اور بہ میں ایک صحیح عدد کا فرق ہوتا ہے تو یہ طریقہ بڑی اصل کے لیے درست ہوتا ہے لیکن چھوٹی اصل کے لیے نہیں، کیونکہ اگر عہ - بہ = ر (ایک مثبت صحیح عدد) تو (۵) اور (۶) سے

ف (عہ + ن) = ن (عہ + ن - بہ) = ن (ن + ر)

لیکن ف (بہ + ن) = ن (بہ + ن - عہ) = ن (ن - ر)

جو معدوم ہوتا ہے جبکہ ن = ر اور اِس لیے $ا_ر$ کے نسب نما میں ایک

جزو ضربی صفر ہو جاتا ہے جبکہ ج = بہ - جیسا کہ پچھلے باب کے دفعہ ۹۸ اور ۹۹ میں سمجھایا جا چکا ہے اس سے چند ا کی قیمتیں لامتناہی یا غیر معین حاصل ہوتی ہیں - اس مشکل کو اس طرح رفع کیا جا سکتا ہے کہ ما کی مفروضہ شکل میں ترمیم کی جائے چنانچہ ا. کی بجائے ک (ج - بہ) رکھا جائے اس کا نتیجہ یہ ہو گا کہ ا.، ا۱، .... $\text{ا}_{\text{ر}-1}$ سب کے سب صفر ہوں گے

اور $\text{ا}_{\text{ر}}$، $\text{ا}_{\text{ر}+1}$، ... سب کے سب محدود ہوں گے جبکہ ج کو بہ کے مساوی رکھا جائے - اس ترمیم سے ما کی مفروضہ شکل میں ا اور ں کے درمیان جو رشتہ ہے وہ نہیں بدلے گا اور اس لیے اوپر کی استدقاق کی تحقیقات پر کوئی اثر نہیں پڑے گا -

۱۱۰ - ایک لامتناہی سلسلہ کا تفرق بلحاظ مبدل ج کے جبکہ قوت نما مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہو -

دفعہ ۱۰۷ میں لامتناہی سلسلہ $\text{لا}^{\text{ج}} \sum_{0}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}$ حاصل ہوا جہاں $\text{ا}_{\text{ن}}$ ج کے تفاعل ہیں - گذشتہ باب کی طرح ج کے لحاظ سے اس سلسلہ کے تفرق پر غور کرنا ہوگا، تفرق کے بعد ج کو چھوٹی اصل بہ کے مساوی رکھا جائے -

(۱۳۱) اب تفرق کے عمل میں ہم لا کو مستقل سمجھ سکتے ہیں - اس سلسلہ کو متغیر ج کے تفاعلوں کا ایک سلسلہ خیال کیا جا سکتا ہے، فرض کرو کہ

یہ سلسلہ $\sum_{0}^{\infty} \text{سا}_{\text{ن}}(\text{ج})$ ہے جہاں

$$\text{سا}_{\text{ن}}(\text{ج}) = \text{لا}^{\text{ج}+\text{ن}}\ \text{ا}_{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{لا}^{\text{ج}+\text{ن}}\ \text{ا}_{0}\ \text{ص}_{\text{ن}}(\text{ج})}{\text{ف}(\text{ج}+\text{ن})\ \text{ف}(\text{ج}+\text{ن}-1)\ \ldots\ \text{ف}(\text{ج}+1)}\text{، (۲) سے}$$

جس میں ا؍ = ک (ج - ب) اور (ج - ب) کو تقسیم کر کے خارج کرنا ہوگا اگر وہ نسب نما میں واقع ہو۔

اب گرسا نے[1] (Cours d'Analyse Vol. II, p. 98) یہ ثابت کیا ہے کہ اگر (۱) تمام ہ‍ا ایسے تفاعل ہیں کہ وہ ایک خاص علاقہ میں جو ایک بند گھیرے میں محدود ہے تحلیلی اور کل شکلی[2] (Holomorphic) ہیں اور اس گھیرے پر مسلسل ہیں اور اگر (۲) اِن تفاعلوں سا کا سلسلہ اِس گھیرے پر یکساں مستدق ہے تو رقم بہ رقم تفرق کرنے سے ایک مستدق سلسلہ حاصل ہوگا جس کا مجموعہ ابتدائی سلسلہ کے مجموعہ کا تفرقی سر ہوگا۔ کل شکلی اور تحلیلی کی تعریفوں کے لیے گرسا کی محولہ بالا کتاب کا ابتدائی حصہ دیکھو۔ یہ واضح ہے کہ تفاعل سا اِن شرطوں کو پورا کرتے ہیں اور مسلسل ہیں جب تک کہ ہم ج کی اُن قیمتوں سے دور رہتے ہیں جن سے یہ تفاعل لا متناہی ہو جاتے ہیں۔ یہ قیمتیں ع - ۱، ب - ۱، ع - ۲، ب - ۲ وغیرہ ہیں۔ اِن سے بچنے کے لیے علاقہ کو ایک ایسے دائرہ کے اندر لو جس کا مرکز ج = ب اور نصف قطر ایک سے کم ہو۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ اِس علاقہ کے اندر سلسلہ ہر جگہ یکساں طور پر مستدق ہے۔ اِس سے یہ ثابت ہوگا کہ وہ ایک ایسے علاقہ کے گھیرے پر یکساں طور پر مستدق ہے جو پہلے علاقہ کے اندر اور اُس کے مشابہ اور قدرے چھوٹا ہے۔

فرض کرو کہ س ایک مثبت صحیح عدد ہے جو بڑے علاقہ کے اندر ج کی بڑی سے بڑی قیمت سے بڑا ہے۔

تب اِس علاقہ کے اندر ج کی تمام قیمتوں کے لیے، س سے بڑی ن کی قیمتوں کی صورت میں،

ف (ج + ن) = | (ج + ن - ۱) (ج + ن) - ع (ج + ن) - ق ا
ف کی تعریف کے بموجب

[1] دوسرا ایڈیشن صفحہ ۹۸ - چوتھا ایڈیشن صفحہ ۹۶

[2] Holomorphic

$$\geqslant (\text{ج}+\text{ن})^{2} - (\text{ع}+1)(\text{ج}+\text{ن}) - \text{ق}_{.}$$

کیونکہ $|\text{ع}-\text{و}| \geqslant |\text{ع}| - |\text{و}|$

$$> (\text{ن}-\text{س})^{2} - (\text{م}+1)(\text{س}+\text{ن}) - \text{م}$$

کیونکہ $\text{ع} < \text{م}$ اور $\text{ق}_{.} < \text{م}$

$$> \text{ن}^{2} + \text{ے}\,\text{ن} + \text{جے}$$ فرض کرو، .... (۸)

جہاں ے اور جے،

ن، لا، یا ج پر منحصر نہیں ہیں۔ ....

ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے (مثلاً فرض کرو $\text{ن} > \text{م}$) یہ آخری جملہ ہمیشہ مثبت ہوگا۔

فرض کرو کہ علاقہ میں ج کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\text{م}\Big[\text{ا}_{\text{م}-1}(\text{ج}+\text{م})\text{ک}^{-1} + \text{ا}_{\text{م}-2}(\text{ج}+\text{م}-1)\text{ک}^{-2} + \cdots\cdots$$

$$+ \text{ا}_{.}(\text{ج}+1)\text{ک}^{-\text{م}}\Big] \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

کی اعظم قیمت ھ سے تعبیر ہوتی ہے۔

اب اگر $\text{ت}_{\text{م}}$، ب م سے بڑا کوئی مثبت عدد ہو اور اگر ن کی م (۱۳۲)
سے بڑی قیمتوں کے لیے $\text{ت}_{\text{ن}}$ کی یہ تعریف کی جائے کہ

$$\text{ت}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}\left\{\text{ت}_{\text{ن}-1}(\text{س}+\text{ن})\text{ک}^{-1} + \cdots + \text{ت}_{\text{م}}(\text{س}+\text{م}+1)\text{ک}^{-\text{ن}+\text{م}}\right\} + \text{ھ}\,\text{ک}^{-\text{ن}+\text{م}}}{\text{ن}^{2} + \text{ے}\,\text{ن} + \text{جے}} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\text{تو}\quad \text{ت}_{\text{م}+1} = \frac{\text{م}\,\text{ت}_{\text{م}}(\text{س}+\text{م}+1)\text{ک}^{-1} + \text{ھ}\,\text{ک}^{-1}}{(\text{م}+1)^{2} + \text{ے}(\text{م}+1) + \text{جے}}$$

جس کا شمار کنندہ، $ب_{م+۱}$ کے شمار کنندہ سے بڑا اور جس کا نسب نما $ب_{م+۱}$ کے نسب نما سے چھوٹا ہے {(۸) اور (۹) کی رو سے} اور $ب_ن$ کی تعریف سے جو یہ ہے کہ وہ (۷) کے بائیں جانب کے جملہ کو تعبیر کرتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ت_{م+۱} > ب_{م+۱}$$

اسی طرح $ت_ن > ب_ن$، ن کی م سے بڑی تمام قیمتوں کیلیے

(۱۰) سے ثابت ہوتا ہے کہ $\lim_{ن \to \infty} \frac{ت_{ن+۱}}{ت_ن} = \frac{۱}{ک}$۔ کام کا یہ حصہ اُس کام کے اس قدر مشابہ ہے جو دفعہ ۱۰۸ کے آخر میں کیا گیا ہے کہ اس کو طالب علم کے لیے مشق کے طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔

پس $\sum_{م}^{\infty} ت_ن ر_۱^ن$ مستدق ہے اگر $ر_۱ < ر$

اس لیے دائرہ $|لا| = ر_۱$ کے اندر اور اُس علاقہ کے اندر جو ج کے لیے مختص کیا گیا ہے

$$|ا_ن لا^{ج+ن}| < ا_ن ر_۱^{س+ن} < ب_ن ر_۱^{س+ن} < ت_ن ر_۱^{س+ن}$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\sum ا_ن لا^{ج+ن}$ سے ویرسٹراس کی م والی جانچ جو یکساں استدقاق (برامویچ دفعہ ۴۴) کے لیے ہے پوری ہوتی ہے کیونکہ $ر_۱$، س اور تمام ت، ج کے غیر تابع ہیں۔

اِس سے اُس ثبوت کی تکمیل ہوتی ہے کہ Σ سا ن = Σ ا ن لا ^ج+ن^
تمام مقررہ شرطوں کو پورا کرتا ہے، اِس لیے ج کے لحاظ سے تفرق اب جائز ہے۔ یہ دائرہ |لا| = سا کے اندر درست ہے۔ ہم دائرہ سا کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ دائرہ |لا| = سا کے اندر کا ہر نقطہ اسمیں شامل ہو جائے۔

اگر قوت نمائی مساوات کی اصلوں میں ایک صحیح عدد کا فرق ہونے کی بجائے وہ مساوی ہوں تو اوپر کے کام میں صرف یہ فرق پڑے گا کہ اب ا کی بجائے ک (ج - بہ) کو رکھنے کی ضرورت نہیں ہوگی کیونکہ ا ن کے نسب نما میں کوئی (ج - بہ) جزو ضربی کے طور پر شریک نہیں ہوگا۔

[نویں اور دسویں باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۱، اتا ۱۰، ۱ کا مطالعہ کرو۔ اِن میں باقاعدہ تکملوں[1]، فوش کا مسئلہ، معمولی اور نادر نقطوں، فوشی نمونہ کی مساواتوں، اختصاصی نمائندہ[2]، طبعی[3] اور زیر طبعی[4] تکملوں سے بحث کی گئی ہے۔]

---

[1] Regular Integrals

[2] Characteristic Index

[3] Normal

[4] Subnormal

گیارہواں باب

تین متغیروں والی معمولی تفرقی مساواتیں اور تماط منحنی اور سطحیں۔

۱۱۱ ــ اب ہم چند سادہ تفرقی مساواتوں پر غور کریں گے جن سے فضا میں مرتسمہ منحنیوں کے اور اُن سطحوں کے خواص معلوم ہوں گے جن پر منحنی واقع ہیں یا جن کو منحنی علی القوائم قطع کرتے ہیں (جیساکہ برقی سکونیات میں ہم قوہ سطحیں قوت کے خطوں کو علی القوائم قطع کرتی ہیں)۔ اس باب کی معمولی[1] تفرقی مساواتوں اور آئندہ باب کی جزئی تفرقی مساواتوں میں قریب کا رشتہ ہے۔

آگے بڑھنے سے پیشتر طالب علم کو ہندسہ مجسمات دُہرالینا چاہئیے بالخصوص ہمیں اس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ ایک منحنی کے مماس کی سمتی جیوب التمام

$$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} ، \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right)$$

ہوتی ہیں یعنے وہ نسبت فرلا : فرما : فری میں ہوتی ہیں۔

مستقل سروں والی ہمزاد خطی مساواتوں کو تیسرے باب میں سمجھایا جاچکا ہے۔

[1] یعنے اِن میں جزئی تفرقی سر شریک نہیں ہوتے۔

۱۱۲ – ہمزاد مساواتیں $\frac{فرلا}{ف} = \frac{فرما}{ق} = \frac{فری}{ر}$

اِن مساواتوں سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک خاص منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر کے مماس کی سمتی جیوب التمام (ف، ق، ر) کے متناسب ہیں۔ اگر ف، ق، ر مستقل ہوں تو اس طرح ایک خط مستقیم حاصل ہوگا یا زیادہ صحیح یہ ہے کہ خطوط مستقیم کا ایک دوہرا لامتناہی نظام حاصل ہوگا کیونکہ ایسا ایک خط فضا کے کسی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ لیکن اگر ف، ق اور ر، لا، ما اور ی کے تفاعل ہوں تو منحنیوں کا ایک متشابہ نظام حاصل ہوگا جن میں سے کسی ایک کے متعلق یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ وہ ایک متحرک نقطہ سے جو مسلسل اپنی سمت حرکت بدلتا ہے تکوین پاتا ہے۔ برقی سکونیات (۱۳۴)
میں قوت کے خط[1] ایسا نظام بناتے ہیں۔

مثال (۱) $\frac{فرلا}{۱} = \frac{فرما}{۱} = \frac{فری}{۱}$ (۱)

صریحاً تکملے $لا - ی = ا$ (۲)

$ما - ی = ب$ (۳)

ہیں یہ دو مستویوں کی مساواتیں ہیں جو خط

$\frac{لا - ا}{۱} = \frac{ما - ب}{۱} = \frac{ی}{۱}$ (۴)

---

[1] قوت کے خطوں کی مساواتیں

$\frac{فرلا}{\frac{جفِ فہ}{جفِ لا}} = \frac{فرما}{\frac{جفِ فہ}{جفِ ما}} = \frac{فری}{\frac{جفِ فہ}{جفِ ی}}$

ہیں جن میں فہ قوہ تفاعل ہے۔

میں متقاطع ہوتے ہیں۔ اِس خط کو اختیاری مستقلوں ا اور ب کے درست انتخاب سے کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے گذارا جا سکتا ہے مثلاً (ف، گ، ھ) میں سے اگر ا = ف ۔ ھ اور ب = گ ۔ ھ

نظام کا ایک واحد خط جو دئے ہوئے نقطہ میں سے گذرے منتخب کرنیکی بجائے ہم ایسے خط تعداد میں لا متناہی لے سکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے منحنی کو قطع کریں مثلاً دائرہ لا^۲ + ما^۲ = ہ^۲، ی = ۰ کو۔

اِس دائرہ کی مساواتوں کو (۲) اور (۳) کے ساتھ لینے سے حاصل ہوتا ہے

لا = ا،

ما = ب،

اور اِس لیے ا^۲ + ب^۲ = ہ^۲ (۵)

یہ وہ رشتہ ہے جو ا اور ب کے درمیان درست ہوتا ہے جبکہ خط دائرہ کو قطع کرتا ہے۔ ا اور ب کو (۲)، (۳)، اور (۵) سے ساقط کیا جائے تو

(لا ۔ ی)^۲ + (ما ۔ ی)^۲ = ہ^۲

یہ ایک ناقصی اسطوانہ ہے جو نظام کے اُن خطوں سے بنتا ہے جو دائرہ سے ملتے ہیں۔

اسی طرح نظام کے وہ خط جو منحنی

فہ (لا، ما) = ۰، ی = ۰

سے ملتے ہیں سطح

فہ (لا ۔ ی، ما ۔ ی) = ۰

کی تکوین کرتے ہیں۔

مثال (۲) فرلا / ی = فرما / ۰ = فری / ۔لا (۶)

صریحاً تکملے

$$لا^2 + ی^2 = ا^2 \text{، } \qquad (7)$$

$$ما = ب \qquad (8)$$

ہیں، ایک قائم مستدیر اسطوانہ اور ایک مستوی جو اُس کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔

اِس لیے تفرقی مساواتیں دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے مرکز محور ما پر واقع ہیں اور جن کے مستوی اِس محور پر عمود ہیں۔

ایسا ایک دائرہ فضاء کے کسی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ وہ جو (ف، گ، ھ) میں سے گذرتا ہے

$$لا^2 + ی^2 = ف^2 + ھ^2 \text{، } ما = گ$$

ہے۔

ایک سطح نظام کے اُن دائروں سے بنتی ہے جو ایک دئے ہوئے منحنی کو قطع کرتے ہیں۔

اگر دیا ہوا منحنی زائد (۱۳۵)

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱ \text{، } ی = ۰$$

ہو تو (۷) اور (۸) سے، اِس زائد کو قطع کرنے والے دائرہ کے لیے

$$لا^2 = ا^2 \text{، } ما = ب$$

اور اِس لیے

$$\frac{ا^2}{ا^2} - \frac{ب^2}{ب^2} = ۱ \qquad (9)$$

ا اور ب کو (۷)، (۸)، اور (۹) سے ساقط کیا جائے تو زائد نما ایک چادری

$$\frac{لا^2 + ی^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$$

حاصل ہوتا ہے جو نظام کے اُن دائروں سے بنا ہے جو زائد کو قطع کرتے ہیں۔

اِسی طرح منحنی فہ (لا^۲، ما) = ۰، ی = ۰ سے ابتدا کی جائے تو

گردشی سطح فہ (لا² + ی²، ما) = ۰ حاصل ہوگی۔

۱۱۴ — ایسی مساواتوں کا حل ضاربوں سے۔ اگر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

تو اِن میں سے ہر کسر

$$\frac{\text{ل فرلا + م فرما + ن فری}}{\text{ل ف + م ق + ن ر}}$$

کے مساوی ہے۔

یہ طریقہ بعض مثالوں میں اُس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ نسب نما کو صفر اور شمار کنندہ کو ایک ٹھیک تفرقہ بنانا ہو یا نسب نما کو غیر صفر اور شمار کنندہ کو اِس کا تفرقہ بنانا ہو۔

مثال (۱)

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی(لا + ما)}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی(لا − ما)}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا}^2\text{ + ما}^2}$$

$$\text{ہر کسر} = \frac{\text{لا فرلا − ما فرما − ی فری}}{\text{لا ی(لا + ما) − ما ی(لا − ما) − ی(لا}^2\text{ + ما}^2\text{)}}$$

$$= \frac{\text{لا فرلا − ما فرما − ی فری}}{0}$$

اِس لیے لا فرلا − ما فرما − ی فری = ۰

یعنے $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 - \text{ی}^2 = \text{ا}$

اِسی طرح ما فرلا + لا فرما − ی فری = ۰

یعنے $2\,\text{لا ما} - \text{ی}^2 = \text{ب}$

مثال (۲)

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{۱ + ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{۱ + لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$$

یہاں

$$\frac{\text{فری}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرلا + فرما}}{\text{۲ + لا + ما}} = \frac{\text{فرلا − فرما}}{\text{ما − لا}}$$

اِس لیے $\text{لوک ی} = \text{لوک} (۲ + \text{لا} + \text{ما}) + \text{لوک ا} = -\text{لوک} (\text{لا} - \text{ما}) + \text{لوک ب}$

یعنے $\text{ی} = \text{ا} (۲ + \text{لا} + \text{ما}) = \frac{\text{ب}}{\text{لا} - \text{ما}}$

حل طلب مثالیں۔ (۱۳۶)

حسب ذیل ہمزاد تفرقی مساواتوں کو پورا کرنے والے اُن منحنیوں کے نظام حاصل کرو جن کی تعریف دو مساواتوں سے ہوتی ہو جن میں سے ہر ایک میں ایک اختیاری مستقل شریک ہو۔ جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۱) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}}$$

(۲) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{م ی} - \text{ن ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ن لا} - \text{ل ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ل ما} - \text{م لا}}$$

(۳) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ - \text{لا}^۲} = \frac{\text{فرما}}{-۲\,\text{لا ما}} = \frac{\text{فری}}{-۲\,\text{لا ی}}$$

(۴) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{ما ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا ما}}$$

(۵) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{ما} + \text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ی} + \text{لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

(۶) $$\frac{\text{لا فرلا}}{\text{ی}^۲ - ۲\,\text{ما ی} - \text{ما}^۲} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما} + \text{ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ما} - \text{ی}}$$

(۷) مثال ۲ کے اُس دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو جو نقطہ (۰، -ن، م) میں سے گذرتا ہے۔

(۸) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۴ کے منحنیوں سے جو دائرہ $\text{ما}^۲ + \text{ی}^۲ = ۱$، $\text{لا} = ۰$ کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۹) وہ سطح معلوم کرو جو مثال ۱ کے خطوں سے جو مرغولہ $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲$

$= \text{ر}^{\text{۲}}$، ی = ک $\text{مس}^{-\text{۱}}\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کو قطع کرتے ہیں پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰) وہ منحنی معلوم کرو جو نقطہ (۱، ۲، -۱) میں سے گذرے اور اِس کے کسی نقطہ پر سے کے مماس کی سمتی جیوب التمام اِس نقطہ کے محددوں کے مربعوں کی نسبت میں ہوں۔

۱۱۴ — ایک دوسرا تکملہ جو پہلے تکملہ کی مدد سے معلوم کیا گیا ہو۔

مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{۱}} = \frac{\text{فرما}}{-\text{۲}} = \frac{\text{فری}}{\text{۳ لا}^{\text{۲}}\ \text{جب}\,(\text{ما} + \text{۲ لا})} \qquad (\text{۱})$$

پر غور کرو۔

صریحاً ایک تکملہ

$$\text{ما} + \text{۲ لا} = \text{ل} \qquad (\text{۲})$$

ہے۔ اِس کو استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{۱}} = \frac{\text{فری}}{\text{۳ لا}^{\text{۲}}\ \text{جب ل}}$$

اِس لیے

$$\text{ی} - \text{لا}^{\text{۳}}\ \text{جب ل} = \text{ب}$$

ل کی بجائے درج کرنے سے

$$\text{ی} - \text{لا}^{\text{۳}}\ \text{جب}\,(\text{ما} + \text{۲ لا}) = \text{ب} \qquad (\text{۳})$$

کیا (۳) حقیقت میں (۱) کا تکملہ ہے؟

(۳) کو تفرق کرنے سے

$$\left\{\text{فری} - \text{۳ لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا جب}\,(\text{ما} + \text{۲ لا})\right\} - \text{لا}^{\text{۳}}\,\text{جم}\,(\text{ما} + \text{۲ لا})$$

$$\times \left\{\text{فرما} + \text{۲ فرلا}\right\} = \text{۰}$$

جو (۱) کی رو سے صحیح ہے۔ اِس لیے (۳) ایک تکملہ ہے۔

حل طلب مثالیں۔

$$(1)\quad \frac{\text{فرلا}}{۱} = \frac{\text{فرما}}{۲} = \frac{\text{فری}}{۵\text{ی} + ۳\text{س}(\text{ما} - ۳\text{لا})}$$

$$(2)\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{-\text{ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی}^{۲} + (\text{ما} + \text{لا})^{۲}}$$

$$(3)\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لای}(\text{ی}^{۲} + \text{لاما})} = \frac{\text{فرما}}{-\text{مای}(\text{ی}^{۲} + \text{لاما})} = \frac{\text{فری}}{\text{لا}^{۴}}$$

$$(4)\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لاما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^{۲}} = \frac{\text{فری}}{\text{یلاما} - ۲\text{لا}^{۲}}$$

۱۱۵ ـ ہمزاد مساواتوں کے عام اور خاص تکملے۔ (۱۳۷)

اگر ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

کے دو غیر تابع تکملے ع = ا اور و = ب ہوں تو فہ (ع، و) = ۰ سے ایک ایسے سطح تعبیر ہوگی جو نظام کے منحنیوں میں سے گذرے گی اور اس لیے اس ایک دوسرا حل حاصل ہونا چاہیئے خواہ تفاعل فہ کی شکل کچھ ہی ہو۔ اس کا تحلیلی ثبوت آئندہ باب میں دیا جائے گا کیونکہ اُس کی اہمیت خاص کر جزئی تفرقی مساواتوں سے متعلق ہے۔

فہ (ع، و) = ۰ کو عام تکملہ کہتے ہیں۔ بعض ہمزاد مساواتوں کے ایسے تکملے ہوتے ہیں جن کو خاص تکملے کہا جاتا ہے، یہ تکملے عام تکملہ میں شریک نہیں ہوتے۔

حل طلب مثالیں

(۱) دفعہ ۱۱۳ کی مثال میں ع = لا^{۲} ـ ما^{۲} ـ ی^{۲} اور و = ۲ لا ما ـ ی^{۲}،
اِس لیے عام تکملہ

فہ (لا^{۲} ـ ما^{۲} ـ ی^{۲}، ۲ لا ما ـ ی^{۲}) = ۰

ہے۔ طالب علم اِس کی تصدیق سادہ صورتوں میں جہاں

فہ (ع، و) = ع ـ و یا فہ (ع، و) = $\frac{\text{و + ۱}}{\text{ع ـ ۲}}$

کر سکتا ہے۔

(۲) تصدیق کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ا + ما ی ـ لا ـ ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{۱}} = \frac{\text{فری}}{\text{۲}}$$

کے لیے عام تکملہ

فہ (۲ ما ـ ی، ما + $\sqrt{\text{ما ی ـ لا ـ ما}}$) = ۰

لیا جا سکتا ہے جہاں ی = لا + ما ایک خاص تکملہ ہے۔

۱۱۶۔ مساوات

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کی ہندسی تعبیر۔

اِس تفرقی مساوات سے یہ بیان ہوتا ہے کہ ایک منحنی کا مماس ایک خاص خط پر عمود ہے اور اس مماس کی سمتی جیوب التمام (فرلا، فرما، فری) کے متناسب اور خط کی سمتی جیوب التمام (ف، ق، ر) کے متناسب ہیں۔

لیکن ہم یہ دیکھ چکے ہیں کہ ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

سے یہ بیان ہوا تھا کہ ایک منحنی کا مماس، خط (ف، ق، س) کے متوازی تھا۔ اس طرح ہمیں منحنیوں کے دو جُٹ حاصل ہوتے ہیں۔ اگر دو منحنی جن میں سے ایک ایک جُٹ سے اور دوسرا دوسر جٹ سے لیا گیا ہو متقاطع ہوں تو اُن کو علی القوائم قطع کرنا چاہیے۔ اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ مساوات

ف فر + ق فرما + س فری = ۰

تکمل پذیر ہو۔ اِس کا یہ مطلب ہے کہ سطحوں کا ایک قبیل حاصل ہو سکتا ہے جس پر کے تمام منحنی اُن نقطوں پر ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں کے عمود وار ہیں جہاں یہ منحنی سطح کو قطع کرتے ہیں۔ (۱۲۸)
حقیقت میں یہ وہ صورت ہے جبکہ سطحوں کی لامتناہی تعداد کھینچی جا سکے جو کہ منحنیوں کے ایک دوہرے لامتناہی جُٹ کو علی القوائم قطع کرے جیسا کہ برقی سکونیات میں ہم قوہ سطحیں خطوط قوت کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے برخلاف یہ ہو سکتا ہے کہ ہمزاد مساواتوں سے تعبیر شدہ منحنیوں سے علی القوائم سطحوں کا کوئی ایسا قبیل حاصل نہ ہو۔ اس صورت میں واحد مساوات کے تکمل پذیر نہیں ہوتی۔

مثال (۱) مساوات فرلا + فرما + فری = ۰

کا تکملہ   لا + ما + ی = ج

ہے، یہ متوازی ستویوں کا ایک قبیل ہے۔

دفعہ ۱۱۲ کی مثال (۱) میں ہم نے یہ دیکھا کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرما}}{1} = \frac{\text{فری}}{1}$$

متوازی خطوں کے قبیل $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{1} = \frac{\text{ما} - \text{ب}}{1} = \frac{\text{ی}}{1}$

کو تعبیر کرتی ہیں۔

اوپر کے مُستوی اِن خطوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں

مثال (۲) ی فرلا - لا فری = ۰

یعنے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} - \frac{\text{فری}}{\text{ی}} = 0$$

اِس لیے

ی = ج لا

یہ مستویوں کا ایک قبیل ہے جو محور ما میں سے گذرتے ہیں۔

دفعہ ۱۱۲ مثال (۲) میں ہم نے یہ دیکھا کہ متناظر ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{0} = \frac{\text{فری}}{-\text{لا}}$$

دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہیں جن کے محور سب کے سب محور ما پر واقع ہیں، اِس لیے مُستوی اِن دائروں کے علی القوائم مرماۃ ہیں۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کو تکمل کرو اور جہاں ممکن ہو ہندسی تعبیر بیان کرو، نیز اس امر کی تصدیق کرو کہ سطحیں اُن منحنیوں کے علی القوائم مرماۃ ہیں جو متناظر ہمزاد مساوات سے تعبیر ہوتے ہیں:

(۱) لا فرلا + ما فرما + ی فری = ۰

(۲) (ما^2 + ی^2 - لا^2) فرلا - ۲ لا ما فرما - ۲ لا ی فری = ۰ [لا^2 سے تقسیم کرو]

(۳) ما ی فرلا + ی لا فرما + لا ما فری = ۰

(۴) (ما + ی) فرلا + (ی + لا) فرما + (لا + ما) فری = ۰

(۵) ی (ما فرلا - لا فرما) = ما^2 فری

(۶) لا فرلا + ی فرما + (ما + ۲ ی) فری = ۰

۱۱۷ - تکمل کا طریقہ جبکہ حل واضح نہ ہو۔ جب شکل

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کی تکمیل پذیر مساوات کو معائنہ سے حل نہ کیا جا سکے تو ہم حل کی تلاش (۱۳۹)
اُس سادہ صورت پر غور کر کے کرتے ہیں جس میں ی کو مستقل سمجھا جاتا
ہے اور اِس لیے   فری = ۔

مثلاً اگر ی مستقل ہو تو مساوات ما ی فرلا + ۲ ی لا فرما
۔ ۳ لا ما فری = ۰،

ما فرلا + ۲ لا فرما = ۰

ہو جاتی ہے اور   لا ما۲ = ا

حاصل ہوتا ہے ۔

چونکہ اِس کو یہ فرض کر کے حاصل کیا گیا ہے کہ ی مستقل ہے
اِس لیے یہ اغلب ہے کہ ابتدائی مساوات کا حل مستقل ا کی بجائے
ی کا کوئی تفاعل رکھنے سے حاصل ہو سکے چنانچہ

لا ما۲ = ف (ی)

اور اِس لیے   ما۲ فرلا + ۲ لا ما فرما ۔ (فرف / فری) فری = ۰

یہ مساوات ابتدائی مساوات کے مماثل ہوگی اگر

ما۲ / ما ی = ۲ لا ما / ۲ ی لا = (فرف / فری) / ۔ ۳ لا ما

یعنی   فرف / فری = ۳ لا ما۲ / ی = ۳ ف (ی) / ی

فرف / ف = ۳ فری / ی

ف (ی) = ج ی۳

اور آخری حل   لا ما۲ = ج ی۳

حاصل ہوتا ہے ۔

یہ طریقہ تمام تکمل پذیر مساواتوں کے لیے درست ہے، اِس کا ثبوت دفعہ ۱۱۹ میں دیکھو۔

حل طلب مثالیں

(۱) ما ی لوک ی فرلا - ی لا لوک ی فرما + لا ما فری = ۰

(۲) ۲ ما ی فرلا + ی لا فرما - لا ما (۱ + ی) فری = ۰

(۳) (۲ لا² + ۲ لا ما + ۲ لا ی² + ۱) فرلا + فرما + ۲ ی فری = ۰

[پہلے لا کو مستقل فرض کرو]

(۴) (ما² + ما ی) فرلا + (ی لا + ی²) فرما + (ما² - لا ما) فری = ۰

(۵) (لا² ما - ما³ - ما² ی) فرلا + (لا ما² - لا² ی - لا³) فرما + (لا ما² + لا² ما) فری = ۰

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کا تکملہ مستویوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن کا خط تقاطع مشترک ہے اور یہ کہ یہ مستوی دفعہ ۱۱۳ کی مثال ۲ کے دائروں کے علی القوائم مرماۃ ہیں:-

(م ی - ن ما) فرلا + (ن لا - ل ی) فرما + (ل ما - م لا) فری = ۰

۱۱۸ — وہ ضروری شرط کہ کوئی مساوات تکمل پذیر ہو۔

اگر

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰، .... (۱)

کا ایک تکملہ فہ (لا، ما، ی) = ج ہو جس کو تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}}\ \text{فری} = 0$$

حاصل ہوتا ہے تو

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \text{لہ ف}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \text{لہ ق}،\quad \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} = \text{لہ ر}$$

پس
$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{له ر}) = \frac{\text{جف}^2\text{ فه}}{\text{جف ما جف ی}} = \frac{\text{جف}^2\text{ فه}}{\text{جف ی جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{له ق})$$

یعنے
$$\text{له}\left(\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}\right) + \text{ق}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف ی}} - \text{ر}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف ما}} = ۰ \quad (۲)$$

اِسی طرح
$$\text{له}\left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right) + \text{ر}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف لا}} - \text{ف}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف ی}} = ۰ \quad (۳)$$

اور
$$\text{له}\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right) + \text{ف}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف ما}} - \text{ق}\,\frac{\text{جف له}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad (۴)$$

مساواتوں (۲)، (۳)، اور (۴) کو علی الترتیب ف، ق، اور ر سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$\text{ف}\left(\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}\right) + \text{ق}\left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)$$
$$+\ \text{ر}\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right) = ۰$$

اگر مساوات (۱) تکمل پذیر ہے تو یہ شرط پوری ہونی چاہئے۔ سمتی تحلیل سے جو طالب علم واقف ہیں وہ دیکھیں گے کہ اگر ایک سمتی ا کے اجزائے ترکیبی ف، ق، ر ہوں تو اوپر کی شرط کو

$$\text{ا خم ا} = ۰$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال۔ گذشتہ دفعہ کی حل شدہ مثال میں

$$\text{ما ی فر لا} + ۲\,\text{ی لا فر ما} - ۳\,\text{لا ما فر ی} = ۰$$

$$\text{ف} = \text{ما ی}،\quad \text{ق} = ۲\,\text{ی لا}،\quad \text{ر} = -۳\,\text{لا ما}$$

شرط سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما ی}(۲\,\text{لا} + ۳\,\text{لا}) + ۲\,\text{ی لا}(-۳\,\text{ما} - \text{ما}) - ۳\,\text{لا ما}(\text{ی} - ۲\,\text{ی}) = ۰$$

یعنے $۵\,\text{لا ما ی} - ۸\,\text{لا ما ی} + ۳\,\text{لا ما ی} = ۰$ جو درست ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثالوں کے پچھلے دو جٹوں کی مساواتیں اِس شرط کو پورا کرتی ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ فرلا / ی = فرما / (لا + ما) = فری / ۱

سے حاصل شدہ منحنیوں کے علی القوائم سطحوں کا کوئی جٹ نہیں ہے۔

۱۱۹* — تکمل پذیری کی شرط کافی بھی ہے اور ضروری بھی

بھی ۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ اوپر کی تکمل پذیری کی شرط کافی ہے یعنے یہ کہ جب وہ پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۱۱۷ کے طریقہ سے ہمیشہ ایک حل حاصل ہوسکتا ہے۔

تمہیدی مفروضہ کے طور پر اِس واقعہ کی ضرورت پڑے گی کہ اگر ف، ق، ر اِس شرط کو پورا کریں تو ف۱ = لہ ف، ق۱ = لہ ق، ر۱ = لہ ر بھی اِس شرط کو پورا کریں گے جہاں لہ، لا، ما اور ی کا کوئی تفاعل ہے۔ ہم اِس کا ثبوت طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔

(۴۱) دفعہ ۱۱۷ میں ہم نے یہ فرض کیا کہ

ف فرلا + ق فرما = ۰

کا ایک حل ی کو مستقل سمجھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ یہ حل فا (لا، ما، ی) = ا ہے تو

(جف فا / جف لا) فرلا + (جف فا / جف ما) فرما = ۰

اس لیے

(جف فا / جف لا) / ف = (جف فا / جف ما) / ق = لہ، فرض کرو

رکھو $\text{لہ ف} = \text{ف}_1$، $\text{لہ ق} = \text{ق}_1$، $\text{لہ ر} = \text{ر}_1$۔

بعد میں ہم نے ا کی بجائے ف (ی) رکھا تھا۔ اِس لیے

$$\text{فا (لا، ما، ی)} = \text{ف (ی)} \quad \text{.........} (۱)$$

اور اِس لیے $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\text{فرلا} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\text{فرما} + \left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}\right\}\text{فری} = ۰$

یعنے $\text{ف}_1\text{فرلا} + \text{ق}_1\text{فرما} + \left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}}\right\}\text{فری} = ۰$، ...(۲)

یہ $\text{ف فرلا} + \text{ق فرما} + \text{ر فری} = ۰$

کے مماثل ہوگا اگر

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \text{لہ ر} = \text{ر}_1$$

یعنے اگر $\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \text{ر}_1$، ....(۳)

دفعہ ۱۱۷ کی مثال میں ہمیں حاصل ہوا

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \frac{\text{۳ لا ما}^2}{\text{ی}} = \frac{\text{۳ ف (ی)}}{\text{ی}}$$

جسمیں لا اور ما مساوات $\text{لا ما}^2 = \text{ف (ی)}$ کی مدد سے خارج کردئے گئے ہیں۔

اب ہمیں صرف یہ ثابت کرنا ہے کہ مساوات (۳) کی بائیں جانب سے لا اور ما کو ہمیشہ مساوات (۱) کی مدد سے خارج کیا جاسکتا ہے

دوسرے نفظوں میں ہمیں یہ ثابت کرنا چاہئے کہ $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} - \text{ر}_1$ میں لا اور ما صرف فا کے تفاعل کے طور پر شامل ہوتے ہیں۔

یہ صورت ہوگی[1] اگر

[1] ایڈورڈ کا "ڈفرنشل کیا لکولس" دفعہ ۵۱۰.

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\text{ر}_{1}\right\}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\text{ر}_{1}\right\}$$

$$=0\text{، متماثلاً}\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

اب تمہیدی مفروضہ کی رُو سے ف، ق، ر کے درمیان رشتہ سے مشابہ رشتہ

$$\text{ف}_{1}\left\{\frac{\text{جف ق}_{1}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ر}_{1}}{\text{جف ما}}\right\}+\text{ق}_{1}\left\{\frac{\text{جف ر}_{1}}{\text{جف لا}}-\frac{\text{جف ف}_{1}}{\text{جف ی}}\right\}$$

$$+\text{ر}_{1}\left\{\frac{\text{جف ف}_{1}}{\text{جف ما}}-\frac{\text{جف ق}_{1}}{\text{جف لا}}\right\}=0$$

حاصل ہوتا ہے، نیز چونکہ (۲) تکمیل پذیر ہے اس لیے (۴۲

$$\text{ف}_{1}\left\{\frac{\text{جف ق}_{1}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)\right\}+\text{ق}_{1}\left\{\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)-\frac{\text{جف ف}_{1}}{\text{جف ی}}\right\}+\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)\left\{\frac{\text{جف ف}_{1}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left.-\frac{\text{جف ق}_{1}}{\text{جف لا}}\right\}=0$$

ان دو آخری مساواتوں کو تفریق کرنے سے

$$\text{ف}_{1}\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}-\text{ر}_{1}\right)-\text{ق}_{1}\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right.$$

$$\left.-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}-\text{ر}_{1}\right\}-\left\{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}-\text{ر}_{1}\right\}\left\{\frac{\text{جف ف}_{1}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left.-\frac{\text{جف ق}_{1}}{\text{جف لا}}\right\}=0\text{،}\ (5)$$

لیکن $\text{ف}_{1}=\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}$، $\text{ق}_{1}=\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)$

$$= \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} \left(\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} \right) = ٠$$

کیونکہ ف صرف ی کا تفاعل ہے ۔
پس مساوات (۵) مساوات (۴) میں تحویل ہوتی ہے ۔

یعنی $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}$ ۔ ر کو فا اور ی کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے ، فرض کرو کہ یہ تفاعل سا (فا ، ی) ہے ۔ پس (۱) اور (۳) سے

$$\frac{\text{فرف}}{\text{فری}} = \text{سا (ف ، ی)}$$

اگر اِس کا حل ف = ضا (ی) ہے تو فا (لا ، ما ، ی) = ضلا (ی)
مساوات

$$\text{ف فرلا + ق فرما + ر فری = ٠}$$

کا ایک حل ہے جس کا تکمل پذیر ہونا اوپر ثابت کیا جا چکا ہے جبکہ ف ، ق ، ر دفعہ ۱۱۸ کی شرط کو پورا کریں ۔

۱۲۰ ۔ ناتکمل پذیر واحد مساوات ۔ جب تکمل پذیری کی شرط پوری نہ ہو تو مساوات

$$\text{ف فرلا + ق فرما + ر فری = ٠}$$

سے منحنیوں کا ایسا قبیل تعبیر ہوگا جو اُس قبیل کے علی القوائم ہوگا جو ہمزاد مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}$$

سے تعبیر ہوتا ہے لیکن اِس صورت میں سطحوں کا کوئی قبیل ایسا نہیں ہے جو منحنیوں کے دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو ۔

لیکن ہم ایسے منحنیوں کی لاتناہی تعداد معلوم کر سکتے ہیں جو ایک دی ہوئی سطح پر واقع ہوں اور مساوات (۱) کو پورا کریں خواہ یہ مساوات تکمل پذیر ہو یا نہ ہو۔

مثال۔ ما فرلا + (ی - ما) فرما + لا فری = ۰ (۱)

کے حل سے تعبیر شدہ ایسے منحنی معلوم کرو جو مستوی

۲ لا - ما - ی = ۱ (۲)

میں واقع ہوں۔

(یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ تکمل پذیری کی شرط پوری نہیں ہوتی)

عمل کا طریقہ یہ ہے کہ متغیروں میں سے ایک اور اس کے تفرقہ کو مثلاً (فرض کرو) (۴۲

ی اور فری کو ان دو مساواتوں اور ان میں سے دوسری مساوات کے تفرقہ سے ساقط کیا جائے۔

(۲) کو تفرق کرنے سے

۲ فرلا - فرما - فری = ۰

لا سے ضرب دینے اور (۱) میں جمع کرنے سے

(ما + ۲ لا) فرلا + (ی - لا - ما) فرما = ۰

یا (۲) کو استعمال کرنے سے

(ما + ۲ لا) فرلا + (لا - ۲ ما - ۱) فرما = ۰

اور اس سے لا ما + لا۲ - ما۲ - ما = ج۲ (۳)

اس لیے تبیل کے منحنی جو مستوی (۲) میں واقع ہیں وہ تراشیں ہیں جن کو یہ مستوی قائم زائدی اسطوانوں (۳) میں قطع کرتا ہے۔

اس مثال کے نتیجہ کو یہ کہہ کر بیان کیا جا سکتا تھا کہ لا ما کے مستوی پر اُن منحنیوں کے ظل جو مستوی (۲) میں واقع ہیں اور مساوات (۱) کو پورا کرتے ہیں، ہم مرکز، مشابہ اور مشابہاً واقع قائم زائدوں کا ایک تبیل ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ فری = ۲ ما فرلا + لا فرما کا کوئی واحد تکملہ نہیں ہے۔

ثابت کرو کہ اس مساوات کے منحنی جو مستوی ی = لا + ما میں واقع ہیں سطحوں کے قبیل

$$(لا - ١)^{٢} (٢ما - ١) = ج$$

پر بھی واقع ہیں۔

(٢) ثابت کرو کہ

$$لا\, فرلا + ما\, فرما + ج \sqrt{١ - \frac{لا^{٢}}{ا^{٢}} - \frac{ما^{٢}}{ب^{٢}}}\, فری = ٠$$

کے منحنی جو ناقص نما

$$\frac{لا^{٢}}{ا^{٢}} + \frac{ما^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ی^{٢}}{ج^{٢}} = ١$$

پر واقع ہیں ہم مرکز کروں کے قبیل

$$لا^{٢} + ما^{٢} + ی^{٢} = ک^{٢}$$

پر بھی واقع ہیں۔

(٣) لا ی کے مستوی پر اُن منحنیوں کا قائم ظِل معلوم کرو جو مکافی نما $٢ی = لا^{٢} + ما^{٢}$ پر واقع ہیں اور مساوات

$$٢\, فری = (لا + ی)\, فرلا + ما\, فرما$$

کو پورا کرتے ہیں۔

(٤) محور ما کے متوازی مکونوں والے اُس اسطوانہ کی مساوات معلوم کرو جو نقطہ (٢، ١، -١) میں سے گذرے اور نیز ایک ایسے منحنی میں سے گذرے جو کرہ $لا^{٢} + ما^{٢} + ی^{٢} = ٤$ پر واقع ہے اور مساوات

$$(لا ما + ٢ لا ی)\, فرلا + ما^{٢}\, فرما + (لا^{٢} + ما ی)\, فری = ٠$$

کو پورا کرتا ہے۔

نوٹ۔ تکمیل پذیر "کل حل" تفرقی مساوات

$$ف(لا، ما، ی)\, فرلا + ق(لا، ما، ی)\, فرما + ر(لا، ما، ی)\, فری = ٠$$

پر دفعہ ٦٩ کی طرح بحث کی جاسکتی ہے اگر دائیں جانب، متماثلاً و (لا، ما، ی) × فرع (لا، ما، ی) = ٠ کے مساوی ہو۔ تب کامل ابتدائی ع = ج کے علاوہ حل و = ج بھی ہوگا جو یا تو نادر حل (لفاف کے مفہوم میں) ہوگا یا ایک انتہائی شکل۔ اگر ہم ف، ق، ر پر ایسی شرطیں عائد کریں جو دفعہ ٦٧ کے ختم پر نوٹ میں ف اور ق پر عائد کردہ شرطوں کے مشابہ ہوں اور ف + ر ا فلا اور ق + ر ا فما میں ی کی بجائے ط + ف (لا، ما) رکھنے سے علی الترتیب نتیجے ع (لا، ما، ط) اور گ (لا، ما، ط) حاصل ہوں تو وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ ط ≡ ی - ف (لا، ما) ایک نادر حل ہو یہ ہیں کہ ع (لا، ما، ٠) = ٠ = گ (لا، ما، ٠) اور یہ کہ تکملوں

$$\int^{ط} \frac{\text{فرط}}{\text{ع (لا، ما، ط)}} \quad \text{اور} \quad \int^{ط} \frac{\text{فرط}}{\text{گ (لا، ما، ط)}}$$

میں سے کم از کم ایک اپنی زیریں حد پر زیر بحث علاقہ میں لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہو۔ اگر ع (لا، ما، ٠) = ٠ = گ (لا، ما، ٠) لیکن استدقاق کی شرط پوری نہ ہو تو ط = ٠ ایک خاص تکملہ ہوگا۔ حسب سابق ہم صرف حقیقی متغیروں پر بحث کر رہے ہیں۔

اِس کا ثبوت کسی آئندہ مقالہ میں دیا جائے گا لیکن ہم چند مثالوں سے اِس مسئلہ کی توضیح کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{فرلا} + \left\{ ١ + (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{1}{2}} \right\} \text{فرما} - \text{فری}$$

$$\equiv (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{1}{2}} \times \text{فر} \left\{ \text{ما} - ٢ (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{1}{2}} \right\} = ٠$$

کا کامل ابتدائی

$$\text{ما} - ٢ (\text{ی} - \text{لا} - \text{ما})^{\frac{1}{2}} = \text{ج}$$

ہے اور نادر حل

$$\text{ی} - \text{لا} - \text{ما} = ٠$$

ہے جو سطحوں کے اُس قبیل کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں۔

یہاں ع (لا، ما، ط) = ۰ اور گ (لا، ما، ط) = ط^(۱/۲)، اِس لیے دوسرا تکملہ مستدق ہے۔ اِس کے برخلاف

ی^(-۲/۳) (فرلا + ۲ ما فرما) + فری = ی^(-۲/۳) × فر(لا + ما^۲ - ۲ ی^(۲/۳)) = ۰

کے لیے لا + ما^۲ - ۲ ی^(۲/۳) = ج کی ایک انتہائی شکل ی = ۰ ہے۔ یہاں ع (لا، ما، ط) = ط^(۳/۲) اور گ (لا، ما، ط) = ۲ ما ط^(۳/۲)، اِس لیے دونوں تکملے متسع ہیں۔ اسی کے مشابہ نتیجے ایسی "تکمل پذیر" شکل "تفرقی مساواتوں" کے لیے بھی درست ہیں جن میں متغیروں کی کوئی تعداد شریک ہو۔

اب ہم شکل

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کی اُن مساواتوں کی طرف رجوع ہوتے ہیں جو "ناتکمل پذیر" ہیں یعنے ایسی ہیں کہ وہ کوئی کامل ابتدائی جس میں اختیاری مستقل شریک ہو نہیں رکھتیں۔ اِس صورت میں

ف (جف ق / جف ی - جف ر / جف ما) + ق (جف ر / جف لا - جف ف / جف ی)
+ ر (جف ف / جف ما - جف ق / جف لا)

متماثلاً صفر نہیں ہوتا۔ اِس کو و (لا، ما، ی) سے تعبیر کرو۔ اگر و = ۰ سے تفرقی مساوات پوری ہو تو و = ۰ ایک نادر حل ہوگا۔ ہم دو مثالوں پر غور کریں گے۔

ی فرلا + ی^۲ فرما + فری = ۰

کے لیے و = ی^۲۔ اب چونکہ ی = ۰ سے تفرقی مساوات پوری ہوتی ہے اِس لیے وہ ایک نادر حل ہے لیکن

ما فرلا + ی فرما + لا فری = ۰

کے لیے

و = ما + ی + لا

یہاں لا + ما + ی = ۰ سے تفرقی مساوات پوری نہیں ہوتی اِس لیے وہ نادر حل نہیں ہے۔

یہ بالعموم بیان کیا جاتا ہے کہ کسی ناتکمل پذیر" کُل "تفرقی مساوات کے نادر حل کے لیے و کا صفر ہونا ضروری ہے۔ یہ بیان صرف اِس وقت درست ہوتا ہے جبکہ ف، ق، ر چند خاص شرطوں کو پورا کریں۔ اگر ف، ق، ر کو لامتناہی جزئی مشتقات اختیار کرنے دیا جائے تو ایک ایسا نادر حل موجود ہو سکتا ہے جس سے و صفر نہیں ہوتا۔

مثالاً

$ی^{\frac{1}{2}}$ فرلا + $ی^{\frac{1}{3}}$ فرما + ۲ فری = ۰

کا ایک نادر حل ی ≡ ۰ ہے لیکن ی = ۰ سے و = $-\frac{1}{6}$ $ی^{\frac{1}{6}}$ صفر کی بجائے لامتناہی ہو جاتا ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ تکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے اور ناتکمل پذیر تفرقی مساواتوں کے لیے نادر حل جن طریقوں پر پیدا ہوتے ہیں اُن میں ایک عجیب فرق ہے۔ اول الذکر مساواتوں کے لیے یہ ضروری ہے کہ سروں ف، ق، ر میں سے کم از کم ایک میں ایک ایسا تفاعل شامل ہونا چاہیئے جو ندرت رکھتا ہو لیکن ثانی الذکر مساواتوں کے لیے ایسا نہیں ہے۔ ناتکمل پذیر مساوات منحنیوں کے ایک دوہرے لامتناہی قبیل کو تعبیر کرتی ہے جو قبیل

فرلا / ف = فرما / ق = فری / ر

کے منحنیوں کے علی القوائم ہوتے ہیں لیکن سطحوں کا کوئی ایسا قبیل

نہیں ہے جو منحنیوں کے اِس دوسرے قبیل کے علی القوائم ہو۔ اگر نادر حل موجود ہے تو منحنیوں کے پہلے قبیل کے تمام منحنی نادر حل سے تعبیر شدہ سطح کو مس کرتے ہیں۔

گیارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\frac{\text{فرلا}}{\text{لای}} = \frac{\text{فرما}}{\text{مای}} = \frac{\text{فری}}{\text{لاما}}$

(۲) $\frac{\text{فرلا}}{\text{ما}^{۳}\text{لا} - ۲\,\text{لا}^{۴}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳}\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{۹\,\text{ی}(\text{لا}^{۳} - \text{ما}^{۳})}$

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ی}،\ \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$

(۴) $(\text{ی} + \text{ی}^{۳})\,\text{جم لا}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} - (\text{ی} + \text{ی}^{۳})\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$

$+ (۱ - \text{ی}^{۲})(\text{ما} - \text{جب لا})\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰$

(۵) $(۲\,\text{لا} + \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لای})\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + ۲\,\text{لاما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{لا}^{۲}\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = ۱$ (۱۴۴)

(۶) ف (ما) کو معلوم کرو اگر ف (ما) فرلا - ی لا فرما - لاما لوگ ما فری = ۰ تکمیل پذیر ہو۔
متناظر تکملہ معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات ناتکمیل پذیر ہے:

۳ ما فرلا + (ی - ۳ ما) فرما + لا فری = ۰

ثابت کرو کہ مستوی لا ما پر اُن منحنیوں کے ظِل جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں اور مستوی ۲ لا + ما - ی = ۱ پر واقع ہیں قائم زائد

لا^{2} + ۳ لاما − ما^{2} − ا ما = ب

ہیں ۔

(۸) کعبی منحنیوں ما = ا لا^{2}، ما^{2} = ب ی لا کے قبیل کی تفرقی مساواتیں معلوم کرو ۔ ثابت کرو کہ یہ تمام منحنی ناقص نماؤں کے قبیل

لا^{2} + ۲ ما^{2} + ۳ ی^{2} = ج^{2}

کو علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔

(۹) اُس منحنی کی مساواتیں معلوم کرو جو نقطہ (۳، ۲، ۱) میں سے گذرتا ہے اور سطحوں لا + ما ی = ج کے قبیل کو علی القوائم قطع کرتا ہے ۔

(۱۰) لا = ع ی، ما = و ی رکھ کر حسب ذیل متجانس مساواتوں کو حل کرو :

(۱) (لا^{2} − ما^{2} − ی^{2} + ۲ لاما + ۲ لای) فرلا + (ما^{2} − ی^{2} − لا^{2} + ۲ مای + ۲ مالا) فرما + (ی^{2} − لا^{2} − ما^{2} + ۲ ی لا + ۲ ی ما) فری = ۰

(۲) (۲ لای − مای) فرلا + (۲ مای − لای) فرما − (لا^{2} − لاما + ما^{2}) فری = ۰

(۳) ی^{2} فرلا + (ی^{2} − ۲ مای) فرما + (۲ ما^{2} − مای − لای) فری = ۰

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مساوات

ف$_{1}$ فرلا$_{1}$ + ف$_{2}$ فرلا$_{2}$ + ف$_{3}$ فرلا$_{3}$ + ف$_{4}$ فرلا$_{4}$ = ۰

تکمل پذیر ہو تو

$$\text{ف}_{\text{ر}}\left(\frac{\text{جف ف}_{\text{س}}}{\text{جف لا}_{\text{ت}}}-\frac{\text{جف ف}_{\text{ت}}}{\text{جف لا}_{\text{س}}}\right)+\text{ف}_{\text{س}}\left(\frac{\text{جف ف}_{\text{ت}}}{\text{جف لا}_{\text{ر}}}-\frac{\text{جف ف}_{\text{ر}}}{\text{جف لا}_{\text{ت}}}\right)$$

$$+\,\text{ف}_{\text{ت}}\left(\frac{\text{جف ف}_{\text{ر}}}{\text{جف لا}_{\text{س}}}-\frac{\text{جف ف}_{\text{س}}}{\text{جف لا}_{\text{ر}}}\right)=0$$

جہاں ر، س، ت، چار لاحقوں ۱، ۲، ۳، ۴ میں سے کوئی تین ہو سکتے ہیں ۔

اِس رشتہ کو $ج_{رس ت} = ٠$ سے تعبیر کر کے تصدیق کرو کہ

$$ف_١ ج_{٢٣٤} - ف_٢ ج_{١٣٤} + ف_٣ ج_{١٢٤} - ف_٤ ج_{١٢٣} = ٠ \quad \text{متماثلاً}$$

جس سے یہ معلوم ہو گا کہ اِن چار رشتوں میں سے صرف تین غیر تابع ہیں۔
تصدیق کرو کہ مساوات

$$(لا_١^٣ - لا_٢ لا_٣ لا_٤)\, فر لا_١ + (لا_٢^٣ - لا_١ لا_٣ لا_٤)\, فر لا_٢$$

$$+ (لا_٣^٣ - لا_١ لا_٢ لا_٤)\, فر لا_٣ + (لا_٤^٣ - لا_١ لا_٢ لا_٣)\, فر لا_٤ = ٠$$

کے لیے یہ شرطیں پوری ہوتی ہیں۔

(١٢) مثال (١١) کی مساوات کو حسب ذیل عمل سے تکمل کرو:

(١) $لا_٢$ اور $لا_٤$ کو مستقل فرض کرو اور اِس طرح حاصل کرو

$$لا_١^٤ + لا_٢^٤ - ٤ لا_١ لا_٢ لا_٣ لا_٤ = د$$

(٢) د کی بجائے $ف(لا_٢، لا_٤)$ رکھو۔ تفرق کر کے اور ابتدائی مساوات کے ساتھ مقابلہ کر کے $\frac{جف\, ف}{جف\, لا_٢}$، $\frac{جف\, ف}{جف\, لا_٤}$ کو حاصل کرو اور پھر ف اور حل

$$لا_١^٤ + لا_٢^٤ + لا_٣^٤ + لا_٤^٤ - ٤ لا_١ لا_٢ لا_٣ لا_٤ = ج$$

کو معلوم کرو۔

(١٣) $لا_١ = ع لا_٤$، $لا_٢ = و لا_٤$، $لا_٣ = ط لا_٤$ رکھ کر مثال ١١ کی مساوات (١٤٥)
کو تکمل کرو۔

(١٤) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات تکمل پذیری کی شرطوں کو

پورا کرتی ہے اور اس کا تکملہ حاصل کرو :

ماجب ط فرلا + لاجب ط فرما ـ لاماجب ط فری ـ لاماجم ط فرط = ۰

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

ا فرلا۲ + ب فرما۲ + ج فری۲ + ۲ ف فرما فری + ۲ گ فری فرلا

+ ۲ ھ فرلا فرما = ۰

شکل ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کی دو مساواتوں میں تحویل ہوتی ہے اگر

ا ب ج + ۲ ف گ ھ ـ ا ف۲ ـ ب گ۲ ـ ج ھ۲ = ۰

(مخروطات کے نتیجہ سے مقابلہ کرو)

پس ثابت کرو کہ

لاما ی (فرلا۲ + فرما۲ + فری۲) + لا (ما۲ + ی۲) فرما فری + ما (ی۲ + لا۲) فری فرلا + ی (لا۲ + ما۲) فرلا فرما = ۰

کا حل

(لا۲ + ما۲ + ی۲ ـ ج) (لاما ی ـ ج) = ۰

ہے ـ

(دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)

(۱۶) ثابت کرو کہ ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ ...... (۱)

کی تکمل پذیری کی شرط سے متقاطع منحنیوں کے قبیلوں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}} \qquad (۲)$$

اور

$$\frac{\text{فرلا}}{\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}} = \frac{\text{فرما}}{\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{فری}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}}$$

کے کسی زوج کا علی القوائم متقاطع ہونا لازم آتا ہے ـ ...... (۳)

اِس سے ثابت کرو کہ (۳) کے منحنی سب کے سب (۱) کی سطح پر واقع ہیں ـ

اس نتیجہ کی تصدیق ف = ن ما - م ی، ق = ل ی - ن لا، س = م لا - ل ما کے لیے کرو۔

[متناظر مساواتوں کے حل کے لیے اس باب کی ابتدائی مثالوں کو دیکھو]

(۱۷) گذشتہ مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساواتوں (۳) کے دو تکملے عہ = مستقل، بہ = مستقل ہوں تو مساوات (۱) کا تکملہ شکل ف (عہ، بہ) = مستقل میں بیان ہو جانا چاہیئے۔ اور اس لیے

ف فرلا + ق فرما + س فری

ا فرعہ + ب فربہ کے طور پر بیان ہونا چاہیئے جہاں ا اور ب، عہ اور بہ کے تفاعل ہیں۔

اس کی تصدیق صورت

ف = مای لوک ی، ق = -ی لالوک ی، س = لاما،

عہ = مای ^{ل}، بہ = لای ^{ل} لوک ی، ا = -بہ، ب = عہ

میں کرو۔

اس لیے (۱) کا تکملہ شکل عہ = ج بہ میں یعنے ما = ج لالوک ی میں حاصل کرو۔

[اس باب کے تکملہ کے لیے دفعہ ۱۶۸ تا ۱۷۰ کا مطالعہ کرو۔ ان میں میئر کا طریقہ اور متجانس مساواتوں کے لیے مکمل جزو ضربی کا بیان ملیگا]

بارھواں باب

پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں مخصوص طریقے

(۴۶)

**۱۲۱ — ہم چوتھے باب میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ اختیاری تفاعلوں یا اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے جزئی تفرقی مساواتیں کس طرح حاصل کی جاتی ہیں۔ ہم یہ بھی بتا چکے ہیں کہ بعض ایسی مساواتوں میں جو ریاضیاتی طبیعیات میں بڑی اہم ہیں سادہ مخصوص حل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ان کی مدد سے زیادہ پیچیدہ حل جو ان ابتدائی اور حدودی شرطوں کو پورا کرتے ہیں جو بالعموم طبیعاتی مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں کس طرح حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

اس باب میں خاص طور پر ان مساواتوں سے بحث کی جائے گی جو ہندسی دلچسپی کی حامل ہیں اور مختلف شکلوں "عام"، "کامل" اور "نادر" تکملوں کو معلوم کیا جائے گا اور ان کی ہندسی تعبیر بیان کی جائے گی۔ مستثنیٰ مساواتوں کے متعلق یہ معلوم ہوگا کہ ان کے تکملے مختلف شکل کے ہوتے ہیں، ان کو ہم مخصوص تکملے کہیں گے۔

۱۲۲ — وہ ہندسی مسئلے جن کی ضرورت پڑیگی۔ طالب علم کو ہندسہ مجسمات کے حسب ذیل مسئلوں کا مطالعہ کرنا چاہئے۔

(۱) سطح ف (لا، ما، ی) = ۰ کے نقطہ (لا، ما، ی) پر اِس کے عماد کی سمتی جیوب التمام نسبت

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} : \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$$

میں ہوتی ہیں۔
چونکہ

$$\frac{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{ع (فرض کرو) اور} - \quad \frac{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} -$$

$= \text{ق}$ (فرض کرو)

اِس لیے اوپر کی نسبت کو ع : ق : -۱ بھی لکھا جا سکتا ہے۔
اِس پورے باب میں ع اور ق کو اُن معنوں میں جس کی تعریف اوپر کی گئی ہے استعمال کیا جائے گا۔

(۲) سطحوں ف (لا، ما، ی، ا، ب) = ۰ کے نظام کا لفاف جہاں ا اور ب متغیر مبدل ہیں دی ہوئی مساوات اور

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ا}} = \cdot ، \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ب}} = \cdot$$

(۱۴۷) سے ا اور ب کو ساقط کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔
نتیجہ میں لفاف کے علاوہ دوسرے طریق بھی شامل ہو سکتے ہیں (دیکھو چھٹا باب)۔

۱۴۳ — لگرانج کی خطی مساوات اور اس کی ہندسی تعبیر

یہ عام مساوات

$$\text{ف ع} + \text{ق ق} = \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جس میں ف، ق، ر تینوں لا، ما، ی کے تفاعل ہیں۔

اِس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ ایک خاص سطح کا عماد اُس خط پر عمود ہے جس کی سمتی جیوب التمام میں نسبت ف : ق : ر ہے۔ لیکن گذشتہ باب میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ ہمزاد مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}}، \quad \ldots\ldots (۲)$$

منحنیوں کے ایسے قبیل کو تعبیر کرتی ہیں کہ کسی نقطہ پر کے مماس کی سمتی جیوب التمام نسبت ف : ق : ر میں ہوتی ہیں اور مساوات فہ (ع، و) = ۰ (جہاں ع = مستقل، اور و = مستقل اِن ہمزاد مساواتوں کے دو خاص حلے ہیں) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جو اِن منحنیوں میں سے گذرتی ہے۔ ایسی کسی سطح کے ہر نقطہ میں سے قبیل کا ایک منحنی گذرتا ہے جو کُلّاً اِس سطح پر واقع ہوتا ہے۔ اِس لیے سطح کا عماد اِس منحنی کے مماس پر عمود ہونا چاہیئے یعنے ایک ایسے خط پر جس کی جیوب التمام میں نسبت ف : ق : ر ہے۔ یہ عین وہی ہے جو جزئی تفرقی مساوات کے لیے ضروری ہے۔

اِس لیے مساوات (۱) کی سطحیں وہ ہیں جن میں سے دو دو کو لیا جائے تو مساوات (۲) کے منحنی حاصل ہوتے ہیں۔ جب مساوات (۱) دیجاتی ہے تو مساواتوں (۲) کو ذیلی مساواتیں کہا جاتا ہے۔

اِس طرح (۱) کا ایک تکملہ فہ (ع، و) = ۰ ہے اگر ع = مستقل اور و = مستقل، ذیلی مساواتوں (۲) کے کوئی دو غیر تابع حل ہوں اور فہ کوئی اختیاری تفاعل ہو۔ اِس کو لگرانج کی خطی مساوات کا عام تکملہ کہتے ہیں۔

مثال (۱)

$$\text{ع} + \text{ق} = ۱$$

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{۱} = \frac{\text{فرما}}{۱} = \frac{\text{فری}}{۱}$$

ہیں جو متوازی خطوط مستقیم کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہیں - اِن پر دفعہ
۱۱۲ مثال (۱) میں بحث کی جا چکی ہے - (۱۴۸)

دو غیر تابع تکملے

لا - ی = ا

ما - ی = ب

ہیں جو مستویوں کے دو قبیلوں کو تعبیر کرتے ہیں جن میں یہ خطوط مستقیم واقع ہیں -

عام تکملہ فہ (لا - ی ، ما - ی) = ۰ ہے جو اُس سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

فہ (لا ، ما) = ۰ ، ی = ۰

میں سے گذرنے والے خطوں کے قبیل سے بنی ہے -

اگر کوئی مُعین منحنی دیا جائے مثلاً دائرہ

لا^۲ + ما^۲ = ۴ ، ی = ۰

تو اِس کے متناظر ہم خاص تکملہ

(لا - ی)^۲ + (ما - ی)^۲ = ۴

حاصل کر سکتے ہیں، یہ تکملہ اُس ناقصی اسطوانہ کو تعبیر کرتا ہے جو قبیل کے اُن خطوں سے بنتا ہے جو دیئے ہوئے دائرہ سے ملتے ہیں -

مثال (۲)   ی ع = - لا   (دیکھو دفعہ ۱۱۲ مثال ۲)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ی}} = \frac{\text{فرما}}{\text{۰}} = - \frac{\text{فری}}{\text{لا}}$$

ہیں جن کے دو تکملے لا^۲ + ی^۲ = ا اور ما = ب ہیں -

عام تکملہ فہ (لا^۲ + ی^۲ ، ما) = ۰ اُس گردشی سطح کو تعبیر کرتا ہے جو منحنی

فہ (لا^۲ ، ما) = ۰ ، ی = ۰

کو قطع کرنے والے منحنیوں کے قبیل (اِس صورت میں دائروں کے قبیل) سے بنتی ہے۔

مثال (۳) اُن سطحوں کو معلوم کرو جن کے مماس مستوی ی کے محور سے مستقل طول ک کا مقطوعہ کریں۔

(لا، ما، ی) پر مماس مستوی

ہے - ی = ع (لاَ - لا) + ق (ماَ - ما)

ہے۔

رکھو لاَ = ماَ = ۰، ہے = ی - ع لا - ق ما = ک

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فری}}{\text{ی - ک}}$$

ہیں جن کے تکملے ما = ا لا، ی - ک = ب لا ہیں۔

عام تکملہ فہ $\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} ، \frac{\text{ی - ک}}{\text{لا}}\right)$ = ۰ ایک مخروط کو جس کا راس (۰، ۰، ک) پر ہے تعبیر کرتا ہے اور یہ سطحیں صریحاً مطلوبہ خاصیت رکھتی ہیں۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے معلوم کرو: (گیارہویں باب میں مثالوں کا پہلا جٹ دیکھو)

(۱) لا ع + ما ق = ی

(۲) (م ی - ن ما) ع + (ن لا - ل ی) ق = ل ما - م لا

(۳) (ما² + ی² - لا²) ع - ۲ لا ما ق + ۲ لا ی = ۰

(۴) ما ی ع + ی لا ق = لا ما

(۵) (ما + ی) ع + (ی + لا) ق = لا + ما

(۱۴۹) (۶) (ی^{2} - ۲ ما ی - ما^{2}) ع + (لا ما + لا ی) ق = لا ما - لا ی

(۷) ع + ۳ ق = ۵ ی + س (ما - ۳ لا)

(۸) ی ع - ی ق = ی^{2} + (ما + لا)^{2}

(۹) مثال (۱) کا وہ حل معلوم کرو جو ایک سطح کو جو مکافی ما^{2} = ۴ لا، ی = ا سے ملے تعبیر کرے۔

(۱۰) مثال (۴) کا عام ترین حل معلوم کرو جو ایک مخروطی نما کو تعبیر کرے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مثال (۶) کا حل ایک کرہ کو تعبیر کرے تو مرکز مبداء پر ہو گا۔

(۱۲) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے تمام عماد محور ی کو قطع کریں۔

۱۲۴ - عام تکملہ کی تحلیلی تصدیق - اب ہم اختیاری تفاعل فہ کو فہ (ء، و) = ۰ سے ساقط کریں گے اور اس طرح اس امر کی تصدیق تحلیلی طور پر کریں گے کہ یہ ف ع + ق ق = س کو پورا کرتا ہے بشرطیکہ ء = ا اور و = ب، ذیلی مساوات

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{ف}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{ق}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{س}}$$

کے دو غیر تابع[1] تکملے ہوں۔

فہ (ء، و) = ۰ کو لا کے لحاظ سے، ما کو مستقل رکھ کر جزوی تفرق کرو تو لا کے تغیر کی وجہ سے ی بدلے گا۔ اس لیے حاصل ہو گا

---

[1] اگر ء اور و غیر تابع نہ ہوں تو $\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)$ اور دیگر دو مشابہ جملے سب متماثلاً معدوم ہوتے ہیں (ایڈورڈ کا ڈفرنیشل کیالکولس دفعہ ۵۱۰) اور اس سے مساوات (۱)، ۰ = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)=0$$

یعنی

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=0$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}}\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)+\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=0$$

نسبت $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ء}} : \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}$ کو ان دو مساواتوں سے ساقط کیا جائے تو

$$\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)=\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\,\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}+\text{ق}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)$$

یعنی

$$\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)\text{ع}+\left(\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{ق}=\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}-\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}},\quad \ldots\ldots (1)$$

لیکن ء = ا سے،

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\,\text{فر لا}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\,\text{فر ما}+\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\,\text{فر ی}=0.$$

اِس لیے ذیلی مساواتوں سے جن کا ایک تکملہ ع = ا ہے

ف (جف ع / جف لا) + ق (جف ع / جف ما) + ر (جف ع / جف ی) = ۰

(۱۵۰) اسی طرح ف (جف و / جف لا) + ق (جف و / جف ما) + ر (جف و / جف ی) = ۰

پس ف : ق : ر

= ((جف ع / جف ما)(جف و / جف ی) − (جف ع / جف ی)(جف و / جف ما)) : ((جف ع / جف ی)(جف و / جف لا)
− (جف ع / جف لا)(جف و / جف ی)) : ((جف ع / جف لا)(جف و / جف ما) − (جف ع / جف ما)(جف و / جف لا))

اِس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

ف ع + ق ق = ر

جو مطلوبہ مساوات ہے۔

۱۲۵ — مخصوص تکملے — بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ لگرانج کی خطی مساوات کے تمام تکملے عام تکملے فہ(ع، و) = ۰ میں شامل ہوتے ہیں لیکن ایسا نہیں ہے۔

مثلاً مساوات

ع − ق = ۲ √ی

کی ذیلی مساواتیں فرلا / ۱ = فرما / −۱ = فری / ۲ √ی

ہیں۔

اِس طرح ہم ع = لا + ما، و = لا − √ی لے سکتے ہیں اور عام تکملہ کو شکل

فہ(لا + ما، لا − √ی) = ۰

میں رکھ سکتے ہیں ۔

لیکن ی = ۰ جزئی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اگرچہ یہ صریحاً ناممکن ہے کہ اُس کو عام تکملہ سے حاصل کیا جائے ۔

ایسے تکملہ کو مخصوص تکملہ کہتے ہیں ۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ سروں ف، ق، ر پر بعض مناسب قیود عائد کر کے تمام مخصوص تکملے معلوم کئے جا سکتے ہیں اور یہ اِس طرح کہ سروں کی اُن رقموں کو جن میں ندرت ہو (مثلاً ۱/ی) صفر کے مساوی رکھا جائے ۔ اِس کے برخلاف یہ ہو سکتا ہے کہ ایسی رقم سے کوئی خاص تکملہ حاصل نہ ہو ۔ مسٹر ایم جے ایم ہل[۱] کے کام کو جاری رکھتے ہوئے میں نے وہ ضروری اور کافی شرطیں منضبط[۲] کی ہیں کہ ایسی رقم سے خاص تکملہ حاصل ہو اور نیز تکملوں کی مختلف قسموں کی جدید تقسیم کی ہے جس کی ضرورت مسٹر فورسائتھ[۳] نے بتائی تھی ۔

حل طلب مثالیں

ثابت کرو کہ حسب ذیل مساواتوں کے عام تکملے اور مخصوص تکملے وہ ہیں جو ساتھ ہی درج کئے گئے ہیں :

(۱) ع + ۲ق ی^۱/۲ = ۳ ی^۱/۲، فہ(لا - ی^۱/۲، ما - ی^۳/۲) = ۰، ی = ۰

(۲) ع + ق{۱ + (ی - ما)^۱/۲} = ۱، فہ{لا - ی، ۲لا + ۳(ی - ما)^۳/۲} = ۰، ی = ما

---

[۱] Proc. London Math. Soc 1917

[۲] Journal Lond. Math. Soc. 1939

[۳] Proc. London Math. Soc. 1905—6

(۳) {۱ + √ی - لا - ما} ع + ق = ۲، فہ {۲ ما - ی، ما

+ ۲ √ی - لا - ما } = ۰، ی = لا + ما [Chrystal]

(۱۵۱) (۴) کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) میں (ی - لا - ما)^۱/۲ = ط رکھ کر

ط [۲ (۱ + ط) جف ط / جف لا + ۲ جف ط / جف ما + ۱] = ۰

کو حاصل کرو۔
اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی مساوات کا ایک حل ی - لا - ما = ۰ ہے۔ (Hill)

(۵) ثابت کرو کہ کرسٹل کی مساوات (مثال ۳) کی لگرانجی ذیلی مساواتوں کو

فرلا / فرما = ۱ + (ی - لا - ما)^۱/۲ ، فری / فرما = ۲

لکھا جا سکتا ہے۔ اخذ کرو

فر / فرما (ی - لا - ما) = - (ی - لا - ما)^۱/۲

جس کا ایک مخصوص حل ی - لا - ما = ۰ ہے۔

(۶) مساوات ع - ق = ۲ √ی

کے عام اور مخصوص تکملے بِل کے طریقہ کی نقل کر کے جیسا کہ مثال ۴ اور ۵ میں کیا گیا ہے حاصل کرو۔

۱۲۶ — ن متبوع متغیروں کی خطی مساوات۔ مساوات

ف۱ ع۱ + ف۲ ع۲ + ف۳ ع۳ + ... + فن عن = س

کا عام تکملہ $\quad ف(ع_۱، ع_۲، ع_۳، \ldots ع_ن) = ۰$

ہے جہاں $\quad ع_۱ = \frac{جف\ ی}{جف\ لا_۱}،\quad ع_۲ = \frac{جف\ ی}{جف\ لا_۲}، \ldots\ldots$

$ف_۱، ف_۲، ف_۳ \ldots$ اور س، $لا_۱، لا_۲ \ldots$ اور ی کے

تفاعل ہیں اور

اور $\quad ع_۱ =$ مستقل، $ع_۲ =$ مستقل، ....

ذیل مساواتوں $\quad \frac{فرلا_۱}{ف_۱} = \frac{فرلا_۲}{ف_۲} = \frac{فرلا_۳}{ف_۳} = \ldots = \frac{فری}{ما}$

کے کوئی ن غیر تابع تکملے ہیں۔

اِس کی تصدیق حسب دفعہ ۱۲۴ کی جا سکتی ہے۔ طالب علم کو چاہیئے کہ وہ تین متبوع متغیروں کی صورت لیکر اس کو ثابت کرو۔

اِس عام تکملہ کے علاوہ استثنائی مساواتوں کے مخصوص تکملے عین اُسی طرح موجود ہوتے ہیں جس طرح دو متبوع متغیروں کی صورت میں۔

حل طلب مثالیں

(۱) $ع_۲ + ع_۳ = ۱ + ع_۱$

(۲) $لا_۱ ع_۱ + ۲ لا_۲ ع_۲ + ۳ لا_۳ ع_۳ + ۴ لا_۴ ع_۴ = ۰$

(۳) $(لا_۳ - لا_۲) ع_۱ + لا_۳ ع_۲ - لا_۲ ع_۳ = لا_۲ (لا_۱ + لا_۳) - لا_۲^۲$

(۴) $لا_۲ لا_۳ ع_۱ + لا_۳ لا_۱ ع_۲ + لا_۱ لا_۲ ع_۳ + لا_۱ لا_۲ لا_۳ = ۰$

(۵) $ع_۱ + لا_۱ ع_۲ + لا_۱ لا_۲ ع_۳ = \overline{لا_۱ لا_۲ لا_۳ ی}$

$$(٦)\quad \text{ع}_۱ + \text{ع}_۲ + \text{ع}_۳ \left\{ ۱ + \sqrt{\text{ی} - \text{لا}_۱ - \text{لا}_۲ - \text{لا}_۳} \right\} = ۳$$

(۱۵۲) **۱۲۷ ـ مساوات** $\text{ف}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ق}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{ر}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = ۰$ ۔ اگر ف، ق، اور ر، لا، ما، اور ی کے تفاعل ہوں لیکن ف کے نہ ہوں تو اِس مساوات پر دو مختلف طریقوں سے بحث کی جاسکتی ہے۔

مثلاً مساوات

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + ۲\sqrt{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = ۰ \qquad (۱)$$

پر غور کرو۔

ہم یہ سمجھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات، سہ بُعدی مساوات

$$\text{ع} - \text{ق} = ۲\sqrt{\text{ی}} \qquad (۲)$$

کے معادل ہے جس کا عام تکملہ

$$\text{فہ}\,(\text{لا} + \text{ما}،\ \text{لا} - \sqrt{\text{ی}}) = ۰$$

ہے اور ایک مخصوص تکملہ ی = ۰ ہے۔

اِس کے برخلاف اگر ہم (۱) کو چار متغیروں کی ایک مساوات سمجھیں تو عام تکملہ

$$\text{فہ}\,(\text{ف}،\ \text{لا} + \text{ما}،\ \text{لا} - \sqrt{\text{ی}}) = ۰$$

حاصل ہوتا ہے جو ف = سا (لا + ما، لا - $\sqrt{\text{ی}}$) کے معادل ہے جہاں سا ایک اختیاری تفاعل ہے لیکن یہ صرف اُس صورت میں جبکہ

$$\text{ف} = \text{ی}،\quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + ۲\sqrt{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = ۲\sqrt{\text{ی}} = ۲\sqrt{\text{ف}}$$

اِس طرح ف = ی، (۱) کا تکملہ نہیں ہے، اگرچہ ف = ی = ۰ سے یقیناً ایک حل حاصل ہوتا ہے۔

عام طور پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر

$$\text{ف}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ق}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \text{ر}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = ۰$$

کو جارہ بُعدی سمجھا جائے اور ف، ق، اور ر میں ف شریک نہ ہو تو اِس کے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہوتے[1] متعدد متبوع متغیروں کے لیے مشابہ مسئلہ بھی درست ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اگر ف = لا تو ف = ۰ ایک ایسی سطح ہے جو

$$\sqrt{\text{لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \sqrt{\text{ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \sqrt{\text{ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} = ۰$$

کو پورا کرتی ہے اور پھر اِس سے یہ ثابت کرو کہ اِس تفرقی مساوات کے تین مخصوص تکملے

$$\text{لا} = ۰،\quad \text{ما} = ۰،\quad \text{ی} = ۰$$

ہیں اور عام تکملہ $\text{فہ}\left(\sqrt{\text{ی}} - \sqrt{\text{لا}}،\ \sqrt{\text{ی}} - \sqrt{\text{ما}}\right) = ۰$ ہے اگر اِس تفرقی مساوات کو سہ بُعدی سمجھا جائے۔

(۲) ثابت کرو کہ گذشتہ مثال کا عام تکملہ اُن منحنیوں میں سے گذرنے والی سطحوں کو تعبیر کرتا ہے جو (اگر وہ مبدا میں سے نہیں گذرتے تو) محددوں کے مستویوں کو مس کرتے ہیں یا ان میں سے ایک میں کُلاً واقع ہیں۔

[1] دیکھو ضمیمہ ب۔

[اشارہ - ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}}}$ اور یہ کہ $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = ۰$ اگر لا = ۰ . اِلّا آنکہ لا، ما، ی سب صفر ہوں -]

(۳) ثابت کرو کہ اگر $\sqrt{\text{لا}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \sqrt{\text{ما}}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۰$ کو دو ۱۵۳
بُعدی سمجھا جائے تو وہ مکافیون کے قبیل $\sqrt{\text{ما}} = \sqrt{\text{لا}} + \text{ج}$ اور اِن کے لفاف اور محددوں کے محوروں لا = ۰، ما = ۰ کو تعبیر کرتی ہے لیکن اگر اس کو سہ بُعدی سمجھا جائے تو وہ سطحوں ی = فہ $(\text{ما}^{\frac{1}{2}} - \text{لا}^{\frac{1}{2}})$ کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۲۸ — غیر خطی مساواتیں - اب ہم ایسی مساواتوں پر غور کریں گے جن میں ع اور ق پہلے درجہ میں واقع نہیں ہوتے بلکہ کسی اور درجہ میں ہیں۔ عام طریقہ بیان کرنے سے پیشتر ہم چار معیاری شکلوں پر بحث کریں گے جن کے لیے "ایک کامل تکملہ" (یعنے جس میں دو اختیاری مستقل شریک ہوں) صرف معائنہ کرنے سے یا دوسرے معمولی ذریعوں سے حاصل ہو سکتا ہے۔ دفعہ ۱۳۳ تا دفعہ ۱۳۵ میں ہم یہ بتائیں گے کہ کامل تکملوں سے عام اور نادر تکملے کس طرح اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

۱۲۹ — معیاری شکل (۱) - صرف ع اور ق موجود

مثلاً مساوات

$$\text{ق} = ۳\,\text{ع}^{۲}$$

پر غور کرو -

سب سے زیادہ واضح حل یہ ہے کہ ع اور ق کو ایسے مستقل سمجھا جائے جو مساوات کو پورا کریں مثلاً

$$\text{ع} = \text{ا} \quad \text{اور} \quad \text{ق} = ۳\,\text{ا}^{۲}$$

اب چونکہ

فی = ع فرلا + ق فرما = ا فرلا + ۳ ا² فرما

اس لیے

ی = ا لا + ۳ ا² ما + ج

یہ کامل تکملہ ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا اور ج شریک ہیں۔

عام طور پر ف (ع، ق) = ۰ کا کامل تکملہ

ی = ا لا + ب ما + ج

ہے جہاں ا اور ب میں رشتہ ف (ا، ب) = ۰ ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) ع = ۲ق² + ۱ (۲) ع² + ق² = ۱

(۳) ع = و^ق (۴) ع² ق³ = ۱

(۵) ع² - ق² = ۴ (۶) ع ق = ع + ق

۱۳۰ — معیاری شکل (۲)۔ صرف ع، ق، اور ی موجود

مساوات

ی² (ع² ی² + ق²) = ۱ (۱)

پر غور کرو۔

آزمائشی حل کے طور پر فرض کرو کہ ی، لا + ا ما کا ایک تفاعل ہے جہاں ا ایک اختیاری مستقل ہے۔ فرض کرو کہ یہ تفاعل ۶ ہے۔

تب
$$ع = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}} \times \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}}$$

$$ق = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}} \times \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}} = ا \, \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ۶}}$$

(۱) میں درج کرنے پر

$$\text{ی}^{2}\left(\frac{\text{فری}}{\text{فرع}}\right)^{2}\left(\text{ی}^{2}+\text{ا}^{2}\right)=\text{۱}$$

یعنے
$$\frac{\text{فرع}}{\text{فری}}=\pm\,\text{ی}\left(\text{ی}^{2}+\text{ا}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

یعنے
$$\text{ع}+\text{ب}=\pm\frac{1}{3}\left(\text{ی}^{2}+\text{ا}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

یعنے
$$\text{۹}\left(\text{لا}+\text{ا}\,\text{ما}+\text{ب}\right)^{2}=\left(\text{ی}^{2}+\text{ا}^{2}\right)^{3}$$

عام طور پر اِس طریقے سے مساوات ف(ی، ع، ق) = ۰، (۱۵۴)
معمولی تفرقی مساوات

$$\text{ف}\left(\text{ی}\,،\ \frac{\text{فری}}{\text{فرع}}\,،\ \text{ا}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرع}}\right)=0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) $\text{۴ی}=\text{ع ق}$ (۲) $\text{ی}^{2}=\text{۱}+\text{ع}^{2}+\text{ق}^{2}$

(۳) $\text{ق}^{2}=\text{ی}^{2}\text{ع}^{2}(\text{۱}-\text{ع}^{2})$ (۴) $\text{ع}^{3}+\text{ق}^{3}=\text{۲۷ ی}$

(۵) $\text{ع}(\text{ی}+\text{ع})+\text{ق}=0$ (۶) $\text{ع}^{2}=\text{ی ق}$

۱۳۱ — معیاری شکل (۳)۔ ف(لا، ع) = فا(ما، ق)

مساوات ع - ۳ لا² = ق² - ما پر غور کرو۔ آزمائشی حل کے طور پر اِس مساوات کی ہر جانب کے جملہ کو ایک اختیاری مستقل ا کے مساوی رکھو تو

$$\text{ع}=\text{۳ لا}^{2}+\text{ا}\,،\quad \text{ق}=\pm\sqrt{\text{ما}+\text{ا}}$$

لیکن
$$\text{فری}=\text{ع فرلا}+\text{ق فرما}$$

= (۳ لا^2 + ۱) فرلا ± $\sqrt{\text{ما + ۱}}$ فرما

اس لیے ی = لا^3 + ۱ لا ± $\frac{2}{3}$ (ما + ۱)$^{\frac{3}{2}}$ + ب

اور یہ مطلوبہ کامل تکملہ ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کے کامل تکملے معلوم کرو:

(۱) ع^2 = ق + لا (۲) ع ق = لا ما

(۳) ما ع = ۲ ما لا + لوگ ق (۴) ق = لا ما ع^2

(۵) ع نو$^{\text{ما}}$ = ق نو$^{\text{لا}}$ (۶) ق (ع - جم لا) = جم ما

۱۳۲ — معیاری شکل (۴)۔ جزئی تفرقی مساواتیں جو کلیروی شکل کے مشابہ ہیں

۔ چوتھے باب میں ہم نے یہ بتایا تھا کہ

ما = ع لا + ف (ع)

کا کامل ابتدائی ما = ج لا + ف (ج)

ہے اور یہ خطوط مستقیم کا ایک قبیل ہے۔

اسی طرح جزئی تفرقی مساوات

ی = ع لا + ق ما + ف (ع، ق)

کا کامل تکملہ ی = ا لا + ب ما + ف (ا، ب)

ہے اور یہ مستویوں کا ایک قبیل ہے۔

مثلاً ی = ع لا + ق ما + ع^2 + ق^2

کا کامل تکملہ ی = ا لا + ب ما + ا^2 + ب^2

ہے۔

کلیرو کی شکل کے نادر حل کے جواب میں جس سے خطوط مستقیم کے قبیل کا لفاف حاصل ہوتا ہے آئندہ دفعہ میں یہ معلوم ہوگا کہ جزئی تفرقی ۱۵۵
مساوات کا ایک "نادر تکملہ" ہوتا ہے جس سے مستویوں کے قبیل کا لفاف حاصل ہوتا ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما - ۲ ع - ۳ ق کا کامل تکملہ اُن تمام ممکن مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو نقطہ (۲، ۳، ۰) میں سے گذرتے ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما + √(ع² + ق² + ۱) کا کامل تکملہ اُن تمام مستویوں کو تعبیر کرتا ہے جو مبدا سے اکائی فاصلہ پر ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ ی = ع لا + ق ما + ع ق / (ع ق - ع - ق) کا کامل تکملہ ایسی تمام مستوی سطحوں کو تعبیر کرتا ہے کہ محددوں کے تین محوروں پر اِن کے مقطوعوں کا جبری مجموعہ ایک ہے۔

۱۳۳ ۔ نادر تکملے ۔ پچھلے باب میں ہم نے یہ ثابت کیا تھا کہ اگر منحنیوں کا وہ قبیل جو پہلے رتبہ کی ایک معمولی تفرقی مساوات کے کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتا ہے ایک لفاف رکھے تو اِس لفاف کی مساوات تفرقی مساوات کا ایک نادر حل ہوتی ہے۔ اِس کے مشابہ مسئلہ سطحوں کے ایک ایسے قبیل کے متعلق درست ہے جو پہلے رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے کامل تکملہ سے تعبیر ہوتا ہو۔ اگر اِن سطحوں کا لفاف ہے تو اِس کی مساوات کو "نادر تکملہ" کہتے ہیں یہ معلوم کرنے کے لیے کہ وہ فی الواقع ایک تکملہ ہے صرف یہ دیکھنے کی

ضرورت ہے کہ لفاف کے کسی نقطہ پر قبیل کی ایک سطح ہے جو اس کو مس کرتی ہے۔ اس لیے لفاف کا عماد اور اس سطح کا عماد ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے لفاف کے کسی نقطہ پر ع اور ق کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو قبیل کے کسی خاص سطح کی ہیں اور اس لیے اُسی مساوات کو پورا کرتی ہیں۔

ہم نے نادر حلوں کو معلوم کرنے کے دو طریقے، ایک ج ممیز سے اور دوسرا ع ممیز سے، بیان کئے تھے اور یہ بتایا تھا کہ ان طریقوں سے عقدہ طریق، قرن طریق، اور تماس طریق بھی حاصل ہوتے ہیں جن کی مساواتیں تفرقی مساواتوں کو پورا نہیں کرتیں۔ پچھلے باب کے ہندسی استدلال کی توسیع سطحوں پر کی جا سکتی ہے لیکن اُن زائد طریقوں (Loci) کی بحث جن سے نادر حل حاصل نہیں ہوتے زیادہ پیچیدہ[1] ہے۔ جہاں تک کہ لفاف کا تعلق ہے وہ طالب علم جس نے پچھلے باب کو خوب سمجھا ہو یہ سمجھنے میں کوئی اشکال محسوس نہیں کرے گا کہ یہ سطح اُن میں شامل ہے جو ا اور ب کو کامل تکملہ اور دو مشتق مساواتوں

ف (لا، ما، ی، ا، ب) = ۰،

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ا}} = ۰،$$

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ب}} = ۰،$$

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہیں یا ع اور ق کو تفرقی مساوات 156
اور دو مشتق مساواتوں

فا (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰،

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}} = ۰$$

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}} = ۰.$$

[1] دیکھو ایم۔ جے۔ ایم۔ ہل کا مضمون Phil. Trans. (A), 1892

سے ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہیں ۔

کسی حقیقی مثال میں اِس کا امتحان کرلینا چاہیئے کہ آیا نادر تکملہ حقیقت میں تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے ۔

مثال (۱) دفعہ ۱۳۲ کی مساوات کا کامِل تکملہ

ی = ا لا + ب ما + ا^2 + ب^2

تھا ۔

ا کے لحاظ سے تفرق کرنے پر　　۰ = لا + ۲ ا

اسی طرح ب کے لحاظ سے تفرق کرنے پر　　۰ = ما + ۲ ب

ا اور ب کو ساقط کرنے سے　　۴ ی = ‒ (لا^2 + ما^2)

اِس کی آسانی سے تصدیق ہوسکتی ہے کہ یہ تفرقی مساوات

ی = ع لا + ق ما + ع^2 + ق^2

کو پورا کرتا ہے اور اِس سے ایک گردشی مکافی نما تعبیر ہوتا ہے جو ان تمام مستویوں کا لفاف ہے جن کو کامِل تکملہ تعبیر کرتا ہے ۔

مثال (۲) دفعہ ۱۳۰ کی مساوات کا کامِل تکملہ

۹ (لا + ا ما + ب)^2 = (ی^2 + ا^2)^3　　(۱)

تھا ۔

ا کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

۱۸ ما (لا + ا ما + ب) = ۶ ا (ی^2 + ا^2)^2　　(۲)

اِسی طرح　　۱۸ (لا + ا ما + ب) = ۰　　(۳)

اِس لیے (۲) سے　　ا = ۰

(۱) میں (۳) اور (۴) سے اندراج کرنے پر

ی = ۰

لیکن ی = ۰ سے ع = ق = ۰ اور یہ قیمتیں تفرقی مساوات

ی^2 (ع^2 ی^2 + ق^2) = ۱

کو پورا نہیں کرتیں ۔

اِس لیے ی = ۰ نادر تکملہ **نہیں** ہے۔

مثال (۳) مساوات $ع^۲ = ی ق$ پر غور کرو۔

ع کے لحاظ سے تفرق کرنے پر ۲ ع = ۰

اسی طرح ۰ = ی

اِن مساواتوں سے ع اور ق کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ی = ۰

یہ تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اِس لیے وہ حقیقت میں نادر تکملہ ہے

لیکن وہ $ی = ب و^{ا لا + ا^۲ ما}$

میں ب = ۰ رکھنے سے ماخوذ ہو سکتا ہے جو ایک کامِل تکملہ ہے۔

اِس لیے ی = ۰ ایک نادر تکملہ بھی ہے اور کامل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

حل طلب مثالیں (۵۷

حسب ذیل مساواتوں کے نادر تکملے معلوم کرو:

(۱) ی = ع لا + ق ما + لوگ ع ق

(۲) $ی = ع لا + ق ما + ع^۲ + ع ق + ق^۲$

(۳) $ی = ع لا + ق ما + \frac{۱}{۲} ع^۲ ق^۲$

(۴) $ی = ع لا + ق ما + \frac{ع}{ق}$

(۵) ۴ ی = ع ق   (۶) $ی^۲ = ۱ + ع^۲ + ق^۲$

(۷) $ع^۳ + ق^۳ = ۲۷ ی$

(۸) ثابت کرو کہ کسی ایسی مساوات کا نادر تکملہ نہیں ہوتا جو معیاری شکل (۱) یا (۳) سے متعلق ہو۔ [معمولی عمل سے مساوات ۰ = ۱ حاصل ہوتی ہے]

(۹) ثابت کرو کہ ی = ۰، مساوات $ق^۲ = ی^۲ ع^۲ (۱ - ع^۲)$ کا ایک

نادر حل بھی ہے اور اِس کے کامل تکملہ کی ایک مخصوص صورت بھی۔

۱۳۴ ۔ عام تکملے ۔ گزشتہ دفعہ کی مثال (۱) میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کامل تکملہ

$$ی = ا لا + ب ما + ا^{۲} + ب^{۲} \quad (۱)$$

سے تعبیر شدہ تمام مستوی اُس گردشی مکافی نما کو مس کرتے ہیں جو نادر تکملہ

$$۴ ی = -(لا^{۲} + ما^{۲}) \quad (۲)$$

سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب تمام مستویوں پر نہیں بلکہ صرف اُن مستویوں پر غور کرو جو مستوی ما = ۰ پر عمود ہیں۔ یہ مستوی (۱) میں ب = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں چنانچہ

$$ی = ا لا + ا^{۲}$$

اور لفاف مکافی اسطوانہ

$$۴ ی = - لا^{۲} \quad (۳)$$

ہے۔

مستویوں کا دوسرا جٹ لو یعنے وہ جو نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے گذرتے ہیں

$$(۱) \text{ سے } \quad ۱ = ا^{۲} + ب^{۲}$$

اِس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$ی = ا لا \pm ما (۱ - ا^{۲})^{\frac{۱}{۲}} + ۱$$

اور لفاف قائم مستدیر مخروط

$$(ی - ۱)^{۲} = لا^{۲} + ما^{۲} \quad (۴)$$

آسانی سے معلوم ہوتا ہے۔

عام طور پر ہم ب = ف (ا) رکھ سکتے ہیں جہاں ف، ا کا کوئی تفاعل ہے چنانچہ

$$ی = ا لا + ما ف (ا) + ا^{۲} + \{ف (ا)\}^{۲} \quad (۵)$$

(۵) کا لفاف 'ا کو مساوات (۵) اور اُس مساوات سے ساقط کرکے حاصل کیا جاتا ہے جو (۵) کو ا کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنے

۰ = لا + ما فَ (ا) + ۲ ا + ۲ ف (ا) فَ (ا)   (۶)

اگر ف کو بالکل اختیاری تفاعل خیال کیا جائے تو اِس حاصل اسقاط کو ابتدائی تفرقی مساوات کا "عام تکملہ" کہتے ہیں۔ مساواتیں (۳) اور (۴) خاص تکملے ہیں جو اِس عام تکملہ سے ماخوذ ہیں۔

ہم پہلے رتبہ کی ایک جزئی تفرقی مساوات کے عام تکملہ کی تعریف کرسکتے ہیں کہ وہ ایک ایسی مساوات ہے جو اُن سطحوں کے ہر ممکن اکہرے لامتناہی جٹ کے لفافوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتی ہے جو کامل تکملہ سے تعبیر شدہ سطحوں کے دوہرے لامتناہی جٹ سے منتخب کیجا سکتی ہیں۔ یہ جٹ کامل تکملہ میں ب = ف (ا) رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ (۵۸)

ا کو اُن دو مساواتوں سے جن سے لفاف حاصل ہوتا ہے فی الواقع ساقط کرنا' اختیاری تفاعل ف اور اِس کے تفرقی سر کی وجہ سے' بالعموم ناممکن ہے۔ یہ صرف مخصوص صورتوں میں جبکہ ف' ا کا ایک معین (بہتر ہے کہ مفرد) تفاعل ہو ہندسی دلچسپی کا موجب ہوتا ہے۔

۱۳۵۔ ممیز۔ اُن دو متصلہ سطحوں کے تقاطع کے منحنی کو ممیز کہتے ہیں جو سطحوں کے کسی ایسے اکہرے لامتناہی جٹ سے متعلق ہوتی ہیں جن کو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ سطحوں کے دوہرے لامتناہی جٹ سے منتخب کیا گیا ہو۔

اب ایسے کسی منحنی کو سطحوں کے قبیل کی مساوات سے اُن ہی دو مساواتوں کے ذریعہ معلوم کیا جاتا ہے جن سے لفاف حاصل ہوتا ہے۔ مثلاً گذشتہ دفعہ کی مساواتوں (۵) اور (۶) کو لو تو ا کی کسی معین عددی قیمت کے لیے ف (ا) اور فَ (ا) سے

ایک خط مستقیم (دو مستویوں کے خط تقاطع کے طور پر) حاصل ہوگا اور یہ خط مستقیم ایک ممیز ہوگا۔ اس مثال میں ممیز خطوط مستقیم کے تہرے لاتمناہی جٹ پر مشتمل ہیں جو گردشی مکافی نما (۲) کو مس کرتے ہیں۔

مکافی اسطوانہ (۳) ممیزوں کے ایک اکہرے لاتمناہی جٹ سے تکوین پاتا ہے یعنی اُن سے جو ما = ۰ پر عمود ہیں اور مخروط (۴) دوسرے جٹ سے تکوین پاتا ہے یعنے اُن سے جو ثابت نقطہ (۰، ۰، ۱) میں سے گذرتے ہیں۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ عام تکملہ تمام ایسی سطحوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ممیزوں سے تکوین پاتی ہیں۔

اگر ایک نادر تکملہ موجود ہو تو تمام ممیز اس کو مس کرنے چاہئیں اور اس لیے وہ تمام سطحیں اس کو مس کرنی چاہئیں جو عام تکملہ سے تعبیر شدہ سطحوں کے مخصوص جٹوں سے تکوین پاتی ہیں۔ اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ گذشتہ دفعہ کا مکافی اسطوانہ اور قائم مستدیر مخروط گردشی مکافی نما کو مس کرتے ہیں۔

۱۳۶ــ خطی مساوات کی خصوصیات۔

خطی مساوات

$$ف ع + ق ق = ما$$

پر غور کرو۔ فرض کرو کہ

$$ع = مستقل$$

اور

$$و = مستقل$$

ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع تکملے ہیں[1]۔

---

[1] چونکہ ع اور و غیر تابع ہیں ان میں سے کم از کم ایک میں ی شریک ہونا چاہیے۔ فرض کرو کہ ی، ع میں ہے۔ یہ ہم اس وجہ سے کہتے ہیں کہ ع + ا و + ب، حرف لا اور ما کا تفاعل نہ ہونے پائے کیونکہ اگر ایسا ہو تو ع + ا و + ب = ۰ سے (۱) کی رقمیں غیر متعین ہو جائیں گی اور معمولی طریقہ پر مساوات (۱) پوری نہ ہو سکے گی۔

اب اِس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ (۱) کا ایک تکملہ

۶ + ا و + ب = ۰ (۲)

ہے۔

(۵۹ اِس کو کامِل تکملہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔ عام تکملہ کو

۶ + ا و + ف (ا) = ۰ (۳)

و + فَ (ا) = ۰ (۴)

سے معلوم کیا جاتا ہے۔

(۴) سے ظاہر ہے کہ ا، صرف و کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

ا = فا (و)

(۳) میں درج کرنے سے

۶ = (و کا ایک تفاعل)

اِس لیے فرض کرو کہ ۶ = سا (و)

یہ اُس عام تکملہ فہ (۶، و) = ۰ کے معادل ہے جو اِس باب کے شروع میں حاصل ہوا تھا۔

خطی مساوات اِس امر میں استثنائی ہے کہ اِس کا کامِل تکملہ (۲)، عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔ دوسری خصوصیت یہ ہے کہ ممیز، جو یہاں وہ منحنی ہیں جو ذیلی مساواتوں سے تعبیر ہوتے ہیں تعداد میں تہرے لامتناہی ہونیکی بجائے صرف دوہرے لامتناہی ہیں۔ صرف ایک ممیز ایک دیے ہوئے نقطہ میں سے (عام طور پر) گذرتا ہے حالانکہ غیر خطی صورت میں جس کی تمثیل گذشتہ دفعہ میں دی گئی ہے ایک معلومہ نقطہ میں سے ممیزوں کی لامتناہی تعداد گذر سکتی ہے اور اِن سے ایک سطح بن سکتی ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) وہ سطح معلوم کرو جو

ی = ع لا + ق ا + ع^{۲} + ع ق + ق^{۲}

کے اُن ممیزوں سے تکوین پاتی ہے جو محور لا کے متوازی ہیں۔ اِس امر کی تصدیق کرو کہ وہ حقیقت میں تفرقی مساوات کو پورا کرتی ہے اور اُس سطح کو مس کرتی ہے جو نادر تکملہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ ی^{۲} = ۴ لا ما، مساوات

ی = ع لا + ق ما + لوک ع ق

کا ایک تکملہ ہے جو اُن مستویوں کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور مبداء میں سے گذرتے ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ ق = ۳ ع^{۲} کے وہ ممیز جو نقطہ (-۱، ۰، ۰) میں سے گذرتے ہیں مخروط (لا + ۱)^{۲} + ۱۲ ما ی = ۰ کی تکوین کرتے ہیں۔

(۴) مساوات ی = ع لا + ق ما + ق/ع

کے تکملہ (ما + ۱)^{۲} + ۴ لا ی = ۰ کی نوعیت کیا ہے؟

(۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

ی = (لا + ما)^{۲} + ا لا + ب ما

ی = (لا + ما)^{۲} + (م لا^{۲} + ن ما^{۲})/(لا + ما)

میں سے کسی ایک کو ایک خاص تفرقی مساوات کے کامل تکملہ کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور اِس سے دوسری مساوات کو عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت کے طور پر ماخوذ کیا جا سکتا ہے۔ [لندن]

(۶) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات ع^{۲} = ۴ ی قو$^{ق ما/ی}$ کا ایک کامل تکملہ (۱۶۰)

ی = (لا + ا)^{۲} قو$^{ب ما}$

ہے۔

ثابت کرو کہ ما^{۲} ی = ۴ (لا ما/(۲-۱))$^{۲-ما}$ اُسی مساوات کے عام تکملہ کا

حصہ ہے، اِس کو اوپر دئے ہوئے کامل تکملہ سے اخذ کرو۔ [لندن]

نوٹ: جزئی تفرقی مساواتوں پر ان طریقوں کے مشابہ طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں جنکا ذکر دفعہ ۶۷ کے ختم پر نوٹ میں کیا گیا ہے۔ مثلاً

$$ی^۲(ع^۲ ی^۲ + ق^۲) = ۱$$

کو لو جس میں $ع \equiv \frac{جف\ ی}{جف\ لا}$ اور $ق \equiv \frac{جف\ ی}{جف\ ما}$

حل کا معمولی طریقہ یہ ہے کہ ی کو لا + ا ما (= ء فرض کرو) کا ایک تفاعل فرض کیا جائے۔ اِس سے حاصل ہوگا

$$ی^۲ \left(\frac{فر\ ی}{فر\ ء}\right)^۲ (ی^۲ + ا^۲) = ۱$$

اب متغیروں کو جدا کرنے سے $ء + ب = \pm \frac{۱}{۳} (ی^۲ + ا^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ حاصل ہوتا ہے جس سے کامل ابتدائی $(ی^۲ + ا^۲)^۳ = ۹ (لا + ا ما + ب)^۲$ ملتا ہے۔ وہ طریقہ اختیار کرو جو دفعہ ۸۱ کے ختم پر نوٹ میں درج کیا گیا ہے۔ ب کی بجائے $\frac{۱}{۳} ا^۳ - ا ک$ رکھو، ۳ ا^۲ سے تقسیم کرو اور پھر ا کو لا متناہی بتاؤ تو $ی^۲ = ۲ (ما - ک)$ حاصل ہوگا جو تفرقی مساوات کو یقیناً پورا کرتا ہے۔ ممکن ہے یہ فرض کر لیا جائے کہ یہ عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے جو اکہرے لا متناہی ذیلی قبیل[1]

$$(ی^۲ + ا^۲)^۳ = ۹ (لا + ا ما + \frac{۱}{۳} ا^۳ - ا ک)^۲$$

کے لفاف کو تعبیر کرتی ہے۔ لیکن اِس سطح پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی جیوب التمام میں نسبت

$$۱۸ (لا + ا ما + \frac{۱}{۳} ا^۳ - ا ک) : ۱۸ ا (لا + ا ما + \frac{۱}{۳} ا^۳ - ا ک) :$$

ہے اور $ی^۲ = ۲ (ما - ک)$ پر کے کسی نقطہ کے عماد کی سمتی جیوب التمام میں نسبت $- ۶ ی (ی^۲ + ا^۲)^۲$

[1] Sub-family

ی۲ - : ۲ :

ہے - نسبتوں کے یہ دو جبٹ، ک کی کسی قیمت کے لیے ایک ہی نہیں ہو سکتے سوائے قیمت ∞ کے - اس لیے ی^۲ = ۲ (ما - ک) ایک لفاف کو تعبیر نہیں کرتا - اس کو بقیہ تکملہ کہہ سکتے ہیں -

طالب علم کو یہ گمان ہو سکتا ہے کہ کامل تکملہ کے اخذ کرنے میں منطقی نقص حسب سابق متغیروں کو جدا کرنے میں موجود ہے - لیکن حقیقت میں ہم نے استدلال کے ایک مختلف حصہ میں ایک غلط مفروضہ اختیار کیا ہے یعنے وہاں جہاں ہم نے یہ مان لیا کہ ما^۲ لا + ۱ ما ایک تفاعل ہے - یہ مفروضہ جائز نہیں اگر ی^۲ صرف ما کا ایک تفاعل ہو اور یہ وہی مستثنے صورت ہے جس سے بقیہ تکملہ حاصل ہوتا ہے - اسی طرح شکل

فا (لا ، ع ، ق) = ۰

کی کسی جزئی تفرقی مساوات پر بحث کی جا سکتی ہے -

بارھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی = ع لا + ق ما - ع^۲ ق (۲) ۰ = ع لا + ق ما - (ع لا + ی)^۲ ق

(۳) ی (ی^۲ + لا ما) (ع لا - ق ما) = لا^۴ (۴) ع^½ - ق^½ = ۳ لا - ۲ ما

(۵) ع_۱^۲ + ۲ لا_۲ ع_۱ ع_۲ + لا_۲^۲ ع_۲^۲ = ۰ (۶) لا_۳ ع_۱ + لا_۱ ع_۲ + لا_۲ ع_۳ = ۰

(۷) ع^۳ + ق^۳ - ۳ ع ق ی = ۰ (۸) ع_۱^۲ + ع_۲^۲ + ع_۳^۲ = ۴ ی

(۹) ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ = ۴ ی (۱۰) ع^۲ + ۶ ع + ۲ ق + ۴ = ۰

(۱۱) ی^۲ ع^۲ ما + ۶ ی ع لا ما + ۲ ی ق لا^۲ + ۴ لا^۲ ما = ۰

(۱۲) ی ع ما^۲ = لا (ما^۲ + ی^۲ ق^۲) (۱۳) ع^۲ ی^۲ + ق^۲ = ع^۲ ق

(۱۴) (ی − ع لا − ق ما) لا^{۳} ما^{۲} = ق^{۲} ی لا^{۳} − ۳ ع^{۳} ی^{۲} ما^{۲}

(۱۵) ع + ق = ع ق کے عام تکملہ کی وہ مخصوص صورت معلوم کرو جو اُن مستویوں کے لفاف کو تعبیر کرے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں اور نقطہ (۱، ۱، ۱) میں سے گذرتے ہیں۔

(۱۶) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ تکمل پذیر ہو تو اِس سے سطحوں کا ایک ایسا قبیل تعبیر ہو گا جو

ف ع + ق ق = ر

سے تعبیر شدہ قبیل کے علی القوائم ہو گا۔

اِس سے وہ قبیل معلوم کرو جو

فہ {ی (لا + ما)^{۲} ، لا^{۲} − ما^{۲}} = ۰

کے علی القوائم ہے۔

(۱۷) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے مماس مستوی سب کے سب مبداء میں سے گذریں۔

(۱۸) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے عماد سب کے سب دائرہ

لا^{۲} + ما^{۲} = ۱ ، ی = ۰

کو قطع کریں۔

(۱۹) وہ سطحیں معلوم کرو جن کے مماس مستوی محددوں کے مستویوں کے ساتھ مل کر مستقل حجم کا ایک ذو اربعۃ السطوح بنائیں۔

(۲۰) ثابت کرو کہ ایسی کوئی غیر کشاد پذیر (Non-developable) سطح نہیں ہے کہ ہر مماس مستوی، محوروں پر ایسے مقطوعے قطع کرے جن کا جبری مجموعہ صفر ہو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر دو درجی لا^{۲} + ما^{۲} = ۲ ی کے لحاظ سے دو سطحیں قطبی متکافی ہوں اور اگر (لا، ما، ی)، (لا، ما، ے) دو ایسے نظیری نقطے (ایک ایک سطح میں، دوسرا دوسری سطح میں) ہوں کہ اِن میں سے کسی ایک نقطہ پر کا مماس مستوی، دوسرے کا قطبی مستوی ہو تو

لا = ع، ما = ق، ے = ع لا + ق ما − ی، لا = ف، ما = ق

اِس سے ثابت کرو کہ اگر ایک سطح، مساوات

ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰

کو پورا کرے تو دوسری سطح، مساوات

ف (ع، ق، ع لا + ق ما - ی، لا، ما) = ۰

کو پورا کرے گی۔

[ہم کہتے ہیں کہ یہ مساواتیں ایک دوسرے سے ثنویت کے اصول سے اخذ پذیر ہیں]

(۲۲) ثابت کرو کہ وہ مساوات جو ۱۶۱

ی = ع لا + ق ما + ع ق

سے ثنویت کے اُصول سے ماخوذ ہوتی ہے

لا ما + ی = ۰

ہے جس سے

لا = ع = جف ی / جف لا = - ما، ما = ق = - لا،

اور ی = ع لا + ق ما - ی = - لا ما

حاصل ہوتے ہیں۔

اِس سے (پہلی مساوات کے ایک تکملہ کے طور پر) ی = - لا ما کو اخذ کرو۔

(۲۳) ایک جزئی تفرقی مساوات کے ذریعہ مساوات

لا + ما + ی = ف (لا^۲ + ما^۲ + ی^۲)

سے اختیاری تفاعل ساقط کرو۔

[لا اور ما کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرنے سے

۱ + ع = {فَ (لا^۲ + ما^۲ + ی^۲)} (۲ لا + ۲ ی ع)،

اور ۱ + ق = {فَ (لا^۲ + ما^۲ + ی^۲)} (۲ ما + ۲ ی ق)،

اِس لیے (۱ + ع) (ما + ی ق) = (۱ + ق) (لا + ی ع)

یا (ما - ی) ع + (ی - لا) ق = لا - ما]

(۲۴) مثال (۲۳) کا طریقہ صفحہ ۲۹۳ کی مثالوں کے حلوں کی تصدیق کرنے میں استعمال کرو۔

(۲۵) حسب ذیل جزئی تفرقی مساواتوں کے خاص تکملے معلوم کرو جو دئے ہوئے منحنیوں میں سے گذرنے والی سطحوں کو تعبیر کریں: —

(۱) ع + ق = ۱، لا = ۰، ما^{2} = ی

(۲) لا ع + ما ق = ی، لا + ما = ۱، ما ی = ۱

(۳) (ما - ی) ع + (ی - لا) ق = لا - ما، ی = ۰، ما = ۲ لا

(۴) لا (ما - ی) ع + ما (ی - لا) ق = ی (لا - ما)، لا = ما = ی

(۵) ما ع - ۲ لا ما ق = ۲ لا ی، لا = ت، ما = ت^{2}، ی = ت^{3}

(۶) (ما - ی) {۲ لا ما ع + (لا^{2} - ما^{2}) ق} + ی (لا^{2} - ما^{2}) = ۰،

لا = ت^{2}، ما = ۰، ی = ت^{3}

[لا، ما، ی کو منحنی کی دو مساواتوں اور ذیلی مساواتوں کے دو غیر تابع تکملوں ء (لا، ما، ی) = ا، و (لا، ما، ی) = ب سے ساقط کرو۔ اس سے ا اور ب میں ایک رشتہ ملے گا۔ ا کی بجائے ء (لا، ما، ی) اور ب کی بجائے و (لا، ما، ی) رکھو تو مطلوبہ تکملہ حاصل ہوگا۔

مثلاً (۱) کے لیے ء (لا، ما، ی) ≡ لا - ی = ا، و (لا، ما، ی) ≡ ما - ی = ب (دیکھو صفحہ ۲۹۲)

ان سے اور منحنی کی مساواتوں لا = ۰، ما^{2} = ی سے ا = - ما^{2} اور ب = ما - ما^{2} اور اس لیے (ب - ا)^{2} = - ا

ا کی بجائے لا - ی اور ب کی بجائے ما - ی رکھو تو تکملہ

(ما - لا)^{2} = ی - لا

حاصل ہوگا۔

اسی طرح (۲َ)، (۳َ)، اور (۴َ) کے لیے عمل کرو۔ (۵َ) اور (۶َ) میں ہم لا، ما، ی، ت کو پانچ مساواتوں سے ساقط کرتے ہیں۔]

جواب :-

(۲َ) $\text{ما ی} = (\text{لا} + \text{ما})^{۲}$

(۳َ) $۵\,(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^{۲} = ۹\,(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲})$

(۴َ) $(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^{۳} = ۲۷\ \text{لا ما ی}$

(۵َ) $(\text{لا}^{۲} + \text{ما})^{۵} = ۳۲\ \text{ما}^{۲}\,\text{ی}^{۲}$

(۶َ) $\text{لا}^{۳} - ۳\ \text{لا ما}^{۲} = \text{ی}^{۲} - ۲\ \text{ما ی}$

(۶۲۱

تیرہواں باب

پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساواتیں۔ عام طریقے

۱۳۷ — اب ہم چارپی اور جیکوبی کے طریقوں کی وضاحت کریں گے۔ چارپی کے طریقہ میں دو متبوع متغیروں والی مساواتوں سے بحث کی جاتی ہے اور جیکوبی کا طریقہ متعدد متبوع متغیروں والی مساواتوں کے لیے ہے جیکوبی کے طریقہ سے فطرتاً ہم ہمزاد جزئی تفرقی مساواتوں کی بحث پر پہنچتے ہیں۔

اِس باب کے طریقے پچھلے باب کے طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ پیچیدہ اور دقیق ہیں۔ اِس لیے ہم اِن کو اِن کی سادہ ترین شکل میں پیش کریں گے اور متعدد امور کا صرف سرسری ذکر کریں گے اگرچہ کہ اِن پر بہت کچھ لکھا جاسکتا ہے۔

۱۳۸ — چارپی کا طریقہ[۱]۔ دفعہ ۱۳۱ میں ہم نے مساوات

[۱] یہ طریقہ کچھ لگرانج سے منسوب ہے لیکن چارپی نے اِس کی تکمیل کی۔ چارپی کا مقالہ پیارس اکاڈیمی آف سائنس کو ۱۷۸۴ء میں پیش کیا گیا لیکن اِس کے کچھ عرصہ کے بعد ہی مصنف کا انتقال ہوا اور یہ مقالہ نہ چھپا۔

ع - ۳ لاَ۲ = قَ۲ - ما ، . . . . (۱)

کو ایک زائد تفرقی مساوات

ع - ۲ لاَ = اَ ، . . . . (۲)

استعمال کرکے حل کیا، ع اور ق کو لا اور ما کی رقوم میں حل کرکے اِن کی قیمتوں کو

فری = ع فرلا + ق فرما ، . . . . (۳)

میں درج کیا جس سے یہ مساوات تکمیل پذیر ہوجاتی ہے۔ اگر اُس کو تین متغیروں لا، ما، ی میں ایک معمولی تفرقی مساوات سمجھا جائے۔

اب ہم کچھ اِس کے مشابہ طریقہ پہلے رتبہ اور دو متبوع متغیروں والی عام جزئی تفرقی مساوات

فا (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ ، . . . . (۴)

پر استعمال کریں گے۔

ہمیں ایک دوسری مساوات

ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ ، . . . . (۵)

ایسی معلوم کرنی چاہیے کہ ع اور ق کو (۴) اور (۵) سے لا، ما، ی کے (۱۶۳)
تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جاسکے جو (۳) کو تکمیل پذیر بنادیں۔

∴ ضروری اور کافی شرط کہ (۳) تکمیل پذیر ہو یہ ہے کہ

$$ع\left(\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ر}}{\text{جف ما}}\right) + ق\left(\frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}}\right)$$

$$+ ر\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right) = ۰ \quad (\text{تماثلاً})$$

جہاں ع = ع، ق = ق، ر = -۱،

یعنی $$ع\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} - ق\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} - \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} = ۰ ، \ldots (۶)$$

ما اور ی کو مستقل رکھ کر لیکن ع اور ق کو لا، ما، ی کے وہ تفاعل

سمجھ کر جو (۴) اور (۵) کو حل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں (۴) کو لا کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرو تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} = ۰ ,\quad \ldots\ldots (۷)$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} = ۰ ,\quad \ldots\ldots (۸)$$

(۷) اور (۸) سے

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} ,\quad \ldots\ldots (۹)$$

جہاں ج، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}$ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ق}}{\text{جف ی}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} ,\quad \ldots\ldots (۱۰)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = -\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} ,\quad \ldots (۱۱)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} = -\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}} ,\quad \ldots (۱۲)$$

(۶) کو ج[1] سے ضرب دو اور اس میں اندراج کرو تو

$$\text{ع}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right) + \text{ق}\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}\right)$$

$$+ \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = ۰$$

---

[1] ج مماثلاً معدوم نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر ایسا ہو تو اس سے یہ لازم آئے گا کہ فا اور ف جن کو ع اور ق کے تفاعل سمجھا گیا ہے غیر تابع نہیں ہیں۔ یہ ہمارے اس مفروضہ کے خلاف ہے کہ مساواتوں (۴) اور (۵) کو ع اور ق کے لیے حل کیا جا سکتا ہے۔

یعنی

$$-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}-\left(\text{ع}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}+\text{ق}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ی}}$$

$$+\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}}+\left(\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\right.$$

$$\left.+\bar{\text{ق}}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\right)\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ق}}=\text{۰}\quad\ldots\ldots(\text{۱۳})$$

(۱۶۴) یہ اُس شکل کی ایک خطی مساوات ہے جس پر دفعہ ۱۲۶ میں غور کیا گیا تھا، اِس میں لا، ما، ی، ع، ق متبوع متغیر ہیں اور ف تابع متغیر۔

متناظر ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}}=\frac{\text{فرما}}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}}=\frac{\text{فری}}{-\text{ع}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}}-\bar{\text{ق}}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ق}}}=\frac{\text{فرع}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}+\text{ع}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}}$$

$$=\frac{\text{فرق}}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}+\bar{\text{ق}}\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}}=\frac{\text{فرف}}{\text{۰}},\quad\ldots\ldots(\text{۱۴})$$

ہیں۔

اگر اِن مساواتوں کا کوئی تکملہ معلوم ہو سکے جس میں ع یا ق یا دونوں شامل ہوں تو اِس تکملہ کو زائد تفرقی مساوات (۵) کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور پھر اِس مساوات اور مساوات (۴) سے ع اور ق حاصل ہوتے ہیں جن سے مساوات (۳) تکمل پذیر ہو جاتی ہے۔ اِس سے (۴) کا کامل تکملہ حاصل ہوگا جس سے عام اور نادر تکملے معمولی طریقہ پر اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

۱۳۹ — اِس طریقہ کا استعمال حسب ذیل مثال سے واضح ہوگا:

$$\text{۲ لا ی}-\text{ع لا}^{\text{۲}}-\text{۲ ق لا ما}+\text{ع ق}=\text{۰},\quad\ldots\ldots(\text{۱})$$

اِس مساوات کی دائیں جانب کے جملہ کو فا لیکر پچھلے دفعہ کی ہمزاد مساواتوں (۱۴) میں اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

فرلا / (لا² - ق) = فرما / (۲ لا ما - ع) = فری / (ع لا² + ۲ لا ما ق - ۲ ع ق) = فرع / (۲ ی - ۲ ق ما)

= فرق / ۰ = فرف / ...

جس کا ایک تکملہ ق = ا ، ....(۲)

ہے -

(۱) اور (۲) سے ع = ۲ لا (ی - ا ما) / (لا² - ا)

اِس لیے فری = ع فرلا + ق فرما = ۲ لا (ی - ا ما) فرلا / (لا² - ا) + ا فرما

یعنی (فری - ا فرما) / (ی - ا ما) = ۲ لا فرلا / (لا² - ا)

یعنی

ی = ا ما + ب (لا² - ا)

یہ کامل تکملہ ہے - اِس سے نادر حل

ی = لا² ما

اخذ کرنا آسان ہے -

کامل تکملہ کی شکل سے ظاہر ہے کہ (۱) کو استحالہ

ف = جف ی / جف لا = ۱ / ۲ لا · جف ی / جف لا

سے شکل

ی = ف لا + ق ما - ف ق

میں تحویل کیا جا سکتا ہے جو ایک معیاری شکل کی ایک مخصوص صورت ہے - مساواتیں جو چارپی کے طریقہ سے حل ہو سکتی ہیں اکثر کسی ایسے ہی استحالہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ حل کی جا سکتی ہیں -

حل طلب مثالیں

(۱۶۵)

حسب ذیل مثالوں میں کامل تکملہ معلوم کرنے میں چارپی کا طریقہ استعمال کرو:

(۱) ۲ی + ع^۲ + ق ما + ۲ ما^۲ = ۰ ، (۲) ما ی ع^۲ = ق ،

(۳) ع لا ما + ع ق + ق ما = ما ی ، (۴) ۲ لا (ی^۲ ق^۲ + ۱) = ع ی ،

(۵) ق = ۳ ع^۲ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۹) ،

(۶) ی^۲ (ع^۲ ی^۲ + ق^۲) = ۱ (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۰) ،

(۷) ع - ۳ لا^۲ = ق^۲ - ما (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۱) ،

(۸) ی = ع لا + ق ما + ع^۲ + ق^۲ ، (مقابلہ کرو دفعہ ۱۳۲)

(۹) مثال ۲ کو ما^۲ = ما ، ی^۲ = ے رکھ کر حل کرو -

(۱۰) مثال ۴ کو متغیروں کے کسی موزوں استحالہ سے حل کرو۔

۱۴۰ - تین یا تین سے زیادہ متبوع متغیر - جیکوبی* کا طریقہ - مساوات

فا (لا$_۱$ ، لا$_۲$ ، لا$_۳$ ، ع$_۱$ ، ع$_۲$ ، ع$_۳$) = ۰ ، . . . . (۱)

پر غور کرو جس میں تابع متغیر صریحی طور پر واقع نہیں ہے لیکن اس کے جزئی تفرقی سر ع$_۱$ ، ع$_۲$ ، ع$_۳$ بلحاظ تین متبوع متغیروں لا$_۱$ ، لا$_۲$ ، لا$_۳$ کے شریک ہیں۔ جیکوبی کے طریقہ میں بنیادی تخیل چارپی کے طریقہ کے تخیل کے بہت مشابہ ہے۔

ہم ایسی دو زائد مساواتیں

فا$_۱$ (لا$_۱$ ، لا$_۲$ ، لا$_۳$ ، ع$_۱$ ، ع$_۲$ ، ع$_۳$) = ا$_۱$ ، . . . . . . (۲)

فا$_۲$ (لا$_۱$ ، لا$_۲$ ، لا$_۳$ ، ع$_۱$ ، ع$_۲$ ، ع$_۳$) = ا$_۲$ ، . . . . (۳)

(جہاں ا$_۱$ اور ا$_۲$ اختیاری مستقل ہیں) معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ ع$_۱$ ، ع$_۲$ ، ع$_۳$ ، مساواتوں (۱) ، (۲) ، (۳) سے لا$_۱$ ، لا$_۲$ ، لا$_۳$ کے

* کارل گیسٹاف جیکب جیکوبی (پوٹسڈام ۱۸۰۴ء تا ۱۸۵۱ء) کو ناقص تفاعلوں کے نظریہ کے

تفاعلوں کے طور پر حاصل ہو سکیں اور یہ تفاعل

$$\text{فری} = \text{ع}_1\,\text{فرلا}_1 + \text{ع}_2\,\text{فرلا}_2 + \text{ع}_3\,\text{فرلا}_3 \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۴)$$

کو تکمیل پذیر بنا دیں جس کے لیے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_1} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف لا}_2} = \frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_2} \text{ ، } \frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_1} = \frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_3}$$

$$\frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_2} = \frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_3} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اب لا₂ اور لا₃ کو مستقل رکھ کر لیکن ع₁، ع₂، ع₃ کو لا₁، لا₂، لا₃ کے وہ تفاعل سمجھ کر جو (۱)، (۲)، (۳)، کو حل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں (۱) کو لا₁ کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کرو تو

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}\,\frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_2}\,\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_3}\,\frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_1} = ۰ \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۶)$$

اسی طرح

$$\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_1}\,\frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_2}\,\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_3}\,\frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_1} = ۰ \text{ ، } \quad \ldots\ldots (۷)$$

(۱۶۶) (۶) اور (۷) سے

$$\frac{\text{جف (فا ، فا}_1\text{)}}{\text{جف (لا}_1\text{ ، ع}_1\text{)}} + \frac{\text{جف (فا ، فا}_1\text{)}}{\text{جف (ع}_2\text{ ، ع}_1\text{)}}\,\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف (فا ، فا}_1\text{)}}{\text{جف (ع}_3\text{ ، ع}_1\text{)}}\,\frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_1} = ۰ \quad \ldots (۸)$$

جہاں $\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}،\text{ع}_1)}$ سے "جیکوبی" $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1}\,\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_1} - \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}\,\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_1}$ کو تعبیر کیا گیا ہے۔

اسی طرح

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}_2،\text{ع}_2)} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\text{ع}_2)}\,\frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_2} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_3،\text{ع}_2)}\,\frac{\text{جف ع}_3}{\text{جف لا}_2} = 0 \quad \ldots\ldots (9)$$

اور

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}_3،\text{ع}_3)} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\text{ع}_3)}\,\frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_3} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_2،\text{ع}_3)}\,\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_3} = 0 \quad \ldots\ldots (10)$$

مساواتوں (۸)، (۹)، (۱۰) کو جمع کرو۔

دو رقمیں

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_2،\text{ع}_1)}\,\frac{\text{جف ع}_2}{\text{جف لا}_1} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\text{ع}_2)}\,\frac{\text{جف ع}_1}{\text{جف لا}_2}$$

$$= \frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}_1\,\text{جف لا}_2}\left\{\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_2،\text{ع}_1)} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\text{ع}_2)}\right\} = 0$$

ہیں۔ اسی طرح رقموں کے دو دو سرے زوج معدوم ہوتے ہیں اور بالآخر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}_1،\text{ع}_1)} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}_2،\text{ع}_2)} + \frac{\text{جف}(\text{فا}،\text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{لا}_3،\text{ع}_3)} = 0 \quad \ldots\ldots (11)$$

یعنے

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_1}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_1}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_2}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_2}$$

$$-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_2}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_2}+\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_3}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_3}-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_3}\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_3}=\text{۰،}$$

(۱۲) ....

اِس مساوات کو بالعموم $(\text{فا، فا}_1)=\text{۰}$ لکھا جاتا ہے۔

اسی طرح $(\text{فا، فا}_2)=\text{۰}$

اور $(\text{فا}_1\text{، فا}_2)=\text{۰}$

لیکن یہ دفعہ ۱۲۶ کی شکل کی خطی مساواتیں ہیں۔ پس حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:

ذیلی مساواتوں

$$\frac{\text{فرلا}_1}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_1}}=\frac{\text{فرع}_1}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_1}}=\frac{\text{فرلا}_2}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_2}}=\frac{\text{فرع}_2}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_2}}=\frac{\text{فرلا}_3}{-\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ع}_3}}=\frac{\text{فرع}_3}{\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}_3}}$$

کے دو غیر تابع تکملے $\text{فا}_1=\text{ا}_1$ اور $\text{فا}_2=\text{ا}_2$ معلوم کرنے کی کوشش کرو۔

اگر ان سے شرط

$$(\text{فا}_1\text{، فا}_2)\equiv\Sigma\left(\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف لا}_r}\frac{\text{جف فا}_2}{\text{جف ع}_r}-\frac{\text{جف فا}_1}{\text{جف ع}_r}\frac{\text{جف فا}_2}{\text{جف لا}_r}\right)=\text{۰}$$

پوری ہو اور اگر

$$\text{فا}=\text{فا}_1-\text{ا}_1=\text{فا}_2-\text{ا}_2=\text{۰}.$$

سے ع_1، ع_2 .... کو لا_1، لا_2، لا_3 ... کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جا سکے تو اِن تفاعلوں کو مساوات[۱]

$$\text{فری} = \text{ع}_1\,\text{فرلا}_1 + \text{ع}_2\,\text{فرلا}_2 + \text{ع}_3\,\text{فرلا}_3 + \ldots\ldots$$

میں درج کرو اور تکمل کرو۔

۱۴۱ ۔ مثالیں جیکوبی کے طریقہ پر۔ (۱۶۷)

مثال (۱) $۲\,\text{ع}_1\,\text{لا}_1\,\text{لا}_3 + ۳\,\text{ع}_2\,\text{لا}_3^2 + \text{ع}_2^2\,\text{ع}_3 = ۰$، ......(۱)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}_1}{-۲\,\text{لا}_1\,\text{لا}_3} = \frac{\text{فرع}_1}{۲\,\text{ع}_1\,\text{لا}_3} = \frac{\text{فرلا}_2}{-۳\,\text{لا}_3^2 - ۲\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3} = \frac{\text{فرع}_2}{۰} = \frac{\text{فرلا}_3}{-\text{ع}_2^2}$$

$$= \frac{\text{فرع}_3}{۲\,\text{ع}_1\,\text{لا}_1 + ۶\,\text{ع}_2\,\text{لا}_3}$$

ہیں جن کے تکملے $\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1\,\text{لا}_1 = \text{ا}_1$، ......(۲)

اور $\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_2 = \text{ا}_2$، ......(۳)

ہیں۔

اب اِن قیمتوں کے ساتھ (فا_1، فا_2) صریحاً صفر ہے، اِس لیے (۲) اور (۳) کو مطلوبہ زائد مساواتوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔

$$\text{ع}_1 = \text{ا}_1\,\text{لا}_1^{-1}،\quad \text{ع}_2 = \text{ا}_2،\quad \text{ع}_3 = -\text{ا}_2^{-2}\left(۲\,\text{ا}_1\,\text{لا}_3 + ۳\,\text{ا}_2\,\text{لا}_3^2\right)$$

[۱] وہ ثبوت کہ یہ مساوات ہمیشہ تکمل پذیر ہوگی ضمیمہ ج میں مرقوم ہے۔

اس لیے $فری = ا_{۱} لا_{۱}^{-۱} فرلا_{۱} + ا_{۲} فرلا_{۲} - ا_{۳}^{-۲} (۲ ا_{۱} لا_{۱} + ۳ ا_{۲} لا_{۲}^{۲}) فرلا_{۳}$

یا $ی = ا_{۱} لوک لا_{۱} + ا_{۲} لا_{۲} - ا_{۳}^{-۲} (ا_{۱} لا_{۱}^{۲} + ا_{۲} لا_{۲}^{۳}) + ا_{۴}$

جو کامل تکملہ ہے۔

مثال (۲) $(لا_{۲} + لا_{۴})(ع_{۲} + ع_{۳})^{۲} + ی ع_{۱} = ۰$ ، ...(۴)

یہ مساوات اُس شکل کی نہیں ہے جس پر دفعہ ۱۴۰ میں غور کیا گیا کیونکہ اس میں ی شامل ہے۔

لیکن رکھو $ی = لا_{۴} ، ع_{۱} = \frac{جف ی}{جف لا_{۱}} = \frac{جف لا_{۴}}{جف لا_{۱}} = -\frac{جف ۶}{جف لا_{۱}} \Big/ \frac{جف ۶}{جف لا_{۴}}$

$= -\frac{ع_{۱}}{ع_{۴}}$ (فرض کرو)

جہاں $۶ = ۰$ ، (۴) کا ایک تکملہ ہے۔

اسی طرح $ع_{۲} = -\frac{ع_{۲}}{ع_{۴}} ، ع_{۳} = -\frac{ع_{۳}}{ع_{۴}}$

تو مساوات (۴) ہو جاتی ہے

$$(لا_{۲} + لا_{۳})(ع_{۲} + ع_{۳})^{۲} - لا_{۴} ع_{۱} ع_{۴} = ۰ ، \ldots\ldots (۵)$$

جو چار متبوع متغیروں میں ایک مساوات ہے جس میں تابع متغیر ۶ صریحی طور پر موجود نہیں ہے۔

ذیلی مساواتیں ہیں:

$$\frac{فرلا_{۱}}{لا_{۴} ع_{۴}} = \frac{فرع_{۱}}{۰} = \frac{فرلا_{۲}}{-۲(لا_{۲} + لا_{۴})(ع_{۲} + ع_{۳})} = \frac{فرع_{۲}}{(ع_{۲} + ع_{۳})^{۲}}$$

$$= \frac{فرلا_{۳}}{-۲(لا_{۲} + لا_{۳})(ع_{۲} + ع_{۳})} = \frac{فرع_{۳}}{(ع_{۲} + ع_{۳})^{۲}} = \frac{فرلا_{۴}}{لا_{۴} ع_{۱}} = \frac{فرع_{۴}}{-ع_{۱} ع_{۴}}$$

جن کے تکملے

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 = \text{ا}_1 \qquad \cdots\cdots (٦)$$

$$\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_2' - \text{ع}_3 = \text{ا}_2 \qquad \cdots\cdots (٧)$$

$$\text{فا}_3 \equiv \text{لا}_4\, \text{ع}_4 = \text{ا}_3 \qquad \cdots\cdots (٨)$$

ہیں۔

اب یہ معلوم کرنا ہے کہ آیا (فار، فاس) = ۰ جہاں ر اور س، ۱، ۲، ۳ میں سے کوئی دو قوت نما ہیں۔ آسانی سے اس کا درست ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔

(۵)، (۶)، (۷)، (۸) کو حل کرنے سے

$$\text{ع}_1 = \text{ا}_1 ،\ \text{ع}_4 = \text{ا}_3\, \text{لا}_4^{-1} ،\ \text{ع}_2 = \tfrac{1}{2}\text{ا}_2 \pm \sqrt{\{\text{ا}_1 \text{ا}_3 \backslash (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}} ،\ \text{ع}_3 = \text{ع}_2 - \text{ا}_2$$

اس لیے $\text{فر}\text{ء} = \text{ا}_1\, \text{فرلا}_1 + \text{ا}_3\, \text{لا}_4^{-1}\, \text{فرلا}_4 + \tfrac{1}{2}\text{ا}_2 (\text{فرلا}_2 - \text{فرلا}_3)$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\{\text{ا}_1 \text{ا}_3 \backslash (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}}\,(\text{فرلا}_2 - \text{فرلا}_3)$$

یعنی

$$\text{ء} = \text{ا}_1 \text{لا}_1 + \text{ا}_3\, \text{لوک}\, \text{لا}_4 + \tfrac{1}{2}\text{ا}_2 (\text{لا}_2 - \text{لا}_3) \pm \sqrt{\{\text{ا}_1 \text{ا}_3 (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}} + \text{ا}_4$$

(۱۶۸) اس لیے ء = ۰ سے جبکہ لا_4 کی بجائے ی، $\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_3}$ کی بجائے ا_1، $\frac{1}{2}\frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_3}$ کی بجائے ا_2، اور $\frac{\text{ا}_4}{\text{ا}_3}$ کی بجائے ا_3 رکھا جائے

$$\text{لوک}\, \text{ی} + \text{ا}_1 \text{لا}_1 + \text{ا}_2 (\text{لا}_2 - \text{لا}_3) \pm \sqrt{\{\text{ا}_1 (\text{لا}_2 + \text{لا}_3)\}} + \text{ا}_3 = 0$$

جو (۴) کا کامل تکملہ ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں کے کامل تکملے معلوم کرنے میں جیکوبی کا طریقہ استعمال کرو:

(۱) $ع_1^2 + ع_2^2 + ع_3 =$ ، (۲) $لا_3^2 ع_1^2 ع_2^2 ع_3^2 + ع_1^2 ع_2^2 - ع_3^2 = ۰$

(۳) $ع_1 لا_1 + ع_2 لا_2 = ع_3^2$ ، (۴) $ع_1 ع_2 ع_3 + ع_4^3 لا_1 لا_2 لا_3 لا_4^3 = ۰$

(۵) $ع_1 ع_2 ع_3 = ی^3 لا_1 لا_2 لا_3$ ، (۶) $ع_3 لا_3 (ع_1 + ع_2) + لا_1 + لا_2 = ۰$

(۷) $ع_1^2 + ع_2 ع_3 - ی (ع_2 + ع_3) = ۰$

(۸) $(ع_1 + لا_1)^2 + (ع_2 + لا_2)^2 + (ع_3 + لا_3)^2 = ۳(لا_1 + لا_2 + لا_3)$

۱۴۲ — ہمزاد جزئی تفرقی مساواتیں

— حسب ذیل مثالوں سے نمونے کی چند صورتوں کی وضاحت ہو گی۔

مثال (۱) $فا \equiv ع_1^2 + ع_2 ع_3 لا_2 لا_3^2 = ۰$ ، ...... (۱)

$فا_1 \equiv ع_1 + ع_2 لا_2 = ۰$ ، .... (۲)

یہاں $(فا، فا_1) \equiv \sum \left(\frac{جف\ فا}{جف\ لا_ر} \frac{جف\ فا_1}{جف\ ع_ر} - \frac{جف\ فا}{جف\ ع_ر} \frac{جف\ فا_1}{جف\ لا_ر} \right)$

$= (ع_2 ع_3 لا_3^2) لا_2 - (ع_2 لا_2 لا_3^2) ع_2 = ۰$

اس کو مساوات (۱) کا حل سمجھا جا سکتا ہے اور کام کا ایک حصہ ($فا_1$ کو معلوم کرنا) ختم ہو چکا ہے۔ اس کے بعد $فا_2$ کو معلوم کرنا ہے ایسا کہ

(فا، فا$_2$) = ۰ = (فا$_1$، فا$_2$)

ذیلی مساواتیں جو جیکوبی کے عمل کے ذریعہ فا سے ماخوذ ہوتی ہیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{\text{فرلا}_1}{-2\text{ع}_1} = \frac{\text{فرع}_1}{0} = \frac{\text{فرلا}_2}{-\text{ع}_2\text{لا}_2\text{لا}_3^{\bar{2}}} = \frac{\text{فرع}_2}{\text{ع}_2\text{ع}_3\text{لا}_3^{\bar{2}}} = \frac{\text{فرلا}_3}{-\text{ع}_2\text{لا}_2\text{لا}_3^{\bar{2}}} = \frac{\text{فرع}_3}{2\text{ع}_2\text{ع}_3\text{لا}_2\text{لا}_3}$$

اِس کا ایک تکملہ ع$_1$ = ا، .... (۳)

ہے۔

ہم فا$_2$ کو ع$_1$ لے سکتے ہیں کیونکہ اِس سے شرط (فا، فا$_2$) = ۰ = (فا$_1$، فا$_2$) پوری ہوتی ہے۔

(۱)، (۲)، (۳) کو حل کرنے اور فری = ع$_1$ فرلا$_1$ + ع$_2$ فرلا$_2$ + ع$_3$ فرلا$_3$ میں اندراج کرنے سے

فری = ا فرلا$_1$ - ا لا$_2^{\bar{1}}$ فرلا$_2$ + ا لا$_3^{\bar{2}}$ فرلا$_3$

اس لیے

ی = ا (لا$_1$ - لوک لا$_2$ - لا$_3^{\bar{1}}$) + ب

مثال (۲) فا ≡ ع$_1$ لا$_1$ + ع$_2$ لا$_2$ - ع$_2^2$ = ۰، .... (۴)

فا$_1$ ≡ ع$_1$ - ع$_2$ + ع$_2$ - ۱ = ۰، .... (۵)

یہاں (فا، فا$_1$) = ع$_1$ + ع$_2$ (-۱) = ع$_1$ - ع$_2$

اس کو معدوم ہونا چاہئے اگر فری کے لیئے جو جملہ ہے وہ تکمل پذیر ہے۔

اِس لیے زائد مساوات

ع$_1$ - ع$_2$ = ۰، .... (۶)

حاصل ہوتی ہے۔

(۴)، (۵)، (۶) کو حل کرنے اور اندراج کرنے سے

$$\text{فری} = \frac{\text{فرلا}_1 + \text{فرلا}_2}{\text{لا}_1 + \text{لا}_2} + \text{فرلا}_3$$

اس لیے $\text{ی} = \text{لوک}\,(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) + \text{لا}_3 + \text{ا}$

(۱۶۹) اس نمونہ کی مثالوں میں ذیلی مساواتوں کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔ نتیجہ میں صرف ایک اختیاری مستقل ہے حالانکہ مثال (۱) کے نتیجہ میں دو حاصل ہوئے تھے۔

مثال (۳)۔ $\text{فا} = \text{لا}_1^2 + \text{لا}_2^2 + \text{ع}_3 = 0$، ...... (۷)

$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{لا}_3^2 = 0$، ...... (۸)

یہاں $(\text{فا}, \text{فا}_1) = 2\,\text{لا}_1 + 2\,\text{لا}_2 - 2\,\text{لا}_3$

اب چونکہ لا_1، لا_2، لا_3 متبوع متغیر ہیں اس لیے $(\text{فا}, \text{فا}_1)$ ہمیشہ صفر نہیں ہو سکتا۔ اِس لیے اِن مساواتوں سے فری کے لیے ایک تکمیل پذیر جملہ حاصل نہیں ہو سکتا کیونکہ ان میں کوئی تکملہ مشترک نہیں ہے۔

مثال (۴) $\text{فا} \equiv \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 - 3\,\text{لا}_1 - 3\,\text{لا}_2 - 4\,\text{لا}_3^2 = 0$، ...... (۹)

$\text{فا}_1 \equiv \text{لا}_1\text{ع}_1 - \text{لا}_2\text{ع}_2 - 2\,\text{لا}_1^2 + 2\,\text{لا}_2^2 = 0$، ...... (۱۰)

$\text{فا}_2 \equiv \text{ع}_3 - 2\,\text{لا}_3 = 0$، ...... (۱۱)

(۹)، (۱۰)، (۱۱) کو حل کرنے اور فری کے جملہ میں اندراج کرنے سے

$$\text{فری} = (2\,\text{لا}_1 + \text{لا}_2)\,\text{فرلا}_1 + (\text{لا}_1 + 2\,\text{لا}_2)\,\text{فرلا}_2 + 2\,\text{لا}_3\,\text{فرلا}_3$$

اِس لیے ی = لا$_1^2$ + لا$_1$لا$_2$ + لا$_2^2$ + لا$_3^2$ + ا

اِس دفعہ (فا، فا$_1$)، (فا، فا$_2$)، (فا$_1$، فا$_2$) کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑی -

مثال (۵) فا ≡ ع$_1$ + ع$_2$ - ۱ - لا$_2$ = ۰، ....(۱۲)

فا$_1$ ≡ ع$_1$ + ع$_2$ - لا$_1$ - لا$_2$ = ۰، ....(۱۳)

فا$_2$ ≡ ع$_2$ + ع$_2$ - ۱ - لا$_1$ = ۰، ....(۱۴)

اِن سے فری = لا$_2$فرلا$_1$ + فرلا$_2$ + لا$_1$فرلا$_2$ حاصل ہوتا ہے - چونکہ اِس کو تکمل نہیں کیا جا سکتا اِس لیے ہمزاد مساواتوں میں کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے -

مثال (۶) فا ≡ لا$_1$ع$_1$ - لا$_2$ع$_2$ + ع$_2$ - ع$_2$ = ۰، ....(۱۵)

فا$_1$ ≡ ع$_1$ + ع$_2$ - لا$_1$ - لا$_2$ = ۰، ....(۱۶)

یہاں (فا، فا$_1$) = ع$_1$ - لا$_1$(-۱) - ع$_2$ + لا$_2$(-۱) = ع$_1$ - ع$_2$ + لا$_1$ - لا$_2$

مثال (۲) کی طرح اس سے نئی مساوات

فا$_2$ ≡ ع$_1$ - ع$_2$ + لا$_1$ - لا$_2$ = ۰، ....(۱۷)

حاصل ہوتی ہے -

اب (فا، فا$_2$) = ع$_1$ - لا$_2$ - ع$_2$(-۱) + لا$_2$(-۱) = فا$_1$ = ۰

اور (فا$_1$، فا$_2$) = (-۱) - ۱ + (-۱)(-۱) - (-۱) = ۰

اِس لیے اِس طریقہ سے کوئی اور مساواتیں نہیں حاصل ہو سکتیں۔ فا سے ماخوذ ذیلی مساواتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{\text{فرلا}_1}{-\text{لا}_1} = \frac{\text{فرع}_1}{\text{ع}_1} = \frac{\text{فرلا}_2}{\text{لا}_2} = \frac{\text{فرع}_2}{-\text{ع}_2} = \frac{\text{فرلا}_3}{-1} = \frac{\text{فرع}_3}{0}$$

$$= \frac{\text{فرلا}_4}{1} = \frac{\text{فرع}_4}{0}$$

ایک موزوں تکملہ $\text{فا}_4 \equiv \text{ع}_3 = \text{ا}$، .... (۱۸)

ہے کیونکہ وہ $(\text{فا}_1، \text{فا}_4) = (\text{فا}_2، \text{فا}_4) = (\text{فا}_3، \text{فا}_4) = 0$ کو پورا کرتا ہے۔

اب ہمارے پاس چار مساواتیں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)، (۱۸) ہیں۔ اِن سے

$$\text{ع}_1 = \text{لا}_2،\quad \text{ع}_2 = \text{لا}_1،\quad \text{ع}_3 = \text{ا}،\quad \text{ع}_4 = \text{ا}$$

اِس لیے

$$\text{ی} = \text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ا}\,(\text{لا}_3 + \text{لا}_4) + \text{ب}$$

(۱۰۰) لیکن اِس مثال میں ایک عام تر تکملہ حاصل ہو سکتا ہے۔

دی ہوئی دو مساواتیں (۱۵) اور (۱۶) اور ماخوذ مساوات (۱۷) حسب ذیل سادہ ترجیٹ کے معادل ہیں:

$\text{ع}_1 = \text{لا}_2$، .... (۱۹)

$\text{ع}_2 = \text{لا}_1$، .... (۲۰)

$\text{ع}_3 - \text{ع}_4 = 0$، .... (۲۱)

(۱۹) اور (۲۰) سے $\text{ی} = \text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{لا}_3$ اور (لا_4 کا کوئی تفاعل)

مساوات (۲۱) لگرانج کے نمونہ کی ایک خطی مساوات ہے جس کا عام تکملہ

$$\text{فہ}\,(\text{ی}،\ \text{لا}_3 + \text{لا}_4) = 0$$

ہے یعنی ی، $(\text{لا}_3 + \text{لا}_4)$ کا کوئی تفاعل ہے، اور بلا شبہ اِس میں لا_1 اور لا_2 شریک ہو سکتے ہیں۔

پس اوپر کی تین مساواتوں یا دی ہوئی دو مساواتوں کا ایک عام تکملہ

$$\text{ی} = \text{لا}_1\,\text{لا}_2 + \text{سا}(\text{لا}_3 + \text{لا}_4)$$

ہے جس میں سا (لا۳ + لا۴) ایک اختیاری تفاعل ہے۔ دوسرے طریقہ سے حاصل شدہ کامل تکملہ ایک مخصوص صورت کے طور پر اس عام تکملہ میں شامل ہے۔ عام تکملہ کو کامل تکملہ سے حسب دفعہ ۱۳۴ حاصل کیا جا سکتا تھا۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل ہمزاد مساواتوں کے مشترک کامل تکملے (اگر موجود ہوں) معلوم کرو:

(۱) $\text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 - 8(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)^2 = 0$،

$(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) + \text{ع}_3\,\text{لا}_3 - 1 = 0$

(۲) $\text{لا}_1^2\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 = \text{لا}_2^2\,\text{ع}_3\,\text{ع}_1 = \text{لا}_3^2\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 = 1$

(۳) $\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ع}_3 - 8\,\text{لا}_1\,\text{لا}_2\,\text{لا}_3 = 0$،

$\text{ع}_2 + \text{ع}_3 - 2\text{لا}_2 - 2\text{لا}_3 = 0$

(۴) $2\text{لا}_3\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 - \text{لا}_4\,\text{ع}_4 = 0$

$2\text{ع}_1 - \text{ع}_2 = 0$

(۵) $\text{ع}_1\,\text{لا}_3^2 + \text{ع}_3 = 0$

$\text{ع}_2\,\text{لا}_3^2 + \text{ع}_2\,\text{لا}_2^2 = 0$

(۶) $\text{ع}_2^2 + \text{ع}_3^2 + \text{لا}_1 + 2\text{لا}_2 + 3\text{لا}_3 = 0$،

$\text{ع}_1 + \text{ع}_4^2\,\text{لا}_4 - 1 = 0$

(۷) $2\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + 2\text{ع}_4 = 0$،

ع$_1$ ع$_3$ − ع$_2$ ع$_4$ = ۰

(۸) مثال (۵) کا عام تکملہ معلوم کرو۔

(۹) مثال (۷) کا عام تکملہ معلوم کرو۔

تیرھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ۲ لا$_1$ لا$_3$ ی ع$_1$ ع$_3$ + لا$_2$ ع$_2$ = ۰

(۲) لا$_2$ ع$_3$ + لا$_1$ ع$_4$ = ع$_1$ ع$_3$ − ع$_2$ ع$_4$ + لا$_4^2$ = ۰

(۳) ۹ لا$_1$ لا$_4$ ع$_1$ (ع$_2$ + ع$_3$) − ۴ ع$_4^2$ = ۰،

ع$_1$ لا$_1$ + ع$_2$ − ع$_3$ = ۰

(۴) ۹ لا$_1$ ی ع$_1$ (ع$_2$ + ع$_3$) − ۴ = ۰،

ع$_1$ لا$_1$ + ع$_2$ − ع$_3$ = ۰

(۵) لا$_1$ ع$_2$ ع$_3$ = لا$_2$ ع$_3$ ع$_1$ = لا$_3$ ع$_1$ ع$_2$ = ی^2 لا$_1$ لا$_2$ لا$_3$

(۶) ع$_1$ ی^2 − لا$_1^2$ = ع$_2$ ی^2 − لا$_2^2$ = ع$_3$ ی^2 − لا$_3^2$ = ۰

(۷) ی = ع$_1$ لا$_1$ + ع$_2$ لا$_2$ + ع$_3$ لا$_3$ + ع$_1^2$ + ع$_2^2$ + ع$_3^2$ کا ایک نادر تکملہ معلوم کرو جو اُن تمام زائد سطحوں (Hyper-surfaces) (اس صورت میں زائد مستویوں) کے لفاف کو تعبیر کرے جو کامل تکملہ میں شامل ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ شکل فا (لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$، ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$) = ۰ کی کوئی مساوات نادر تکملہ نہیں رکھ سکتی۔

(۹) ثابت کرو کہ اگر مساوات فا (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ سے ی غائب ہو تو چارپی کا طریقہ جیکوبی کے طریقہ پر منطبق ہوتا ہے۔

(۱۷۱) (۱۰) ثابت کرو کہ اگر جزئی تفرقی مساواتوں کا ایک نظام ع$_1$، ع$_2$، ع$_3$ ....

میں خطی اور متجانس ہو اور ان کا ایک مشترک تکملہ

$$\text{ی} = \text{ا}_1 \text{ع}_1 + \text{ا}_2 \text{ع}_2 + \ldots$$

ہو جہاں ع_1، ع_2، ... وغیرہ لا_1، لا_2، ... کے تفاعل ہیں تو ایک عام تکملہ

$$\text{ی} = \text{فہ}\,(\text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots)$$

ہے۔

ہمزاد مساواتوں

$$\text{لا}_1 \text{ع}_1 - \text{لا}_2 \text{ع}_2 + \text{لا}_2 \text{ع}_3 = 0،$$

$$\text{لا}_4 \text{ع}_3 - \text{لا}_4 \text{ع}_4 + \text{لا}_5 \text{ع}_5 = 0$$

کا ایک عام تکملہ معلوم کرو۔

(۱۱) اگر ع_1 اور ع_2 تبوع متغیروں لا_1 اور لا_2 کے تفاعل ہوں جو ہمزاد مساواتوں

$$\text{فا}(\text{لا}_1، \text{لا}_2، \text{ع}_1، \text{ع}_2) = 0 = \text{فا}_1(\text{لا}_1، \text{لا}_2، \text{ع}_1، \text{ع}_2)$$

کو پورا کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$(\text{فا}، \text{فا}_1) + \left(\frac{\text{جف}\,\text{ع}_1}{\text{جف}\,\text{لا}_2} - \frac{\text{جف}\,\text{ع}_2}{\text{جف}\,\text{لا}_1}\right) \frac{\text{جف}\,(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}\,(\text{ع}_1، \text{ع}_2)} = 0$$

اس سے ثابت کرو کہ اگر ان ہمزاد مساواتوں کو جزئی تفرقی مساواتیں سمجھا جائے اور اگر ان کا ایک مشترک تکملہ ہو تو $(\text{فا}، \text{فا}_1) = 0$ ایک ضروری شرط ہے لیکن وہ کافی نہیں ہے۔

ہمزاد مساواتوں کے حسب ذیل جوڑوں کا امتحان کرو:

$$(1)\quad \text{فا} \equiv \text{ع}_1 + 2\,\text{ع}_2 - 2 = 0$$

$$\text{فا}_1 \equiv (\text{ع}_1 + 2\,\text{ع}_2)^2 - 1 = 0$$

[یہاں $\frac{\text{جف}(\text{فا}،\ \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\ \text{ع}_2)} = 0$ متماثلاً، اور مساواتوں کو ع_1 اور ع_2 کے لیے حل نہیں کیا جا سکتا۔]

$$(۲)\qquad \text{فا} \equiv \text{ع}_1 - \text{ع}_2^2 = 0.$$

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + ۲\,\text{ع}_2\,\text{لا}_1 + \text{لا}_1^2 = 0.$$

[یہاں (فا، فا_1) اور $\frac{\text{جف}(\text{فا}،\ \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\ \text{ع}_2)}$ دونوں ایسے تفاعل ہو جاتے ہیں جو ع_1، ع_2 کی بجائے ان کی قیمتیں لا_1 اور لا_2 کی رقوم میں رکھنے پر، معدوم ہوتے ہیں۔ کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔]

$$(۳)\qquad \text{فا} \equiv \text{ع}_1 - \text{ع}_2^2 + \text{لا}_2 = 0،$$

$$\text{فا}_1 \equiv \text{ع}_1 + ۲\,\text{ع}_2\,\text{لا}_1 + \text{لا}_1^2 + \text{لا}_2 = 0.$$

[ان کا ایک مشترک تکملہ ہے اگرچیکہ $\frac{\text{جف}(\text{فا}،\ \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1،\ \text{ع}_2)}$ ایک ایسا تفاعل ہو جاتا ہے جو ع_1 اور ع_2 کی بجائے ان کی قیمتیں رکھنے پر معدوم ہوتا ہے۔]

چارپی کے طریقہ پر نوٹ: (صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۷)

بعض اوقات ہم ایک مساوات ف (لا، ما، ی، ع، ق) = ۰ معلوم کر سکیں گے جو ذیلی مساواتوں (۱۴) کا نہیں بلکہ اُن سادہ تر مساواتوں کا ایک تکملہ ہو گی جو ذیلی مساواتوں سے ابتدائی تفرقی مساوات (۴) کو استعمال کر کے حاصل کی گئی ہوں۔ یہ (۱۳) کو متماثلاً نہیں بلکہ (۴) کی وجہ سے پورا کرے گی اور (۴) کے ساتھ مل کر (۳) کو تکمل پذیر

بنا دیگی۔ مثلاً مثال ۲ دفعہ ۱۳۹ میں ع ی = ۱ ایک تکملہ ،

$\dfrac{\text{فری}}{-۲\,\text{مای}\,\text{ع}^{۲} + \text{ق}} = \dfrac{\text{فرع}}{\text{ماع}^{۲}}$ کا نہیں بلکہ $\dfrac{\text{فری}}{-\text{مای}\,\text{ع}^{۲}} = \dfrac{\text{فرع}}{\text{ماع}^{۳}}$

کا ہے جس سے بالآخر وہ نتیجہ حاصل ہوگا جو دفعہ ۱۳۹ کے جوابات میں مندرج ہے
اِسی طرح جیکوبی کے طریقہ کے لئے بھی یہ بات صادق آتی ہے ۔

چودھواں باب

دوسرے اور اس سے اعلیٰ رتبوں کی جزئی تفرقی مساواتیں

۱۴۳ — ہم اول چند سادہ مثالیں لیں گے جن کو صرف معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے۔ اس کے بعد خطی جزئی تفرقی مساواتوں پر جن کے سر مستقل ہوں بحث کی جائے گی، ان میں وہ طریقے استعمال کئے جائینگے جو اُن طریقوں کے مشابہ ہوں گے جن کو معمولی خطی مساواتوں کے لیے جن کے سر مستقل تھے استعمال کیا گیا تھا۔ باب کا باقی حصہ زیادہ مشکل مضمون مونجگے کے طریقوں کے لیے وقف ہوگا۔ امید ہے کہ طالب علم اس کے مطالعہ کے بعد مثالوں کو حل کرنے کے قابل ہوگا اور طریقہ کی صحت کا اُس کو یقین ہو جائے گا لیکن ہم نظریہ پر بحث کرنے کی کوشش نہیں کریں گے[۵۲]

متعدد مثالوں میں اُن اختیاری تفاعلوں کو متعین کرنے کی ضرورت پڑے گی جو ہندسی شرطوں کی وجہ سے حلوں میں شریک ہوتے ہیں[۵۳]۔

---

[۵۱] پروفیسر گیاسپرڈ مونجگے (بین، ۱۷۴۶ء تا ۱۸۱۸ء) علم ہندسہ بیانیہ کا بانی تھا۔ اُس نے تفرقی مساواتوں کو ہندسہ مجسمات کے سوالوں میں استعمال کیا۔

[۵۲] اگر اس نظریہ کے مطالعہ کا شوق ہو تو دیکھو گرسا کی کتاب "Sur l'integration des equations aux derives partielles du second ordre"

[۵۳] فراسٹ کی سالڈ جیومٹری سے استفادہ کیا جاسکتا ہے۔

متفرق مثالوں میں جو باب کے ختم پر دی گئی ہیں بعض اہم تفرقی مساواتیں جو ڈوریوں، ڈنڈوں، جھلیوں وغیرہ کے ارتعاشوں کے نظریہ میں وقوع پذیر ہوتی ہیں شریک ہیں۔ اس باب میں دوسرے جزئی تفرقی سروں $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2}$ ، $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}$ ، $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما}^2}$ کو علی الترتیب ر، س، ت سے تعبیر کیا جائے گا۔

۱۴۴ ۔ مساواتیں جن کو معائنہ سے تکمل کیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) $\text{س} = 2\,\text{لا} + 2\,\text{ما}$

لا کے لحاظ سے (ما کو مستقل رکھ کر) تکمل کرنے سے

$$\text{ق} = \text{لا}^2 + 2\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{فہ}(\text{ما})$$

اسی طرح ما کے لحاظ سے تکمل کرنے پر

$$\text{ی} = \text{لا}^2\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^2 + \int \text{فہ}(\text{ما})\,\text{فرما} + \text{ف}(\text{لا})$$

فرض کرو $\text{ی} = \text{لا}^2\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^2 + \text{ف}(\text{لا}) + \text{فا}(\text{ما})$

مثال (۲) وہ سطح معلوم کرو جو مکافیوں (۱۷۳)

$$\text{ی} = 0،\ \text{ما}^2 = 4\,\text{د}\,\text{لا} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = 1،\ \text{ما}^2 = -4\,\text{د}\,\text{لا}$$

میں سے گذرے اور $\text{لا}\,\text{ر} + 2\,\text{ع} = 0$

کو پورا کرے۔

تفرقی مساوات ہے

$$\text{لا}\,\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + 2\,\text{ع} = 0$$

جس سے $\text{لا}^2\,\text{ع} = \text{ف}(\text{ما})$

$$\text{ع} = \frac{1}{\text{لا}^2}\,\text{ف}(\text{ما})$$

ی = − (۱/لا) ف (ما) + فا (ما)

تفاعلوں ف اور فا کو ہندسی شرطوں سے متعین کرنا ہے۔

ی = ۰ اور لا = ما^{۲}/۱۴ رکھنے سے

۰ = − (۱۴/ما^{۲}) ف (ما) + فا (ما)

اسی طرح ۱ = (۱۴/ما^{۲}) ف (ما) + فا (ما)

اس لیے فا (ما) = ۱/۲ ، ف (ما) = ما^{۲}/۱۸

اور ی = ۱/۲ − ما^{۲}/(۱۸ لا)

یعنی ۱۸ لا ی = ۱۴ لا − ما^{۲}

جو ایک مخروطی نما ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) ر = ۶ لا (۲) لا ما س = ۱

(۳) ت = جب لا ما (۴) لا ر + ع = ۹ لا^{۲} ما^{۳}

(۵) ما س + خ = جم (لا + ما) − ما جب (لا + ما)

(۶) ت − لا ق = لا^{۲}

(۷) وہ سطح معلوم کرو جو س = ۸ لا ما کو پورا کرے اور دائرہ ی = ۰ = لا^{۲} + ما^{۲} − ۱ میں سے گذرے۔

(۸) عام سے عام مخروطی نما معلوم کرو جو لا س + ق = ۴ لا + ۲ ما + ۲

کو پورا کرے۔

(۹) وہ گردشی سطح معلوم کرو جو ی = ۰ کو مس کرے اور

$$ر = ۱۲ لا^۲ + ۴ ما^۲$$

کو پورا کرے۔

(۱۰) وہ سطح معلوم کرو جو ت = ۶ لا^۳ ما کو پورا کرے اور دو خطوط

$$ما = ۰ = ی، \quad ما = ۱ = ی$$

میں سے گذرے۔

۱۴۵ ۔ مستقل سروں والی متجانس خطی مساواتیں

تیسرے باب میں ہم نے مساوات

$$(عف^{ن} + ا_۱ عف^{ن-۱} + ا_۲ عف^{ن-۲} + \dots + ا_{ن}) ما = ف(لا)، \dots (۱)$$

پر ذرا تفصیل سے بحث کی ہے جس میں عف $\equiv \frac{فر}{فر لا}$ ہے۔

اب ہم دو متبوع متغیروں کی متناظر مساوات (۱۷۴)

$$(عف^{ن} + ا_۱ عف^{ن-۱} عفَ + ا_۲ عف^{ن-۲} عفَ^{۲} + \dots + ا_{ن} عفَ^{ن}) ی$$

$$= ف(لا، ما) \dots\dots (۲)$$

پر جہاں عف $\equiv \frac{فر}{فر لا}$ اور عفَ $\equiv \frac{فر}{فر ما}$، اختصاراً بحث کریں گے۔

سادہ ترین صورت (عف - م عفَ) ی = ۰

یعنی $ع - م ق = ۰$

ہے جس کا حل $فہ (ی، ما + م لا) = ۰$

یعنی $ی = فا (ما + م لا)$

ہے۔

اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ (اور اِس کی آسانی سے تصدیق ہو جاتی ہے) (۲) کا حل

$$ی = فا_۱(ما + م_۱ لا) + فا_۲(ما + م_۲ لا) + \cdots + فا_ن(ما + م_ن لا)$$

ہے اگر ف (لا، ما) = ۰ ۔ جہاں $م_۱$، $م_۲$، .....، $م_ن$ مساوات

$$م^ن + ا_۱ م^{ن-۱} + ا_۲ م^{ن-۲} + \cdots + ا_ن = ۰$$

کی اصلیں ہیں اور یہ تمام اصلیں مختلف ہیں ۔

مثال ۔ $$\frac{جف^۳ ی}{جف لا^۳} - ۳ \frac{جف^۳ ی}{جف لا^۲ جف ما} + ۲ \frac{جف^۳ ی}{جف لا جف ما^۲} = ۰$$

یعنے $$(عف^۳ - ۳ عف^۲ عفَ + ۲ عف عفَ^۲) ی = ۰$$

$م^۳ - ۳ م^۲ + ۲ م = ۰$ کی اصلیں ۰، ۱، ۲ ہیں ۔

اِس لیے $$ی = فا_۱(ما) + فا_۲(ما + لا) + فا_۳(ما + ۲ لا)$$

حل طلب مثالیں

(۱) $$(عف^۳ - ۶ عف^۲ عفَ + ۱۱ عف عفَ^۲ - ۶ عفَ^۳) ی = ۰$$

(۲) $$۲ ر + ۵ س + ۲ ت = ۰$$

(۳) $$\frac{جف^۲ ی}{جف لا^۲} - \frac{جف^۲ ی}{جف ما^۲} = ۰$$

(۴) وہ سطح معلوم کرو جو ر + س = ۰ کو پورا کرے اور ناقصی مکافی نما $ی = ۴ لا^۲ + ما^۲$ کو اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = ۲ لا + ۱ سے منقطع ہوتی ہے ۔ [نوٹ: اِن دو سطحوں کے لیے ع کی قیمتیں (اور نیز ق کی قیمتیں) ما = ۲ لا + ۱ پر کے کسی نقطہ کے لیے مساوی ہونی چاہئیں]

۱۴۶۔ وہ صورت جبکہ امدادی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔

مساوات (عف ـ م عفَ)۲ ی = ۰ ، .... (۱)

پر غور کرو۔

رکھو (عف ـ م عفَ) ی = ع

تو مساوات (۱) ہو جاتی ہے (عف ـ م عفَ) ع = ۰

جس سے ع = فا (ما + م لا)

اس لیے (عف ـ م عفَ) ی = فا (ما + م لا)

یا ع ـ م ق = فا (ما + م لا)

ذیلی مساواتیں

$$\frac{فرلا}{۱} = \frac{فرما}{-م} = \frac{فری}{فا(ما+م لا)}$$

ہیں، ان سے (۱۷۵)

ما + م لا = ل

اور فری ـ فا (ل) فرلا = ۰

یعنے ی ـ لا فا (ما + م لا) = ب

اس لیے عام تکملہ فہ {ی ـ لا فا (ما + م لا)، ما + م لا} = ۰

یا ی = لا فا (ما + م لا) + فا۱ (ما + م لا)

ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف ـ م عفَ)ن ی = ۰

کا تکملہ ی = لان-۱ فا (ما + م لا) + لان-۲ فا۱ (ما + م لا) + ... + فان-۱ (ما + م لا)

ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) (۴ عف^{2} + ۱۲ عف عفَ + ۹ عفَ^{2}) ی = ۰

(۲) ۲۵ ر − ۴۰ س + ۱۶ ت = ۰

(۳) (عف^{3} − ۴ عف^{2} عفَ + ۴ عف عفَ^{2}) ی = ۰

(۴) وہ سطح معلوم کرو جو دو خطوط ی = لا = ۰، ی − ۱ = لا − ما = ۰ میں سے گذرے اور ر − ۴ س + ۴ ت = ۰ کو پورا کرے۔

۱۴۷ - خاص تکملہ - اب ہم دفعہ ۱۴۵ کی مساوات (۲) کی طرف رجوع ہوتے ہیں اور اِس کو اختصاراً

فا (عف، عفَ) ی = ف (لا، ما)

لکھتے ہیں۔

ہم تیسرے باب کی اتباع قدم بہ قدم کر کے ثابت کر سکتے ہیں کہ ی کی عام سے عام قیمت ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل (جو ی کی قیمت ہے جبکہ تفرقی مساوات میں ف (لا، ما) کی بجائے صفر رکھا گیا ہو) کا حاصل جمع ہے۔

خاص تکملہ کو $\frac{1}{\text{فا (عف، عفَ)}}$ ف (لا، ما) لکھا جا سکتا ہے اور ہم عف اور عفَ کے علامتی تفاعل کو اُسی طرح استعمال کر سکتے ہیں جس طرح ہم نے علامت عف کو استعمال کیا تھا یعنے اِس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں، جزئی کسور میں توڑ سکتے ہیں، یا ایک لامتناہی سلسلہ میں پھیلا سکتے ہیں۔

مثلاً

$$\frac{1}{\text{عف}^{2} - ۶\,\text{عف عفَ} + ۹\,\text{عفَ}^{2}} (۱۲\,\text{لا}^{2} + ۳۶\,\text{لا ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}\left(1-\frac{3\,\text{عفَ}}{\text{عف}}\right)^{-2}(12\,\text{لا}^2+36\,\text{لا ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}\left(1+\frac{6\,\text{عفَ}}{\text{عف}}+\frac{27\,\text{عفَ}^2}{\text{عف}^2}+\cdots\right)(12\,\text{لا}^2+36\,\text{لا ما})$$

$$= \frac{1}{\text{عف}^2}(12\,\text{لا}^2+36\,\text{لا ما}) + \frac{6}{\text{عف}^3}\times 36\,\text{لا}$$

$$= \text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما} + 9\,\text{لا}^4 = 10\,\text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما}$$

اِس لیے $(\text{عف}^2 - 6\,\text{عف عفَ} + 9\,\text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 12\,\text{لا}^2 + 36\,\text{لا ما}$ کا حل

$$\text{ی} = 10\,\text{لا}^4 + 6\,\text{لا}^3\,\text{ما} + \text{فہ}(\text{ما}+3\,\text{لا}) + \text{لا سا}(\text{ما}+3\,\text{لا})$$

ہے۔

حل طلب مثالیں

(۱) $(\text{عف}^2 - 2\,\text{عف عفَ} + \text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 12\,\text{لا ما}$

(۲) $(2\,\text{عف}^2 - 5\,\text{عف عفَ} + 2\,\text{عفَ}^2)\,\text{ی} = 24(\text{ما}-\text{لا})$ (۱۷۶)

(۳) لا اور ما کا ایک حقیقی تفاعل و معلوم کرو جو صفر میں تحویل ہو جبکہ ما = ۰، اور

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ما}^2} = -4\pi(\text{لا}^2+\text{ما}^2)$$

کو پورا کرے۔

۱۴۸ - مختصر طریقے - جب، ف (لا، ما)، ا لا + ب ما کا تفاعل ہوتا ہے تو مختصر طریقے استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

اب $\text{عف فہ}(\text{ا لا}+\text{ب ما}) = \text{ا فہَ}(\text{ا لا}+\text{ب ما})$،

عفَ فہ (ا لا + ب ما) = ب فہَ (ا لا + ب ما)

اِس لیے فا(عف، عفَ) فہ (ا لا + ب ما) = فا(ا، ب) فہ^(ن) (ا لا + ب ما)

جہاں فہ^(ن)، فہ کا ن واں مشتق تفاعل ہے اور ن، فا(عف، عفَ) کا درجہ ہے۔

اِس کے بالعکس

۱ / فا(عف، عفَ) فہ^(ن) (ا لا + ب ما) = ۱ / فا(ا، ب) فہ (ا لا + ب ما) ...(۱)

بشرطیکہ فا(ا، ب) ≠ ۰، مثلاً

۱ / (عف^۳ − ۴ عف^۲ عفَ + ۴ عف عفَ^۲) جم (۲ لا + ۳ ما) = −جب (۲ لا + ۳ ما) / (۲^۳ − ۴ × ۲^۲ × ۳ + ۴ × ۲ × ۳^۲)

= −۱/۳۲ جب (۲ لا + ۳ ما)

کیونکہ فہ (۲ لا + ۳ ما) کو −جب (۲ لا + ۳ ما) لیا جا سکتا ہے اگر

فہ‴ (۲ لا + ۳ ما) = جم (۲ لا + ۳ ما)

اگر فا(ا، ب) = ۰ تو اِس صورت میں ہم مساوات

(عف − م عفَ) ی ≡ ع − م ق = لا^ر سا (ما + م لا)

پر غور کرتے ہیں جس کا حل آسانی سے

ی = لا^(ر+۱) / (ر + ۱) سا (ما + م لا) + فہ (ما + م لا)

حاصل ہوتا ہے، اِس لیے ہم لے سکتے ہیں

۱ / (عف − م عفَ) × لا^ر سا (ما + م لا) = لا^(ر+۱) / (ر + ۱) سا (ما + م لا)

پس ۱ / (عف − م عفَ)^ن سا (ما + م لا)

= ۱ / (عف ۔ م عفَ)^(ن-۱) × لا سا (ما + م لا) = ...

= (لا^ن / |ن) سا (ما + م لا)' .... (ب)

مثلاً   ۱ / (عف^۲ ۔ ۲ عف عفَ + عفَ^۲) مس (ما + لا) = ۱/۲ لا^۲ مس (ما + لا)

اور   ۱ / (عف^۲ ۔ ۵ عف عفَ + ۴ عفَ^۲) جب (۴ لا + ما)

= ۱ / (عف ۔ ۴ عفَ) · ۱ / (عف ۔ عفَ) جب (۴ لا + ما)

= ۱ / (عف ۔ ۴ عفَ) × ۔ ۱/۳ جم (۴ لا + ما)' (ا) سے

= ۔ ۱/۳ لا جم (۴ لا + ما)' (ب) سے

حل طلب مثالیں

(۱۷۷)

(۱) (عف^۲ ۔ ۲ عف عفَ + عفَ^۲) ی = و^(لا + ۲ ما)

(۲) (عف^۲ ۔ ۶ عف عفَ + ۹ عفَ^۲) ی = ۶ لا + ۲ ما

(۳) (عف^۳ ۔ ۴ عف^۲ عفَ + ۴ عف عفَ^۲) ی = ۴ جب (۲ لا + ما)

(۴) ۲ ر ۔ س ۔ ۳ ت = ۵ و^لا / و^ما

(۵) جف^۲ و / جف لا^۲ + جف^۲ و / جف ما^۲ = ۱۲ (لا + ما)

(۶) ۴ ر ۔ ۴ س + ت = ۱۶ لوک (لا + ۲ ما)

۱۴۹ ۔ عام طریقہ ۔ خاص تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ

معلوم کرنے کے لیے مساوات

(عف - م عفَ) ی ≡ رء - م ق = ف (لا، ما)

پر غور کرو۔

ذیلی مساواتیں

فرلا / ۱ = فرما / -م = فری / ف (لا، ما)

ہیں جن کا ایک تکملہ ما + م لا = ج ہے۔

اِس تکملہ کو دوسرا تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کرنے سے

فری = ف (لا، ج - م لا) فرلا

ی = ∫ ف (لا، ج - م لا) فرلا + مستقل

جہاں تکمل کے بعد ج کی بجائے ما + م لا رکھنا ہوگا۔

پس ہم ۱ / (عف - م عفَ) × ف (لا، ما) کو

∫ ف (لا، ج - م لا) فرلا لے سکتے ہیں جہاں تکمل کے بعد ج کی بجائے ما + م لا رکھنا ہوگا۔

مثال۔ (عف - ۲عفَ) (عف + عفَ) ی = (ما - ۱) و^لا

یہاں ∫ ف (لا، ج - ۲لا) فرلا = ∫ (ج - ۲لا - ۱) و^لا فرلا = (ج - ۲لا + ۱) و^لا

اِس لیے ۱ / (عف - ۲عفَ) (ما - ۱) و^لا = (ما + ۱) و^لا، ج کی بجائے ما + ۲لا رکھنے سے

اسی طرح ۱ / (عف + عفَ) (ما + ۱) و^لا کو ∫ (ج + لا + ۱) و^لا فرلا = (ج + لا) و^لا سے ج کی بجائے ما - لا رکھ کر معلوم کیا جائے تو ما و^لا حاصل ہوگا جو مطلوبہ

خاص تکملہ ہے۔
پس ی = ما قو^لا + فہ(ما + ۲ لا) + سا(ما - لا)

حل طلب مثالیں

(۱) (عف^۲ + ۲ عف عفَ + عفَ^۲) ی = ۲ جم ما - لا جب ما

(۲) (عف^۲ - ۲ عف عفَ - ۱۵ عفَ^۲) ی = ۱۲ لا ما

(۳) ر + س - ۶ ت = ما جم لا

(۴) جف^۲ ی / جف لا^۲ - جف^۲ ی / جف لا جف ما - ۲ جف^۲ ی / جف ما^۲

= (۲ لا^۲ + لا ما - ما^۲) جب لا ما - جم لا ما

(۵) ر - ت = مس^۳ لا مس ما - مس لا مس^۳ ما

(۶) جف^۲ ما / جف لا^۲ - ۴ جف^۲ ما / جف ت^۲ = ۴ لا / ت^۲ - ت / لا^۲

(۱۷۸) ۱۵۰ — **غیر متجانس خطی مساواتیں** ۔ سادہ ترین صورت

(عف - م عفَ - ا) ی = ۰

یعنی ع - م ق = ا ی

ہے جس سے

فہ (ی قو^{-ا لا}، ما + م لا) = ۰

یا ی = قو^{ا لا} سا (ما + م لا)

حاصل ہوتا ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

(عف - م عفَ - ا) (عف - ن عفَ - ب) ی = ۰

کا تکملہ ی = قو^{ا لا} ف (ما + م لا) + قو^{ب لا} فا (ما + ن لا)

ہے اور (عف ـ م عفَ ـ ل)^{۲} ی = ۰ کا تکملہ

ی = و$^{\text{ولا}}$ ف (ما + م لا) + لا و$^{\text{ولا}}$ فا (ما + م لا)

ہے۔

لیکن وہ مساواتیں جن میں علامتی عامل ایسے اجزائے ضربی میں تحویل نہ ہو سکے جو عف اور عفَ میں خطی ہوں اس طریقہ پر تکمیل نہیں کی جا سکتیں۔

مثالاً (عف^{۲} ـ عفَ) ی = ۰ پر غور کرو۔

آزمائشی حل کے طور پر رکھو ی = و$^{\text{ھ لا + ک ما}}$ تو

(عف^{۲} ـ عفَ) ی = (ھ^{۲} ـ ک) و$^{\text{ھ لا + ک ما}}$

اس طرح ی = و$^{\text{ھ (لا + ھ ما)}}$ ایک خاص تکملہ ہے اور اس سے عام تر تکملہ ∑ ا و$^{\text{ھ (لا + ھ ما)}}$ ہے جہاں ہر رقم میں ا اور ھ بالکل اختیاری ہیں اور رقموں کی کوئی تعداد لی جا سکتی ہے۔

تکملہ کی یہ شکل طبیعاتی مسئلوں میں سب سے زیادہ موزوں ہے جیسا کہ چوتھے باب میں کچھ تفصیل کے ساتھ سمجھایا گیا ہے۔ بلاشبہ مستقل سروں والی کسی خطی جزئی تفرقی مساوات کا تکملہ اس طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے لیکن وہ مختصر شکلیں جن میں اختیاری تفاعل آتے ہیں بالعموم قابل ترجیح ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱) عف عفَ (عف ـ ۲ عفَ ـ ۳) ی = ۰۔

(۲) ر + ۲ س + ت + ۲ ع + ۲ ق + ی = ۰

(۳) $\frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$

(۴) (عف² - عفَ² + عف - عفَ) ی = ۰

(۵) (۲ عف³ - ۳ عف² عفَ + عفَ³) ی = ۰

(۶) $\frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف ما}^{2}} = \text{ن}^{2}\text{و}$

(۷) (عف - ۲ عفَ - ۱) (عف - ۲ عفَ² - ۱) ی = ۰

(۸) مثال (۴) کا حل معلوم کرو جو ۱ میں تحویل ہو جبکہ لا = +∞ اور ما² میں تحویل ہو جبکہ لا = ۰

۱۵۱ — خاص تکملے

غیر متجانس مساواتوں کے خاص تکملوں کو حاصل کرنے کے طریقے تیسرے باب کے طریقوں کے بہت مشابہ ہیں، اس لیے ہم صرف چند مثالیں دیں گے۔

مثال (۱) (عف³ - ۳ عف عفَ + عفَ + ۱) ی = $\text{و}^{\text{۲لا+۳ما}}$

$$\frac{1}{\text{عف}^{3} - 3\,\text{عف عفَ} + \text{عفَ} + 1}\,\text{و}^{\text{۲لا+۳ما}}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{۲لا+۳ما}}}{۲^{۳} - ۳ \times ۲ \times ۳ + ۲ + ۱}$$

$$= -\frac{1}{7}\,\text{و}^{\text{۲لا+۳ما}}$$

(۱۷۹) اس لیے $\text{ی} = -\frac{1}{7}\,\text{و}^{\text{۲لا+۳ما}} + \Sigma\, \text{ا}\,\text{و}^{\text{ھ لا+ک ما}}$

جہاں ھ³ - ۳ ھ ک + ھ + ۱ = ۰

مثال (۲) $(\text{عف} + \text{عفَ} - ۱)(\text{عف} + ۲\text{عفَ} - ۳)\,\text{ی} = ۴ + ۳\text{لا} + ۶\text{ما}$

$$\frac{۱}{\text{عف} + \text{عفَ} - ۱}\ \frac{۱}{\text{عف} + ۲\text{عفَ} - ۳} = \frac{۱}{۳}\left\{۱ - (\text{عف} + \text{عفَ})\right\}^{-۱}$$

$$\times\left\{۱ - \frac{\text{عف} + ۲\text{عفَ}}{۳}\right\}^{-۱}$$

$$= \frac{۱}{۳}\left\{۱ + \text{عف} + \text{عفَ} + \text{اعلیٰ تر درجہ کی قیمیں}\right\}$$

$$\times\left\{۱ + \frac{\text{عف} + ۲\text{عفَ}}{۳} + \text{اعلیٰ تر درجہ کی قیمیں}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۳}\left\{۱ + \frac{۴\text{عف} + ۵\text{عفَ}}{۳} + \text{اعلیٰ تر درجہ کی قیمیں}\right\}$$

اِس عامل سے $۴ + ۳\text{لا} + ۶\text{ما}$ پر عمل کرنے سے

$$\frac{۱}{۳}\left\{۴ + ۳\text{لا} + ۶\text{ما} + ۴ + ۱۰\right\} = ۶ + \text{لا} + ۲\text{ما}$$

اس لیے $\text{ی} = ۶ + \text{لا} + ۲\text{ما} + \text{و}^{\text{لا}}\,\text{ف}(\text{ما} - \text{لا}) + \text{و}^{۳\text{لا}}\,\text{فا}(\text{ما} - ۲\text{لا})$

مثال (۳) $(\text{عف}^{۲} - \text{عف}\,\text{عفَ} - ۲\text{عف})\,\text{ی} = \text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})$

$$\frac{۱}{\text{عف}^{۲} - \text{عف}\,\text{عفَ} - ۲\text{عف}}\ \text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})$$

$$= \frac{۱}{-۳^{۲} - (-۳\times۴) - ۲\text{عف}}\ \text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})$$

$$= \frac{۱}{۳ - ۲\text{عف}}\ \text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})$$

$$= \frac{۳ + ۲\text{عف}}{۹ - ۴\text{عف}^{۲}}\ \text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما}) = \frac{۳\,\text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما}) + ۶\,\text{جم}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})}{۹ - ۴(-۳^{۲})}$$

$$= \frac{۱}{۱۵}\,\text{جب}(۳\text{لا} + ۴\text{ما}) + \frac{۲}{۱۵}\,\text{جم}(۳\text{لا} + ۴\text{ما})$$

پس   ی = $\frac{۱}{۱۵}$ جب (۳ لا + ۴ ما) + $\frac{۲}{۱۵}$ جم (۳ لا + ۴ ما) + ∑ ا و$^{ھ لا + ک ما}$

جہاں   ھ^{۲} - ھ ک - ۲ ھ = ۰

حل طلب مثالیں

(۱) (عف - عفَ - ۱) (عف - عفَ - ۲) ی = و$^{۲ لا - ما}$

(۲) س + ع - ق = ی + لا ما   (۳) (عف - عفَ^{۲}) ی = جم (لا - ۳ ما)

(۴) ر - س + ع = ۱   (۵) $\frac{جف^{۲} ما}{جف لا^{۲}}$ - $\frac{جف^{۲} ما}{جف ی^{۲}}$ = ما + و$^{لا + ی}$

(۶) (عف - ۳ عفَ - ۲)^{۲} ی = ۲ و$^{۲ لا}$ جس (ما + ۳ لا)

۱۵۲ - اسقاط کی مثالیں۔ اب ہم پہلے رتبہ کی جزئی تفرقی مساوات سے اختیاری تفاعل کو ساقط کرنے کی مثالیں دینگے۔

مثال (۱)   ۲ ع لا - ق ما = فہ (لا^{۲} ما)

اول لا کے لحاظ سے اور پھر ما کے لحاظ سے تفرق کرنے پر

۲ ر لا - س ما + ۲ ع = ۲ لا ما فہَ (لا^{۲} ما)

اور   ۲ س لا - ت ما - ق = لا^{۲} فہَ (لا^{۲} ما)

اس لیے   لا (۲ ر لا - س ما + ۲ ع) = ۲ ما (۲ س لا - ت ما - ق)

یا   ۲ لا^{۲} ر = ۵ لا ما س + ۲ ما^{۲} ت + ۲ (ع لا + ق ما) = ۰

جو ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے۔

ع لا - ۲ ق ما = ما (لا ما^{۲}) سے ساقط کرنے پر بھی یہی نتیجہ (۱۸۰)

برآمد ہوگا۔

مثال (۲)   ع^{۲} + ق = فہ (۲ لا + ما)

یہاں   ۲ ع ر + س = ۲ فہَ (۲ لا + ما)

اور ۲ ع س + ت = فَہ (۲ لا + ما)

اِس لیے ۲ ع ر + س = ۴ ع س + ۲ ت

جو پھر ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساوات ہے۔

مثال (۳) ما - ع = فہ (لا - ق)

اِس سے حاصل ہوتا ہے

- ر = (۱ - س) فہَ (لا - ق)

اور ۱ - س = - ت فہَ (لا - ق)

اِس لیے رت = (۱ - س)^۲

یا ۲ س + (رت - س^۲) = ۱

اِس مثال میں اور پہلے کی دو مثالوں میں یہ فرق ہے کہ اِس میں ع اور ق، اختیاری تفاعل میں بھی واقع ہوتے ہیں۔ نتیجہ میں (رت - س^۲) کی رقم شریک ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں سے اختیاری تفاعل کو ساقط کرو:

(۱) ع ما - ق + ۳ ما^۲ = فہ (۲ لا + ما^۲)

(۲) لا - $\frac{۱}{ق}$ = فہ (ی)

(۳) ع + لا - ما = فہ (ق - ۲ لا + ما)

(۴) ع لا + ق ما = فہ (ع^۲ + ق^۲)

(۵) ع^۲ - لا = فہ (ق^۲ - ۲ یا) (۶) ع + ی ق = فہ (ی)

۱۵۳ — پچھلے نتیجوں کی تعمیم — اگر لا، ما، ی، ع، ق کے تفاعل ء اور و معلوم ہوں اور مساوات ء = فہ (و) کو حسب سابق استعمال کیا جائے تو

$$\text{ر}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}} + \text{س}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف لا}} + \text{ع}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

$$= \left(\text{ر}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}} + \text{س}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} + \text{ع}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{فَہ(و)}$$

اور

$$\text{س}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}} + \text{ت}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ما}} + \text{ق}\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

$$= \left(\text{س}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}} + \text{ت}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{ق}\frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}\right)\text{فَہ(و)}$$

فَہ (و) کو ساقط کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ر س اور س ت والی رقمیں خارج ہو جاتی ہیں اور نتیجہ شکل

$$\text{ی ر} + \text{س س} + \text{ت ت} + ۶(\text{ر ت} - \text{س}^۲) = \text{و}$$

میں حاصل ہوتا ہے جہاں ی، س، ت، ۶، و میں ع، ق، اور لا، ما، ی، ع، ق کے لحاظ سے ۶ اور و کے جزئی تفرقی سر شامل ہیں

$$\text{سر}\quad ۶ = \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ق}} - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ع}}\,\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ق}}$$

معدوم ہوتا ہے اگر و صرف لا، ما، ی کا تفاعل ہو اور ع یا ق کا نہ ہو۔

اِن نتیجوں سے ہمیں یہ معلوم ہو گا کہ جب ہم دوسرے رتبہ کی مساواتوں سے ابتدا کرتے ہیں اور ان سے پہلے رتبہ کی مساواتیں حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں تو ہمیں کیا توقع کرنی چاہئے۔

(۱۸۱) **۱۵۴ا— ی ر + س س + ت ت = و کو تکمل کرنے کا مونگے کا طریقہ۔** — اب ہم ر، س، ت میں پہلے درجہ کی مساواتوں پر جن کے سر ی، س، ت، و ہوں جو ع، ق، لا، ما، ی کے

تفاعل ہیں غور کریں گے اور دفعات ۱۵۲ اور ۱۵۳ کے عمل کو اکٹھا کرنے کی کوشش کریں گے۔

چونکہ فرع = (جف ع / جف لا) فرلا + (جف ع / جف ما) فرما = رفرلا + س فرما

اور فرق = س فرلا + ت فرما

اس لیے ر ار + س س + ت ت - و = ۰

ہو جاتا ہے ر ا ((فرع - س فرما) / فرلا) + س س + ت ((فرق - س فرلا) / فرما) - و = ۰

یعنی ر ا فرع فرما + ت فرق فرلا - و فرما فرلا - س (ر فرما^{2}

- س فرما فرلا + ت فرلا^{2}) = ۰

مونگے کے طریقہ میں خاص خصوصیت یہ ہے کہ ع، ق، لا، ما کے درمیان ایک یا دو رشتے (جن میں سے ہر رشتہ میں ایک اختیاری تفاعل شریک ہوتا ہے) حاصل کئے جاتے ہیں جو ہمزاد مساواتوں

ر ا فرما^{2} - س فرما فرلا + ت فرلا^{2} = ۰

ر ا فرع فرما + ت فرق فرلا - و فرما فرلا = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

ان رشتوں کو **درمیانی تکملے** کہا جاتا ہے۔

عمل کا طریقہ چند حل شدہ مثالوں کو دیکھنے سے اچھی طرح سمجھ میں آجائے گا۔

مثال (۱) ۲ لا^{2} ر - ۵ لا ما س + ۲ ما^{2} ت + ۲ (ع لا + ق ما) = ۰،

اوپر کی طرح عمل کرنے پر ہمزاد مساواتیں

۲ لا^{2} فرما^{2} + ۵ لا ما فرلا فرما + ۲ ما^{2} فرلا^{2} = ۰، .... (۱)

اور ۲ لا^{2} فرع فرما + ۲ ما^{2} فرق فرلا + ۲ (ع لا + ق ما) فرما فرلا = ۰، ...... (۲)

(۱) سے (لا فرما + ۲ ما فرلا) (۲ لا فرما + ما فرلا) = ۰۔

یعنے   لا^{2} ما = ا   یا   لا ما^{2} = ب

اگر ہم لا^{2} ما = ا لیں اور (۲) کی ہر رقم کو لا فرما یا اِس کے معادل - ۲ ما فرلا سے تقسیم کریں تو

۲ لا فرع - ما فرق + ۲ ع فرلا - ق فرما = ۰

یعنے   ۲ ع لا - ق ما = ج

اِس کو لا^{2} ما = ا کے ساتھ لینے سے درمیانی تکملہ

۲ ع لا - ق ما = فہ (لا^{2} ما)، … (۳)

ملتا ہے جہاں فہ ایک اختیاری تفاعل ہے۔ (مقابلہ کرو مثال (۱) دفعہ ۱۵۲ کے ساتھ)

اسی طرح   لا ما^{2} = ب اور مساوات (۲) سے

ع لا - ۲ ق ما = سا (لا ما^{2})، … (۴)

حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

۳ ع لا = ۲ فہ (لا^{2} ما) - سا (لا ما^{2})،

۳ ق ما = فہ (لا^{2} ما) - ۲ سا (لا ما^{2})

(۱۸۲) اِس لیے فری = ع فرلا + ق فرما = ⅓ فہ (لا^{2} ما) (۲ فرلا / لا + فرما / ما)

- ⅓ سا (لا ما^{2}) (فرلا / لا + ۲ فرما / ما)

یعنے   ی = ⅓ ∫ فہ (لا^{2} ما) فرلوک (لا^{2} ما) - ⅓ ∫ سا (لا ما^{2}) فرلوک (لا ما^{2})

یا   ی = ف (لا^{2} ما) + فا (لا ما^{2})

مثال (۲)۔ ما^{2} ر - ۲ ما س + ت = ع + ۲ ما

ر اور ت کو حسب سابق ساقط کرنے پر ہمزاد مساواتیں

ما^{2} فرما^{2} + ۲ ما فرما فرلا + فرلا^{2} = ۰، … (۵)

اور ما^2 فرع فرما + فرق فرلا − (ع + ۲ ما) فرما فرلا = ۰، ..... (۶)
حاصل ہوتی ہیں ۔

(۵) سے (ما فرما + فرلا)^2 = ۰

یعنی ۲ لا + ما^2 = ا

اِس تکملہ کو استعمال کرنے اور (۶) کی ہر رقم کو ما فرما یا اِس کے مساوی ۔ فرلا سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

ما فرع − فرق + (ع + ۲ ما) فرما = ۰

یعنی ع ما − ق + ۳ ما^2 = ج

اِس سے درمیانی تکملہ

ع ما − ق + ۳ ما^2 = فہ (۲ لا + ما^2)

حاصل ہوتا ہے ۔

اب چونکہ درمیانی تکملہ صرف ایک ہے اس لیے اس کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کرنا چاہیئے ۔

ذیلی مساواتیں

فرلا / ما = فرما / −۱ = فری / (−۳ ما^2 + فہ (۲ لا + ما^2))

ہیں ۔

ایک تکملہ ۲ لا + ما^2 = ا ہے ۔ اِس کو دوسرا تکملہ معلوم کرنے میں استعمال کرنے سے

فری + {− ۳ ما^2 + فہ (ا)} فرما = ۰

یعنی ی − ما^3 + ما فہ (۲ لا + ما^2) = ب

پس عام تکملہ

سا {ی − ما^3 + ما فہ (۲ لا + ما^2)، ۲ لا + ما^2} = ۰

ہے یا ی = ما^3 − ما فہ (۲ لا + ما^2) + ف (۲ لا + ما^2)

مثال (۳)۔ ع ت − ق س = ق^3

ہمزاد مساواتیں

ق فرما فرلا + ع فرلا۲ = ۰ .... (۷)'

اور ع فرق فرلا - ق۳ فرما فرلا = ۰ .... (۸)'

ہیں۔

(۷)' سے فرلا = ۰ یا ق فرما + ع فرلا (= فری) = ۰

یعنی لا = ا یا ی = ب

اگر فرلا = ۰ تو مساوات (۸)' ۰ = ۰ میں تحویل ہوتی ہے۔

اگر ی = ب تو ق فرما = - ع فرلا اور مساوات (۸)'

ع فرق + ق۲ ع فرلا = ۰

یعنی فرق/ق۲ + فرلا = ۰

میں تحویل ہوتی ہے اور اس سے

- ۱/ق + لا = ج = سا (ی) .... (۹)'

(۹)' کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے لیکن ایک مختصر طریقہ (۱۸۳)

یہ ہے کہ اس کو

فرما/فری = ۱/ق = لا - سا (ی)

لکھا جائے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے

ما = لای - ∫ سا (ی) فری + فا (لا)

ما = لای + ف (ی) + فا (لا)

حل طلب مثالیں

(۱) ر - ت جم۲ لا + ع مس لا = ۰

(۲) (لا - ما) (لار - لاس - ماس + مات) = (لا + ما) (ع - ق)

(۳) (قَ + ۱) سَ = (عَ + ۱) تَ

(۴) تَ ۔ رقطۂ ما = ۲ ق مس ما

(۵) لا ما (تَ ۔ رَ) + (لاَ۲ ۔ ما۲) (سَ ۔ ۲) = ع ما ۔ ق لا

(۶) (۱ + ق)۲ رَ ۔ ۲ (۱ + ع + ق + ع ق) سَ + (۱ + ع)۲ تَ =

(۷) وہ سطح معلوم کرو جو ۲ لا۲ رَ ۔ ۵ لا ما سَ + ۳ ما۲ تَ

+ ۲ (ع لا + ق ما) = ۰

کو پورا کرے اور زائدی مکافی نما ی = لا۲ ۔ ما۲ کو اس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = ۱ سے منقطع ہوتی ہے۔

(۸) ق۲ رَ ۔ ۲ ع ق سَ + ع۲ تَ = ۰ کے تکملہ کو شکل

ما + لا ف (ی) = فا (ی)

میں حاصل کرو اور ثابت کرو کہ اس سے ایک سطح تعبیر ہوتی ہے جو ایسے خطوطِ مستقیم سے تکوین پاتی ہے جو ایک ثابت مستوی کے متوازی ہیں۔

۱۵۵[۱] ـــ ر رَ + س سَ + ت تَ + ع (رَ تَ ۔ سَ۲) = و کو تکمل کرنے کا مونجے کا طریقہ۔

ر، س، ت، ع، و حسب سابق ع، ق، لا، ما، ی کے تفاعل ہیں۔

حل کا عمل فطرتاً دو حصوں میں منقسم ہوتا ہے:

(۱) درمیانی تکملوں کو بنانا،

(۲) اِن تکملوں کا مزید تکمل

وضاحت کی خاطر ہم اِن دو حصوں پر جدا جدا غور کریں گے۔

۱۵۶ ـــ درمیانی تکملوں کو بنانا۔ حسب دفعہ ۱۵۴

ر = (فز ع ۔ س فز ما) / فز لا

[۱] اِس باب کا باقی حصہ مطالعہ اول میں ترک کر دیا جائے۔ مونجے نے یہ خیالات اندر و میں)

اور ت = (فرق ـ س فرلا) / فرما

ر اور ت کی بجائے یہ جملے

ں ر + س س + ت ت + ع (ر ت ـ س²) = و

میں درج کرو اور (کسروں کو دور کرنے کے لیے) فرلا اور فرما سے ضرب دو تو حاصل ہوگا

ں فرع فرما + ت فرق فرلا + ع فرع فرق ـ و فرلا فرما

ـ س (ں فرما² ـ س فرلا فرما + ت فرلا²

+ ع فرع فرلا + ع فرق فرما) = ۰

فرض کرو کہ ن ـ س م = ۰ ہے۔

اب ہم ہمزاد مساواتوں (۱۸۴)

م = ۰

ن = ۰

کے حل کو حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

ابتک ہم نے اُن طریقوں کا اتباع کیا ہے جو دفعہ ۱۵۴ میں استعمال کیے گئے تھے لیکن اب ہم م کو گذشتہ کی طرح اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں کر سکتے جس کی وجہ رقموں ع فرع فرلا + ع فرق فرما کی موجودگی ہے۔

اب چونکہ م یا ن کو علٰحدہ علٰحدہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوئی اُمید نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ ہم م + لہ ن کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کی کوشش کرتے ہیں جہاں لہ کوئی ضارب ہے جس کو بعد میں معلوم کیا جائے گا۔

م اور ن کو پوری طرح لکھنے پر وہ جملہ جس کو اجزا میں تحویل کرنا ہے

ں فرما² + ت فرلا² ـ (س + لہ و) فرلا فرما + ع فرع فرلا

+ ع فرق فرما + لہ ں فرع فرما + لہ ت فرق فرلا

+ لہ ع فرع فرق

ہے۔

چونکہ فرع۲ یا فرق۲ کی رقمیں نہیں ہیں اس لیے فرع صرف ایک جزو ضربی میں اور فرق دوسرے جزو ضربی میں واقع ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ اجزائے ضربی

ا فرما + ب فرلا + ج فرع اور ع فرما + ف فرلا + گ فرق

ہیں۔

تب فرما۲، فرلا۲، فرع فرق کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ا ع = ر، ب ف = ت، ج گ = لہ ع

ہم لے سکتے ہیں ا = ر، ع = ا، ب = ک ت، ف = ا/ک،

ج = م ع، گ = لہ/م

دوسری پانچ رقموں کے سروں کو مساوی رکھنے سے

ک ت + ر/ک = -(س + لہ و)، ..... (۱)

لہ ر/م = ع، .... (۲)

ک ت لہ/م = لہ ت، .... (۳)

م ع = لہ ر، .... (۴)

م ع/ک = ع، .... (۵)

(۵) سے م = ک اور اس سے مساوات (۳) پوری ہوتی ہے۔

(۲) سے یا (۴) سے م = لہ ر / ع

پس (۱) سے

لہ² (ر ات + ع و) + لہ ع س + ع² = ۰، .... (۶)

اِس لیے اگر (۶) کی ایک اصل لہ ہو تو مطلوبہ اجزائے ضربی

(ر فرما + لہ (ر ات / ع) فرلا + لہ ر فرع) (فرما + (ع / لہ ر) فرلا + (ع / ر) فرق)

یعنے (ر / ع) (ع فرما + لہ ت فرلا + لہ ع فرع) × (۱ / لہ ر) (لہ ر فرما + ع فرلا + لہ ع فرق)

ہیں۔

اِس لیے ہم خطی مساواتوں

ع فرما + لہ ت فرلا + لہ ع فرع = ۰، .... (۷)

اور لہ ر فرما + ع فرلا + لہ ع فرق = ۰، .... (۸)

سے تکملوں کو معلوم کرنے کی کوشش کریں گے جہاں لہ (۶) کو پورا کرتا ہے۔ (۱۸۵)
عمل کا باقی حصہ حسب ذیل حل شدہ مثالوں سے اچھی طرح واضح ہوگا۔

۱۵۷۔ مثالیں

مثال (۱) ۲ س + (ر ت - س²) = ۱

پچھلے دفعہ کی مساوات (۲) میں ر = ت = ۰، س = ۲،
ع = و = ۱ درج کرنے سے

لہ² + ۲ لہ + ۱ = ۰

... گزشتہ دفعہ کے نتیجے بیان کریں گے لیکن طالب علم کو یہ مشورہ

جو ایک دو درجی ہے جس کی اصلیں مساوی -۱ اور -۱ ہیں -
له = -۱ تو مساوانوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

فرما - فرع = ۰

فرلا - فرق = ۰

حاصل ہوتی ہیں جن کے تکملے صریحاً

ما - ع = مستقل

اور لا - ق = مستقل

ہیں -

اِن کو دفعہ ۱۵۴ کے مطابق استعمال کرنے سے
درمیانی تکملہ ما - ع = ف (لا - ق) حاصل ہوتا ہے -

مثال (۲) ر + ۳ س + ت + (رت - س^۲) = ۱

له میں دو درجی

۲ له^۲ + ۳ له + ۱ = ۰

حاصل ہوتا ہے، اس لیے له = -۱ یا -$\frac{1}{2}$

له = -۱ تو مساوانوں (۷) اور (۸) سے مساواتیں

فرما - فرلا - فرع = ۰،

- فرما + فرلا - فرع = ۰

حاصل ہوتی ہیں جن کے تکملے صریحاً

ع + لا - ما = مستقل، .... (۱)

اور ق - لا + ما = مستقل، .... (۲)

اسی طرح له = -$\frac{1}{2}$ سے

ع + لا - ۲ ما = مستقل، .... (۳)

اور ق - ۲ لا + ما = مستقل، .... (۴)

حاصل ہوتے ہیں -

اب دیکھنا یہ ہے کہ اِن چار تکملوں کو کن جوڑوں میں لینا چاہیئے -

پھر اُن ہمزاد مساواتوں پر غور کرو جو دفعہ ما سبق میں مد = ۰ ن = ۰ سے تعبیر ہوئے ہیں۔ اگر یہ دونوں پورے ہوں تو مد + له₁ ن = ۰ اور مد + له₂ ن = ۰ بھی پورے ہوتے ہیں (جہاں له₁ اور له₂، له کے دو درجی کی اصلیں ہیں)۔ اِس لیے خطی اجزائے ضربی میں سے ایک له = له₁ کے لیے اور ایک (صریحاً دوسرا یا فرما = ۰) له = له₂ کے لیے معدوم ہوتے ہیں۔

اِس کا یہ مطلب ہے کہ ہم تکملوں (۱) اور (۴) کو اور نیز (۲) اور (۳) کو ملاتے ہیں چنانچہ اس طرح دو درمیانی تکملے

ع + لا - ا = ف (ق - ۲ لا + ما)

اور ع + لا - ۲ ما = فا (ق - لا + ما)

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال (۳) ۲ ما ر + (ع لا + ق ما) س + لا ت - لا ما (رت - س^۲) = ۲ - ع ق (۱۸۶)

له میں دو درجی

له^۲ لا ما ع ق - له لا ما (ع لا + ق ما) + لا^۲ ما^۲ = ۰

ہے جس سے له = ما/ع یا لا/ق

دفعہ ما سبق کی مساواتوں (۷) اور (۸) میں درج کرنے اور مختصر کرنے سے

ما فرع - فرلا + ع فرما = ۰، . . . . (۵)

۲ ما فرما - ع لا فرلا - لا ما فرق = ۰، . . . . . . (۶)

- ق ما فرما + لا فرلا - لا ما فرع = ۰، . . . . . . (۷)

اور - ۲ فرما + ق فرلا + لا فرق = ۰، . . . . . . (۸)

(۵) اور (۸) کے واضح تکملوں کو ملانے سے

ما ع - لا = ف (- ا ما + ق لا)

لیکن (۶) اور (۷) غیر تکمل پذیر ہیں کیونکہ ان میں ع اور ق اس طرح واقع ہیں کہ تکمل نہیں کیا جا سکتا۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ لہ کی دو اصلیں مختلف ہیں لیکن صرف ایک درمیانی تکملہ حاصل ہوتا ہے۔

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مساواتوں کا ایک درمیانی تکملہ (یا دو اگر ممکن ہو) معلوم کرو۔

(۱) ۳ ر + ۴ س + ت + (رت - س^۲) = ۱

(۲) ر + ت - (رت - س^۲) = ۱

(۳) ۲ ر + ت ھو^لا - (رت - س^۲) = ۲ ھو^لا

(۴) رت - س^۲ + ۱ = ۰

(۵) ۳ س + (رت - س^۲) = ۲

(۶) ق لا ر + (لا + ما) س + ع ما ت + لا ما (رت - س^۲) = ۱ - ع ق

(۷) (ق^۲ - ۱) ی ر - ۲ ع ق ی س + (ع^۲ - ۱) ی ت + ی^۲ (رت - س^۲) = ع^۲ + ق^۲ - ۱

۱۵۸ — درمیانی تکملوں کا مزید تکمل۔

مثال (۱) دفعہ ۱۵۷ مثال (۱) میں حاصل شدہ درمیانی تکملہ

ما - ع = ف (لا - ق)

پر غور کرو۔

ہم لا - ق = ا

اور ما - ع = ف (ا) = ب، فرض کرو

رکھ کر ایک "کامل" تکملہ کو حاصل کر سکتے ہیں جس میں ا، ب، ج اختیاری مستقل ہونگے۔

پس فری = ع فرلا + ق فرما = (ما - ب) فرلا + (لا - ا) فرما

اور ی = لا ما - ب لا - ا ما + ج

عام تر شکل کا ایک تکملہ یہ فرض کرکے حاصل کیا جا سکتا ہے کہ اختیاری تفاعل ف جو درمیانی تکملہ میں واقع ہے خطی ہے، چنانچہ

ما - ع = م (لا - ق) + ن

اِس کو لگرانج کے طریقہ سے تکمل کرنے پر

ی = لا ما + فہ (ما + م لا) - ن لا

مثال (۲) دفعہ ۱۸۵ مثال (۲) کے دو درمیانی تکملوں

ع + لا - ما = ف (ق - ۲ لا + ما)

اور ع + لا - ۲ ما = فا (ق - لا + ما)

پر غور کرو ۔

(۱۸۷) اگر ہم اِن ہمزاد مساواتوں کو اُسی طرح استعمال کریں جس طرح ہم نے مثال (۱) کی واحد مساوات کو کیا ہے تو

ق - ۲ لا + ما = عہ ،

ق - لا + ما = بہ ،

ع + لا - ما = ف (عہ)،

ع + لا - ۲ ما = فا (بہ)

اگر بائیں جانب کی رقمیں مستقل ہیں تو یہ لغو نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ لا، ما، ع، ق سب مستقل ہیں ۔

لیکن اب فرض کرو کہ عہ اور بہ مستقل نہیں ہیں بلکہ مبدل اور تغیر پذیر ہیں ۔

اِن چار مساواتوں کو حل کرنے سے

لا = بہ - عہ ،

ما = ف (عہ) - فا (بہ)،

ع = ما - لا + ف (عہ)،

ق = لا - ما + بہ

جن سے فری = ع فرلا + ق فرما

= (ما - لا) (فرلا - فرما) + ف (عہ) فرلا + بہ فرما

= - $\frac{1}{2}$ فر (لا - ما)^2 + فَ (عہ) فربہ - ف (عہ) فرعہ

+ ب فَ (عہ) فرعہ - بہ فاَ (بہ) فربہ

یعنے ی = - $\frac{1}{2}$ (لا - ما)^2 - $\int$ ف (عہ) فرعہ - $\int$ بہ فاَ (بہ) فربہ + بہ فَ (عہ)

وہ نتیجہ جو تکملوں کی علامتوں سے پاک ہو حاصل کرنے کے لیے رکھو

$\int$ ف (عہ) فرعہ = فہ (عہ) اور $\int$ فا (بہ) فربہ = سا (بہ)

تو $\int$ بہ فاَ (بہ) فربہ = بہ فا (بہ) - $\int$ فا (بہ) فربہ، تکمل بالحصص سے

= بہ ساَ (بہ) - سا (بہ)

پس ی = - $\frac{1}{2}$ (لا - ما)^2 - فہ (عہ) - بہ ساَ (بہ) + سا (بہ) + بہ فہَ (عہ)

یا بالآخر
ی = - $\frac{1}{2}$ (لا - ما)^2 - فہ (عہ) + سا (بہ) + بہ ما،
لا = بہ - عہ،
ما = فہَ (عہ) - ساَ (بہ)

اِن تین مساواتوں سے ایک سطح کی مساوات کی مبدلی شکل حاصل ہوتی ہے - چونکہ حل میں دو اختیاری مستقل شریک ہیں اِس لیے اس کو عام سے عام ممکن شکل سمجھا جا سکتا ہے -

حل طلب مثالیں

مصرحۂ بالا طریقوں سے تکمل کرو :

(۱) ع + لا - ۲ ما = ف (ق - ۲ لا + ۳ ما)،

(۲) ع - لا = ف (ق - ا) (۳) ع - عولا = ف (ق - ۲ ما)

(۴) ع - ما = ف (ق + لا) (۵) ع - ما = ف (ق - ۲ لا)

ع + ما = فا (ق - لا) ع - ۲ ما = فا (ق - لا)

(۶) ع لا - ما = ف (ق ما - لا) (۷) (ی ع - لا) = ف (ی ق - ما)

(۸) (۴) کا ایک خاص حل فہ (عہ) = - ½ عہ^2 ، سا (بہ) = ½ بہ^2 رکھ کر اور عہ اور بہ کو ساقط کرکے حاصل کرو۔

چودھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ر = ۲ ما^2 (۲) لوک س = لا + ما (۳) ۲ ما ق + ما^2 ت = ۱ (۱۸۸)

(۴) ر - ۲ س + ت = جب (۲ لا + ۳ ما)

(۵) لا^2 ر - ۲ لا س + ت + ق = ۰

(۶) ر لا^2 - ۳ س لا ما + ۲ ت ما^2 + ع لا + ۲ ق ما = لا + ۲ ما

(۷) ما^2 ر + ۲ لا ما س + لا^2 ت + ع لا + ق ما = ۰

(۸) ۵ ر + ۶ س + ۳ ت + ۲ (ر ت - س^2) + ۳ = ۰

(۹) ۲ ع ر + ۲ ق ت - ۴ ع ق (ر ت - س^2) = ۱

(۱۰) ر ت - س^2 - س (جب لا + جب ما) = جب لا جب ما

(۱۱) ۷ ر - ۸ س - ۳ ت + (ر ت - س^2) = ۳۶

(۱۲) وہ سطح معلوم کرو جو ر = ۶ لا + ۲ کو پورا کرے اور ی = لا^3 + ما^3 کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی لا + ما + ۱ = ۰ سے منقطع ہوتی ہے۔

(۱۳) وہ سطح معلوم کرو جو ر - ۲ س + ت = ۶ کو پورا کرے اور زائدی مکافی نمای = لا ما کو اس کی اُس تراش پر مس کرے جو مستوی ما = لا سے منقطع ہوتی ہے۔

(۱۴) ایک سطح کھینچی گئی ہے جو ر + ت = ۰ کو پورا کرتی ہے اور لا^۲ + ی^۲ = ۱ کو اِس کی اُس تراش پر مس کرتی ہے جو مستوی ما = ۰ سے منقطع ہوتی ہے۔ اِس کی مساوات کو شکل

ی^۲ (لا^۲ + ی^۲ - ۱) = ما^۲ (لا^۲ + ی^۲)

میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات

۲ ر + ق س + لا ت - لا (ر ت - س^۲) = ۲

پر مونجے کے طریقہ کو استعمال کرنے سے لا، ما، ع، ق میں جو چار خطی تفرقی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اِن میں سے دو تکمل پذیر ہیں جن سے درمیانی تکملہ

ع - لا = ف (ق لا - ۲ ما)

حاصل ہوتا ہے اور دوسری دو اگرچہ جداگانہ غیر تکمل پذیر ہیں لیکن تکملہ

ع + ۱/۴ ق^۲ - لا = ا

کو حاصل کرنے میں ملائی جا سکتی ہیں۔

پس حسل

ی = ۱/۲ لا^۲ - ۲ م لا ما - ۲/۳ م^۲ لا^۳ + ن لا + فہ (ما + ۱/۲ م لا^۲)

اور ی = (ا - ۱/۴ ب^۲) لا + ۱/۲ لا^۲ + ب ما + ج

حاصل کرو اور ثابت کرو کہ اِن میں سے ایک، دوسرے کی مخصوص صورت ہے۔

(۱۶) ایک سطح ایسی ہے کہ لا = ۰ کے متوازی کسی مستوی سے اِس کی تراش ایک دائرہ ہے جو محور لا میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ حسب ذیل تفاعلی اور تفرقی مساواتوں کو پورا کرتی ہے:

ما^۲ + ی^۲ + ما ف (لا) + ی فا (لا) = ۰،

($ما^۲$ + $ی^۲$) ت + ۲ (ی - ما ق) (۱ + $ق^۲$) = ۰

(۱۷) $لا^۲$ ر + ۲ لا ما س + $ما^۲$ ت = ۰ کے حل کو شکل

$$ی = ف \left(\frac{ما}{لا}\right) + لا فا \left(\frac{ما}{لا}\right)$$

میں حاصل کرو۔ ثابت کرو کہ یہ مساوات ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین ان خطوں سے جو محور ی کو قطع کرتے ہیں ہوتی ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ر ت - $س^۲$ = ۰ سے "کامل" تکملہ

ی = ا لا + ب ما + ج

حاصل ہوتا ہے۔

(۱۸۹) ثابت کرو کہ وہ "عام" تکملہ جو اس سے ماخوذ ہوتا ہے (حسب دفعہ ۱۳۴) ایک کشادپذیر سطح کو تعبیر کرتا ہے (دیکھو اسمتھ کی سالڈ جیومٹری دفعات ۲۲۲-۲۲۳)۔

اس سے ثابت کرو کہ کسی کشادپذیر سطح کے لیے ق = ف (ع)

(۱۹) وہ کشادپذیر سطح معلوم کرو جو

ع ق (ر - ت) - ($ع^۲$ - $ق^۲$) س + (ع ما - ق لا) (ر ت - $س^۲$) = ۰

کو پورا کرے۔

[فرض کرو ق = ف (ع) ۔ اس کو پوائسن کا طریقہ کہتے ہیں۔ ہمیں حاصل ہو گا

ق = ا ع یا $ع^۲$ + $ق^۲$ = $ب^۲$

جن سے ی = فہ (لا + ا ما) یا ی = ب لا جم عہ + ب ما جب عہ + ج

ان میں سے دوسرا تکملہ ایک مستوی کو تعبیر کرتا ہے جس سے وہ کشادپذیر سطح تکوین پاتی ہے جو متناظر "عام" تکملہ سے حاصل ہوتی ہے۔]

(۲۰) اگر لا = ع ما = ق ، ے = ع لا + ق ما - ی

تو ثابت کرو کہ

ر = ت / (ہ ت - س^۲) ، ہ = -س / (ہ ت - س^۲) ، ت = ہ / (ہ ت - س^۲)

جہاں ہ = جف^۲ ے / جف لا^۲ وغیرہ۔

پس ثابت کرو کہ مساوات

ا ر + ب س + ج ت + خ (ر ت - س^۲) = ۰

مساوات ا ت - ب س + ج ہ + خ = ۰

میں تحویل ہوتی ہے جہاں لا، ما، ع، ق کے کوئی تفاعل ا، ب، ج، خ ہیں اور ع، ق، لا، ما کے متناظر تفاعل ا، ب، ج، خ ہیں۔

ثنویت کا اصول (دیکھو بارہویں باب کے ختم پر متفرق مثالوں میں ۲۱) حسب ذیل مساوات کے دو درمیانی تکملوں کو اخذ کرنے میں استعمال کرو:

ع ق (ر - ت) - (ع^۲ - ق^۲) ی + (ع ما - ق لا) (ر ت - س^۲) = ۰

(۲۱) ثابت کرو کہ اگر لا، ما، ۶، و حقیقی ہوں اور ۶ + خ و = ف (لا + خ ما) تو و = ۶ اور و = و دونوں، مساوات

جف^۲ و / جف لا^۲ + جف^۲ و / جف ما^۲ = ۰

کے حل ہیں اور منحنیوں ۶ = مستقل
و = مستقل

کے دو نظام باہم علی القوائم ہیں۔

مخصوص صورتوں

(۱) ۶ + خ و = لا + خ ما

(۲) ۶ + خ و = (لا + خ ما)^۲

(۳) ۶ + خ و = ۱ / (لا + خ ما)

میں اِن خواص کی تصدیق کرو ۔

[یہ تفرقی مساوات لاپلاس کی مساوات کی دو بُعدی شکل ہے جو تجاذب، برقی سکونیات، اور ماحرکیات میں بنیادی اہمیت رکھتی ہے۔ ء اور و کو مزدوج تفاعل کہتے ہیں ۔ دیکھو ریمز کی کتاب "ہیڈرو میکانکس" جلد دوم دفعہ ۱۴۱] ۔

۲۲ ۔ $$\frac{جف^2 ما}{جف ت^2} = ا^2 \frac{جف^2 ما}{جف لا^2}$$

(۱۹۰) کا حل شکل

$$ما = \frac{1}{2} ف (لا + ا ت) + \frac{1}{2} ف (لا - ا ت)$$

$$+ \frac{1}{2ا} \int_{لا - ا ت}^{لا + ا ت} فا (له) فرله$$

میں حاصل کرو اگر ما = ف (لا) اور $\frac{جف ما}{جف ت}$ = فا (لا) جبکہ ت = ۰ ۔

[لا متناہی طول کی ایک مرتعش ڈوری کے کسی نقطہ لا کا عرضی ہٹاؤ ما ہے جبکہ ڈوری کا ابتدائی ہٹاؤ ف (لا) اور رفتار فا (لا) ہو۔ دیکھو ریمز کی ہیڈرو میکانکس جلد دوم دفعہ ۲۴۸]

(۲۳) اگر $$\frac{جف^2 ما}{جف ت^2} + ا^4 \frac{جف^4 ما}{جف لا^4} = 0$$

کا ایک حل ما = ف (لا) جم (ن ت + ع)

ہو تو ثابت کرو کہ

ف (لا) = ا جب م لا + ب جم م لا + ھ جبزم لا + گ جمزم لا

جہاں $م = \sqrt{\frac{ن}{ا^2}}$

[یہ تفرقی مساوات وہ ہے جو ڈنڈوں کے جانبی ارتعاشوں سے تقریباً پوری ہوتی ہے جبکہ گردشی جمود کو نظرانداز کیا گیا ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۱۶۳]

(۲۴) ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = \text{ا جب}\,\frac{\text{م}\,\pi\,\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}\,\pi\,\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جم}\,(\text{ع}\,\text{ج}\,\text{ت} + \text{عہ})$$

سے مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف ت}^2} = \text{ج}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف ما}^2}\right)$$

پوری ہوتی ہے اور ط معدوم ہوتا ہے جبکہ

لا = ۰، ما = ۰، لا = ا یا ا = ب

بشرطیکہ م اور ن صحیح عدد ہوں جو

$$\left(\frac{\text{ع}}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{\text{م}}{\text{ا}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ن}}{\text{ب}}\right)^2$$

کو پورا کریں۔

[اس سے ایک مرتعش جھلی کی تفرقی مساوات کا ایک حل حاصل ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت مستطیل ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۱۹۴ تا ۱۹۹]

(۲۵) ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = \text{ا جـ}\,(\text{ن ر})\ \text{جم}\,(\text{ن ج ت} + \text{عہ})$$

سے مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف ت}^2} = \text{ج}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{ط}}{\text{جف ر}^2} + \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ر}}\right)$$

پوری ہوتی ہے جہاں جـ رتبہ صفر کا بیسل کا تفاعل ہے [دیکھو دفعہ ۹۷ کے آخر مثال (۲)]

[اس سے ایک مرتعش جھلی کی تفرقی مساوات کا حل حاصل ہوتا ہے جبکہ جھلی کا احاطہ ایک ثابت دائرہ ہو۔ دیکھو ریالے کی کتاب "ساونڈ" دفعہ ۲۰۰ تا ۲۰۶]

(۲۶) ثابت کرو کہ

$$\text{و} = \left(\text{ا}\,\text{ر}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{ر}^{-\text{ن}-1}\right) \text{ع}_{\text{ن}}\left(\text{جم ط}\right)$$

سے مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}^2} + \frac{2}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ط}^2} + \frac{\text{مم ط}}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}} = 0$$

پوری ہوتی ہے جہاں $\text{ع}_{\text{ن}}$ رتبہ ن کا لیجنڈر کا تفاعل ہے [لیجنڈر کی مساوات کے لیے دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۹ کے ختم پر]

[نوٹ: ع = جم ط کو ایک نئے متغیر کے طور پر لو۔ یہ مساوات وہ شکل ہے جو لاپلاس کی قوۃ مساوات (تین ابعاد میں) اختیار کرتی ہے جبکہ یہ معلوم ہو کہ و ایک محور کے گرد متشاکل ہے۔ دیکھو راوتھ کی کتاب "اینالیٹیکل اسٹاٹکس" جلد دوم دفعہ ۳۰۰]

پندرھواں باب

متفرق طریقے

۱۵۹ — یہ باب چھ حصوں پر مشتمل ہے۔ پہلا حصہ (دفعات ۱۶۰، ۱۶۱) چھٹے باب کا تکملہ ہے۔ اِس میں اُن مشکلوں سے بحث کی گئی ہے جو نادر حلوں کے نظریہ میں پیش ہوتی ہیں، نیز لفاف کی تعریف پر غور کیا گیا ہے اور جس طریقہ پر ممیزوں میں مخصوص حل وقوع پذیر ہوسکتے ہیں اِس کی وضاحت کی گئی ہے۔

دوسرے حصہ (دفعات ۱۶۲ تا ۱۶۷) میں ریکیٹی (Riccati) کی مساداتوں پر، خاص کر اِس کی عام شکل میں، بحث کی گئی ہے یہ مثالوں میں ایک سلسلہ ملے گا جس سے یہ معلوم ہوگا کہ کن صورتوں میں ریکیٹی کی اصلی مساوات محدود رقموں میں تکمل کی جاسکتی ہے۔

تیسرے حصہ (۱۶۸ تا ۱۷۰) میں تفرقی مساواتوں پر بہ حیثیت مجموعی بحث کی گئی ہے چنانچہ وہ گیارہویں باب کا تکملہ ہے۔ متجانس مساواتوں کے لیے شکمل جزوِ ضربی کا استعمال مبتدی کو دلچسپ نظر آئے گا لیکن میئر کا طریقہ نظریہ کے لحاظ سے بہت دلچسپ ہے۔

چوتھے حصہ (دفعات ۱۷۱ تا ۱۷۷) میں دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتوں سے بحث کی گئی ہے اور اِن کا حل ایک سلسلہ میں معلوم کیا گیا ہے۔ یہ نویں اور دسویں باب کا تکملہ ہے۔ دوسے

اعلیٰ رتبوں کی تفرقی مساواتوں کے چند نتیجے بھی شامل کئے گئے ہیں۔

پانچویں حصہ (۱۷۸ تا ۱۸۱) میں ریاضیاتی طبیعات کی چند مساواتوں سے خاص گروہ جو حرکت امواج سے متعلق ہیں بحث کی گئی ہے۔ یہ چوتھے اور چودھویں بابوں کا تکملہ ہے۔

بالآخر چھٹے حصہ (۱۸۲ تا ۱۸۳) میں تفرقی مساواتوں کے حل کے عددی تقریبوں پر بحث کی گئی ہے۔ یہ آٹھویں باب کا تکملہ ہے۔ آڈمس کا طریقہ بیان کردینے کے بعد جو تاحال بہترین طریقہ سمجھا جاتا ہے مصنف کے طریقہ کی چند توسیعات (ای۔ ایمس سے منسوبہ) کا خلاصہ درج ہے۔

۱۶۰ — نادر حلوں کے نظریہ میں بعض مشکلیں[۱]۔ (۱۹۲)

اب ہم چھٹے باب کی تکمیل 'لفاف' 'نادر حل' اور خاص تکملوں سے متعلق بعض مشکلوں کا ذکر کریں گے۔

منحنیوں کے کسی قبیل کے لفاف کی پرانی تعریف یہ ہے کہ

وہ متصلہ منحنیوں کے انتہائی نقاطِ تقاطع کا طریق ہوتا ہے' یہ تعریف چھوڑ دینی پڑے گی کیونکہ اس کی رو سے یہ مضحک نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ایک منحنی اپنے انحناء کے دائروں کا لفاف نہیں ہوتا[۲]۔ پوائسن نے لفاف کی یہ تعریف کی ہے کہ وہ

[۱] لفافوں کے لیے دیکھو فولر کی Elementary Differential Geometry of Plane Cures پانچواں باب۔ نادر حلوں کے لیے دیکھو
The Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 and III D8

[۲] ایک منحنی کے دو متصلہ نقطوں ف اور فَ کے متناظر مرکز انحناء ج اور جَ اس منحنی کے بریچہ پر واقع ہوتے ہیں۔ نصف قطر انحناء ج ف اور جَ فَ کے درمیان فرق بریچہ کی قوس ج جَ ہے۔ یہ قوس بالعموم وتر ج جَ سے بڑی ہوتی ہے یعنی اس فاصلہ سے بڑی

(بقیہ دیکھو آئندہ صفحہ پر)

منفرد ممیز نقطوں کا طریق ہوتا ہے (یعنے ایک منحنی کے اُن معمولی نقطوں کا جن کے فاصلے متصلہ منحنیوں سے پہلے رتبہ سے زیادہ چھوٹے ہوں)۔ لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ بعض صورتوں میں یہ تعریف بھی اطمینان بخش نہیں[۱]۔ ہمارے مقاصد کے لیے سب سے زیادہ سہولت بخش تعریف غالباً یہ ہے کہ لفاف ایک منحنی ہے جو قبیل کے ہر رکن کو مس کرتا ہے اور جو اپنے ہر نقطہ پر قبیل کے کسی نہ کسی رکن سے مس ہوتا ہے۔ یہ اُس تعریف کے مطابق ہے جو صفحہ ۱۲۶ پر دی جا چکی ہے لیکن وہاں اِس تعریف کا دوسرا حصہ صریحاً بیان نہیں کیا گیا تھا لیکن بعد والے جملہ میں یہ بات مضمر تھی۔

نادر حل کی کم سے کم تین مختلف تعریفیں ہیں۔ ہماری تعریف (صفحہ ۱۲۶) یہ ہے کہ یہ وہ حل ہے جو کامل ابتدائی سے تعبیر شدہ منحنیوں کے قبیل کے لفاف[۲] کے متناظر حاصل

(بقیہ صفحہ گذشتہ) جو انحناو کے مرکزوں کے درمیان ہے۔ اس طرح ایک دائرہ انحناء دوسرے دائرہ انحناء کے گرد ہوتا ہے اور اِس لیے حقیقی تقاطع نقاط حاصل نہیں ہوتے۔ دوسری صورتیں جہاں یہ تعریف ناکام رہتی ہے مثال ۱۳ دفعہ ۱۶۱ میں ملیں گی۔

[۱] دیکھو Neville, *Proc Camb. Phil. Soc* Vol. xxi. P. 97, 1922.

[۲] یہ وہ تعریف ہے جو اعلیٰ معیار کے مقالوں میں اختیار کی جاتی ہے (دیکھو Ince's *Ordinary Differential Equations*

(بقیہ دیکھو صفحہ آئندہ)

ہوتا ہے۔ لیکن بعض مستثنیٰ صورتوں میں لفاف خود قبیل کا ایک مخصوص منحنی ہوتا ہے۔ مثلاً امکانی ما = ج (لا - ج)^۲ خط ما = ۰ کو نقطہ (ج، ۰) پر مس کرتا ہے اس لیے ما = ۰ اس قبیل کا لفاف ہے جو ج کو صفر کے سوا تمام ممکن قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے اور اس میں وہ مخصوص منحنی بھی شامل ہوتا ہے جو ج = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ ہماری تعریف کی بموجب ما = ۰ کو اس قبیل کی تفرقی مساوات کا نادر حل اور خاص تکملہ دونوں سمجھنا چاہیے (مثال ۶ صفحہ ۱۴۲)۔ لیکن بعض علماء اصطلاح "نادر" کو صرف ایسے حل کے لیے استعمال کرتے ہیں جو کامل

۱۹۳ ابتدائی میں واقع شدہ اختیاری مستقل کو کوئی مستقل قیمت دینے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔ نادر حل کی ایک تیسری تعریف[۱] یہ ہے کہ وہ ع ممیز میں واقع ہوتا ہے۔ دفعہ ۱۶۱ میں یہ بتلایا جائے گا کہ ایسے حل سے لفاف کا تعبیر ہونا ضروری نہیں ہے۔ وہ ایک خاص حل ہو سکتا ہے یا اس کی انتہائی شکل۔

ممکن ہے طالب علم یہ فرض کرلے کہ منحنیوں کے ہر قبیل کا جو ایک مبدل پر منحصر ہو لفاف ہوتا ہے اور اس لیے ہر تفرقی مساوات کا جو پہلے رتبہ کی اور پہلے درجہ سے اعلیٰ درجہ کی ہو ایک نادر حل

(بقیہ صفحہ گذشتہ) صفحہ ۸۷ اور Bieberbach's Differentialgleichungen صفحہ ۸۵) مختلف ماخذوں سے نتیجوں کو بیان کرتے وقت ان تعریفوں کا حوالہ دینا ضروری ہے جن پر وہ مبنی ہیں ورنہ بڑا انتشار پیدا ہوگا۔

[۱] مثال ۱۰ دفعہ ۱۶۱

ہوتا ہے۔ لیکن ایسا نہیں ہے۔ لفافوں پر بحث کرنے میں ضمناً یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ تفاعل جو قبیل کی مساوات میں واقع ہوئے ہیں تسلسل سے متعلق بعض شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔ یہ شرطیں اُن سادہ تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کے لیے بالعموم پوری ہوتی ہیں جو نادر حلوں کی ابتدائی بحث میں دی جاتی ہیں لیکن یہ اِس واقعہ پر مبنی ہے کہ ایسی مثالوں کو تیار کرنے میں دراصل کامل ابتدائیوں سے ہی ابتدا کی گئی تھی۔ اگر ہم اُسی شکل کی عام ترین تفرقی مساوات سے ابتدا کریں تو یہ فرض کرنے کی کوئی وجہ نہیں ہے کہ کامل ابتدائی اُن شرطوں کو جو لفاف کی موجودگی کے لیے ضروری ہیں پورا کرے گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ نادر حل کی موجودگی کو قاعدہ کے طور پر نہیں بلکہ استثناء کے طور پر سمجھنا چاہیئے[1]۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لفافوں کو معلوم کرنے کا معمولی عمل (دفعہ ۵۶) کامل ابتدائی کی ایک شکل کے لیے ناکام ہو سکتا ہے اور دوسری شکل کے لیے کامیاب۔ مثلاً وہ $\text{لا}^{\frac{1}{2}} + \text{ما}^{\frac{1}{2}} = \text{ج}^{\frac{1}{2}}$ کے لیے یا $\text{لا} + \text{جب}^{-1}\text{ما} = \text{ج}$ کے لیے تو ناکام رہتا ہے لیکن

$$(\text{لا} + \text{ما} - \text{ج})^{2} = 4\,\text{لا}\,\text{ما} \quad \text{یا} \quad \text{ما} = \text{جب}\,(\text{ج} - \text{لا})$$

کے لیے موثر

مساوات $\text{لا}^{\frac{1}{2}} + \text{ما}^{\frac{1}{2}} = \text{ج}^{\frac{1}{2}}$ سے جس سے $\text{ما} = \text{لاع}^{2}$ حاصل ہوتا ہے ایک اور بات واضح ہوتی ہے۔ یہ تفرقی مساوات، $\text{ما} = 0$ سے پوری ہوتی ہے لیکن $\text{لا} = 0$ سے بمشکل پوری ہو سکتی ہے کیونکہ $\text{ع} = \infty$ حاصل ہوتا ہے اور طرفین غیر متعین ہو جاتے ہیں۔ تاہم $\text{لا} = 0$ اور $\text{ما} = 0$ دونوں منحنیوں کے (محوروں کو مس کرنیوالے مکافی) قبیل کے لفافیں ا[ور]

[1] دیکھو مثال ۱۰، دفعہ ۱۶۱

دونوں $ما\,(فرلا)^2 = لا\,(فرما)^2$ کو پورا کرتے ہیں جو ایک تفرقی رشتہ ہے جس سے ہندسی حقایق تفرقی مساوات کی بہ نسبت زیادہ صحت کے ساتھ تعبیر ہوتے ہیں۔ [مقابلہ کرو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶ اور مثال ۱۱ صفحہ ۱۶۴ کے ساتھ۔ پہلی مثال میں لا = ۰ ایک مخصوص منحنی کی انتہائی شکل ہے۔ اور دوسری مثال میں وہ ایک لفاف اور نیز قرن طریق ہے۔]۔ ایسی صورتوں میں ہم لا = ۰ کو حلوں کی فہرست سے خارج کرنے پر مجبور ہوتے ہیں لیکن اس اخراج کی وجہ یہ سمجھی جا سکتی ہے کہ تفرقی مساوات محور ما کے متوازی سمتوں کو ٹھیک طور پر تعبیر کرنے سے قاصر ہے اور اس کی وجہ یہ نہیں ہے کہ خود لفاف میں کوئی خصوصیت ہے۔ (۱۹۴)

۱۶۱۔ ممیز۔ خاص حل۔ حدود۔

اس دفعہ میں ہم اپنی توجہ صرف شکل ف (لا، ما، ج) = ۰ کے کامل ابتدائیوں پر محدود رکھیں گے، اس میں ف (لا، ما، ج) ایک کثیر رقمی ہے جو لا، ما، اور ج میں بیان کیا گیا ہے۔ اس کثیر رقمی کو شکل

$$ب_0(لا، ما)\,ج^{ن} + ن\,ب_1(لا، ما)\,ج^{ن-1}$$

$$+ \tfrac{1}{2}ن(ن-1)\,ب_2(لا، ما)\,ج^{ن-2} + \ldots + ب_ن(لا، ما) = 0$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ ج ممیز $\Delta_ج$ کی یہ تعریف (الاعددی جزو ضربی کے) کی جاتی ہے کہ وہ $ب_0^{2ن-2}$ اور اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب ہے، $ب_0^{2ن-2}$ کو اس وجہ سے داخل کیا گیا ہے کہ نتیجہ $ب_0، ب_1، ب_2، \ldots$

اِن میں ایک کثیر رقمی حاصل ہو ۔ مثلاً ن = ۲، ۳، ۴ کے لیے علی الترتیب حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2 ،$$

$$(\text{ا}_0\text{ا}_3 - \text{ا}_1\text{ا}_2)^2 - 4(\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2)(\text{ا}_1\text{ا}_3 - \text{ا}_2^2) ،$$

$$(\text{ا}_0\text{ا}_4 - 4\text{ا}_1\text{ا}_3 + 3\text{ا}_2^2)^3 - 27(\text{ا}_0\text{ا}_2\text{ا}_4 + 2\text{ا}_1\text{ا}_2\text{ا}_3 - \text{ا}_0\text{ا}_3^2 - \text{ا}_1^2\text{ا}_4 - \text{ا}_2^3)^2$$

چوتھے باب کے مطابق لفظ "ممیز" کو نہ صرف **تفاعل** $\triangle_{\text{ج}}$ کی تعبیر کے لیے بلکہ **مساوات** $\triangle_{\text{ج}} = 0$ کے لیے اور اِس مساوات سے تعبیر شدہ طریقوں (Loci) کے لیے بھی بعض اوقات استعمال کیا جائے گا۔

نادر حلوں کے سوالات حل کرنے میں ممیزوں کو محسوب کرنے کا ایک باقاعدہ طریقہ استعمال کرنا مناسب ہے ۔ دو درجیوں، کعبیوں اور چار درجیوں کے لیے اوپر کے نتیجے استعمال کیے جا سکتے ہیں[۱]۔ اگر $\triangle_{\text{ج}}$ کو دفعہ ۵۶ کے مطابق عملِ اسقاط سے معلوم کیا جائے تو ممکن ہے کہ بعض اجزائے ضربی چھوٹ جائیں ۔ اِس لیے ایسے عمل اسقاط کے لیے مناسب یہ ہے کہ سلوسٹر کا بین تحلیلی طریقہ استعمال کیا جائے ۔ اِس طریقہ کو یہاں استعمال کرنے میں ہم ف کو $\text{ج}^{\text{ن}-2}$، $\text{ج}^{\text{ن}-3}$، ...، ج، ۱ سے اور $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ج}}$ کو $\text{ج}^{\text{ن}-1}$، $\text{ج}^{\text{ن}-2}$، ...، ج، ۱ سے ضرب دیتے ہیں

[۱] اِن کو استعمال کرتے وقت یہ یاد رہے کہ ا ہی اصلی سر نہیں ہیں بلکہ اِن کے ساتھ ثنائی عددی اجزائے ضربی بھی ہیں مثلاً چار درجی کی صورت میں ج^2 کا سر ا_2 نہیں بلکہ 6ا_2 ہے۔

اور اس طرح جو (۲ن-۱) مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اُن سے $\text{ج}^{2\text{ن}-2}$، $\text{ج}^{2\text{ن}-3}$، ....، ج، ۱ کو ساقط کرتے ہیں، اِس طرح (۲ن-۱) صفوں اور ستونوں کا ایک مقطعہ حاصل ہوگا۔ دو درجی $\text{ا}_0\text{ج}^2 + 2\text{ا}_1\text{ج} + \text{ا}_2 = 0$ کے لیے اس طریقہ سے

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_0 & 2\text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ 2\text{ا}_0 & 2\text{ا}_1 & 0 \\ 0 & 2\text{ا}_0 & 2\text{ا}_1 \end{vmatrix} = 4\text{ا}_0(\text{ا}_0\text{ا}_2 - \text{ا}_1^2)$$

حاصل ہوگا۔ لیکن اِس میں جزو ضربی ا_0 زائد ہے اور یہ دیکھنا آسان ہے کہ یہی زائد جزو ضربی وقوع پذیر ہوگا خواہ ف کا درجہ کچھ ہی ہو اور اس طرح ٹھیک درجہ (۲ن - ۲) کی بجائے درجہ (۲ن - ۱) کا ایک جملہ حاصل ہوگا۔ اِس باب کے آخر میں دی ہوئی مثالوں پر سلوسٹر کا طریقہ استعمال کیا جائے تو اِس جزو ضربی کو جدا کرنا چاہیئے۔

اِن مثالوں کا پہلا مقصد اُن طریقوں کی توضیح کرنا ہے جن میں (۱۹۵)
ج اور ع ممیزوں سے خاص حل یا انکی انتہائی شکلیں حاصل ہوتی ہیں۔ بعض صورتوں میں حل ایک مخصوص منحنی کے صرف ایک حصہ کے طور پر واقع ہوتے ہیں (مثال ۱)۔ اِن کی ہندسی تعبیر مختلف شکلیں اختیار کرتی ہے۔ چنانچہ وہ لفاف ہو سکتے ہیں اور اس لیے نادر حل بھی (مثال ۲)، یا عقدہ طریق ہو سکتے ہیں (مثال ۳)، یا قرن طریق (مثال ۴)، یا تماس طریق (مثال ۵)، یا متقارب (مثال ٦)، یا مماس جو قبیل کے تمام منحنیوں کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہوں (مثال ۸) وہ صرف خطوط (مماس نہیں) ہو سکتے ہیں جو قبیل کے ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہوں (مثال ۷)۔ کلیرو کی شکل کے سلسلہ میں یہ

کہا جا سکتا ہے کہ مذکورہ بالا حل لفاف کے انعطافی مماس سے حاصل ہوتے ہیں (مثال ۹)۔

بعض اوقات یہ بیان کیا جاتا ہے کہ جب ممیزوں میں خاص حل وقوع پذیر ہوتے ہیں تو وہ ج ممیز $\Delta_ج$ میں پہلی قوت میں اور ع ممیز $\Delta_ع$ میں تیسری قوت میں واقع ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ کو دفعہ ۶۴ کے قاعدوں کے ساتھ علامتی شکل

$$\Delta_ج = ل\, ع^۲\, ق^۳\, خ\,،\quad \Delta_ع = ل\, م^۲\, ق\, خ^۳$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ل، ع، ق، خ، اور م علی الترتیب لفاف، عقدہ طریق، قرن طریق، خاص حل، اور تماس طریق کو تعبیر کرتے ہیں۔ یہ قاعدے سادہ صورتوں میں اندازہ لگانے کے لیے مفید ہیں لیکن ایسی مثالیں بہ آسانی بنائی جا سکتی ہیں جن میں یہ قاعدے ناکام رہتے ہیں (مثال ۳، ۴، ۶، ۱۳، ۱۴)۔

اب ہم خاص حلوں اور دیگر مستثنیٰ طریقوں (Loci) کے اس تخیل کی صراحت کریں گے جو حدود سے متعلق ہے[۱]۔ ہم صرف اس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھیں گے جس میں ف (لا، ما، ج) لا، ما، ج میں ایک کثیر رقمی ہوتا ہے اور ایسا کہ لا، ما کی حقیقی قیمتوں کے ہر زوج کے متناظر ج میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی م اصلیں (فرض کرو) حقیقی تخمینوں کے متناظر اور (ن - م) خیالی اصلیں خیالی تخمینوں کے متناظر ہوتی ہیں نیز ہم یہ

[۱] یہاں اور دیگر مقاموں پر میں نے ان قیمتی مشوروں کا بڑا خیال رکھا ہے جن کو مسٹر ایچ۔ بی۔ میچل سابق پروفیسر ریاضی جامعہ کولمبیا نیویارک نے دیئے تھے لیکن اس کے یہ معنے نہیں ہیں کہ اس بحث کا انکو ذمہ دار ٹھیرایا جائے کیونکہ ہم دونوں کے نقطۂ نظر میں شائد اختلاف ہے۔

سمجھیں گے کہ یہ اصلیں جو لا اور ما کے تفاعل ہیں مسلسل متغیر ہوتی ہیں جبکہ لا اور ما مسلسل متغیر ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خاص منحنی ب (لا، ما) = ۰ (جو اضعافی شکل میں نہیں ہے یا متعدد مفرد منحنیوں سے مرکب نہیں ہے) دو علاقوں کے درمیان ایک حد ہے اور یہ علاقے ایسے ہیں کہ اِن میں سے ایک میں م کی ایک خاص قیمت مہ ہے اور دوسرے میں اس کی قیمت مہ - ۲ ہے۔ اب خیال کرو کہ نقطہ (لا، ما) پہلے علاقہ میں سے مسلسل حرکت کر کے اِس کے باہر نکلتا ہے اور حد ب کو عبور کر کے دوسرے علاقہ میں داخل ہوتا ہے تو اِس دوران میں حقیقی اور نامساوی اصلوں کا ایک زوج ایک دوسرے کے قریب آتا ہے اور حد پر پہنچکر یہ اصلیں ایک دوسرے کے مساوی ہو جاتی ہیں اور بالآخر دوسرے علاقہ میں گذرنے پر یہ اصلیں مزدوج ملتف ہو جاتی ہیں۔ $\Delta_ج$ جس میں اِن اصلوں کے فرقوں کا مربع شامل ہے ب پر معدوم ہونا چاہئیے۔ اور پھر اس کی علامت بدلنی چاہئیے کیونکہ دو مزدوج ملتف اصلوں کے فرق کا مربع منفی ہوتا ہے۔ ب (لا، ما) کو بھی علامت بدلنی چاہئیے جبکہ (لا، ما) اِس کو عبور کرے۔ اِس کو زیادہ عام شکل میں اِس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ اگر م، مہ سے مہ - ۲ ر تک بدلے جہاں ر ایک طاق صحیح (۱۹۶) عدد ہے تو $\Delta_ج$ علامت بدلے گا اور ب (لا، ما)، $\Delta_ج$ میں واقع ہوگا اور ب (لا، ما) کی قوت ایک طاق عدد ہوگی (لیکن اِس عدد کا ر ہونا ضروری نہیں ہے، دیکھو مثال ۱۴ جہاں ب (لا، ما) تیسری قوت میں واقع ہے لیکن ر = ۱)۔ اگر ر ایک جفت صحیح عدد ہو تو ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہوگا۔ اس کے بالعکس اگر ب (لا، ما) ایک طاق قوت میں واقع ہو تو ر کو طاق ہونا چاہئیے لیکن اگر ب (لا، ما) ایک جفت قوت میں واقع ہو اور اس لیے $\Delta_ج$ کی علامت

نہ بدلے تو ر کا جفت ہونا ضرور نہیں، وہ صفر ہو سکتا ہے جیسا کہ مثال ۱۲ میں جس میں ب ایک لفاف ہے جس کو قبیل کے تمام منحنی عبور کرتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں لفاف کو ایک جفت قوت میں وقوع پذیر ہونا چاہئے جو قاعدہ $\triangle_{ج} =$ ل ع^{2} ق^{3} خ کے خلاف ہے۔

اسی طرح $\triangle_{ع}$ پر بحث کی جا سکتی ہے اگر ہم ایک نقطہ میں سے گذرنے والے حقیقی منحنیوں کی تعداد کی بجائے حقیقی سمتوں کی تعداد جو اُس میں سے گذرے رکھیں۔ ایک خاص دلچسپ صورت کلیرو کی شکل کی ہے (مثال ۹)۔ لفاف کا انعطافی مماس ع میں دو مساوی اصلوں کے متناظر ہے اور اس لیے $\triangle_{ع} = ۰$ حاصل ہوتا ہے۔ نیز کلیرو کی شکل میں

$$\triangle_{ج} = \triangle_{ع}،\ \triangle_{ج} = ۰ ۔$$

نادر حلوں کی تحقیق کا متبادل ہندسی طریقہ[1] یہ ہے کہ ع کی بجائے ی رکھا جائے اور اس طرح تفرقی مساوات کو ایک سطح کی جبریہ مساوات میں تبدیل کیا جائے۔ اسی طرح کامل ابتدائی میں ج کی بجائے ی رکھا جا سکتا ہے۔ اس طریقہ میں سطحوں کے علم ہندسہ سے اچھی طرح واقف ہونے کی ضرورت ہے۔

نادر حلوں کے نظریہ میں اس وقت بھی مشکلیں پیش آتی ہیں جبکہ تفرقی مساواتوں کے سر لا اور ما میں کثیر رقمی ہوں اور جب سر علوی تفاعلات ہوتے ہیں تو ان مشکلوں میں بڑا اضافہ ہو جاتا ہے[2]۔

[1] *Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften.* III D 8 یا

Goursat's *Cours d' Analyse Mathematique*, Vol. II. 4 th. ed. Art. 435

[2] M. J. M. Hill, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Series 2, Vol. 17, 1918. P. 149

حل طلب مثالیں

[ہم کامل ابتدائی' ج ممیز' ع ممیز' اور نادر حل کو علی الترتیب ک۔ ا' Δ ج' Δ ع' اور ن۔ ح سے تعبیر کرینگے۔ Δ ج اور Δ ع کو اوپر کے ضابطوں سے حاصل کیا گیا ہے لیکن عددی اجزائے ضربی ترک کئے گئے ہیں۔

طالب علم کو خام ترسیمیں (لا اور ما کی ٹھیک قیمتیں محسوب کئے بغیر) کھینچنی چاہئیں جن سے منحنیوں کے ہر قبیل کے چند ارکان کی شکل معلوم ہوگی اور نیز اُن طریقوں کے لحاظ سے اِنکا محل معلوم ہوگا جو ممیزوں سے حاصل ہوتے ہیں۔] Loci

(۱) ک۔ ا' ما (لا + ج) + ج۲ = ۰ دیا گیا ہے' تفرقی مساوات

لا۲ ع۲ + ما (۲ لا - ما) ع + ما۲ = ۰

نیز Δ ج = ما (۴ لا - ما)' Δ ع = ما۲ (۴ لا - ما) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک۔ ا قائم زائدوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے۔ اِن سب زائدوں کا ایک متقارب ما = ۰ ہے اور نیز وہ خاص تکملہ لا ما = ۰ کا ایک حصہ ہے جس کو ک۔ ا سے ج = ۰ رکھ کر حاصل کیا گیا ہے۔ لفاف ما = ۴ لا ہے (جو ایک ن۔ ح ہے)۔ قاعدے Δ ج = ل ع۲ ق۲ خ۳' (۱۹۷)

Δ ع = ل م۲ ق خ۲ درست رہتے ہیں۔ مستوی کو چار علاقوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں سے دو میں قبیل کے حقیقی منحنیوں کی تعداد جو کسی نقطہ میں سے گذرتے ہیں دو ہے لیکن دوسرے دو علاقوں میں یہ تعداد صفر ہے۔ اِن علاقوں کے درمیان حدود وہ طریق ہیں جو ممیزوں سے حاصل ہوتے ہیں اور یہ دونوں ممیز طاق قوتوں میں وقوع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ ہمارے حدود کے نظریہ کے مطابق ہے کیونکہ اس صورت میں م = ۲' م - ۲ ر = ۰' اِسلیے ر = ۱ جو طاق ہے]۔

(۲) ک۔ ا = ج (لا - ج)۲ ہے۔ تفرقی مساوات

ع۳ - ۴ لا ما ع + ۸ ما۲ = ۰

نیز Δ ج = ما (۲۷ ما - ۴ لا۳)' Δ ع = ما۲ (۲۷ ما - ۴ لا۳) حاصل کرو۔

[ممیزوں کو محسوب کرنا ذرا محنت طلب ہے ۔ ما = ۰ عقدہ طریق ہے اور خاص حل بھی ہے ۔ لا = ۰ تمام منحنیوں کا مبدا پر مشترک مماس ہے اِلّا اُس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰ ۔ (دیکھو مثال ۸) ۳ لا^{۵} = ۴۴ ما^{۲} لفاف ہے ۔ یہ سمجھنے کے لیے کہ مختلف اجزائے ضربی ممیزوں میں طاق یا جفت قوتوں میں کیوں وقوع پذیر ہوتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۰ اُن علاقوں کے درمیان ایک حد ہے جہاں کسی نقطہ میں سے گذرنیوالے حقیقی منحنیوں کی تعداد صفر سے دو تک بڑھتی ہے، لیکن لفاف اُن علاقوں کے درمیان حد ہے جہاں یہ تعداد دو سے چار تک بڑھتی ہے ۔ ما = ۰ پر یہ چار دو دو کرکے منطبق ہوتے ہیں لیکن مثبت حصہ کی ہر جانب، اِس کے اور لفاف کی ایک شاخ کے درمیان، تعداد وہی چار ہے قاعدے $\Delta_{ج}$ = ل ع^{۲} ق^{۳} خ، $\Delta_{ع}$ = ل م^{۲} ق خ^{۳}، طریقوں Loci لا = ۰ اور ما = ۰ کی ہندسی تعبیر بیان کرنے میں ناکام رہتے ہیں ۔]

(۴) ک ۔ ا ۴ ما^{۳} = ج (۳ لا − ج)^{۲} ہے ۔ تفرقی مساوات

ما ع^{۳} − ۳ لا ع + ۲ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = ما^{۳} (ما^{۳} − لا^{۳})، $\Delta_{ع}$ = ما (ما^{۳} − لا^{۳}) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک ۔ ا نیم کعبی مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جس کے قرن ما = ۰ پر ہیں جو قرن طریق اور نیز ایک خاص حل ہے ۔ ما^{۳} = لا^{۳} ایک لفاف ہے (ایک ن ۔ ح) ۔ قاعدوں $\Delta_{ج}$ = ل ع^{۲} ق^{۳} خ، $\Delta_{ع}$ = ل م^{۲} ق خ^{۳} سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ما = ۰ قرن طریق ہے لیکن اِن قاعدوں سے یہ نہیں معلوم ہوتا کہ ما = ۰ ایک خاص حل بھی ہے۔]

(۵) ک ۔ ا ما^{۲} = ج (۳ لا − ج^{۲}) ہے ۔ تفرقی مساوات

۸ ما^{۲} ع^{۳} − ۵۴ لا ع + ۲۷ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = ما^{۴} − ۴ لا^{۳}، $\Delta_{ع}$ = ما^{۲} (ما^{۴} − ۴ لا^{۳}) حاصل کرو۔

[ج کی غیر صفر قیمتوں کے لیے ک - ا مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر (۱۹۸)
کرتا ہے جس کا محور ما = ۰ ہے اور اس محور کا ہر نقطہ قبیل کے دو مکافیوں کا راس
ہے جن کے تقعر مخالف سمتوں میں ہیں ۔ ۔ ۔ تماس طریق اور نیز ایک خاص حل
ہے - ما^2 = ۴ لا^2 لفاف ہے (ن - ح)۔ ما^2 = ج (۳ لا - ج^2) لفاف کو

نقطوں { ج^2، ± $\sqrt{\text{۲ ج}^3}$ } پر مس کرتا ہے جو خیالی ہیں اگر ج منفی ہے،

اور وہ لفاف کو نقطوں { $\frac{۱}{۴}$ ج^2، ± $\frac{۱}{۲}$ $\sqrt{\text{- ج}^3}$ } پر قطع کرتا ہے جو خیالی
ہیں اگر ج مثبت ہے ۔ قاعدوں سے تماس طریق کا پتہ چلتا ہے لیکن
خاص حل کا نہیں ۔]

(۶) ثابت کرو کہ م کی غیر صفر تمام قیمتوں کے لیے

ما$^{م-۲}$ ع^2 = ۱ کا کامل ابتدائی ۴ ما^م = م^2 (لا + ج)^2

ہے ۔
ثابت کرو کہ تین صورتوں (۱) م طاق مثبت صحیح عدد جو ایک سے
بڑا ہو، (۲) م = ۱ اور (۳) م طاق منفی صحیح عدد، میں $\frac{\triangle}{\text{ج}}$ اور $\frac{\triangle}{\text{ع}}$ علی الترتیب

ما^م ، ما ، ما^م

اور

ما$^{م-۲}$ ، ما ، ما$^{۲-م}$

ہیں بشرطیکہ ان ممیزوں کو ایسی مساواتوں سے حاصل کیا گیا ہو جنکو ما کی
کم سے کم قوت سے جو منفی قوتوں کو خارج کرنے کے لیے ضروری ہیں ضرب
دیا گیا ہو ۔

[ما = ۰ پہلی صورت میں قرن طریق ہے، دوسری میں لفاف (ن - ح)
اور تیسری میں خاص حل کی انتہائی شکل جو ان تمام منحنیوں کا متقارب ہے جو
کامل ابتدائی میں شامل ہیں ۔ ج = ∞ سے ما^م = ۰ حاصل ہوتا ہے اگر

م منفی ہے، اِس لیے خاص تکملہ کی اس انتہائی شکل میں حل ما = ۰ بالعموم اضعافی شکل میں آتا ہے۔ اگر م = -۱ تو خاص حل اُن قوتوں میں وقوع پذیر ہوتا ہے جو قاعدوں $\Delta_{ج}$ = ل ع^۲ ق^۳ خ، $\Delta_{ع}$ = ل م ق^۲ خ^۳ سے حاصل ہوتے ہیں۔ اِن قاعدوں سے قرن طریق کی قوتیں صرف م = ۳ کی صورت میں صحیح طور پر حاصل ہوتی ہیں]

(۷) ک - ا ما = لا (لا + ج)^۲ ہے۔ تفرقی مساوات

لا^۲ ع^۲ - ۲ لا ما ع + ما^۲ - ۴ لا^۳ ما = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = لا ما، $\Delta_{ع}$ = لا^۵ ما حاصل کرو

ثابت کرو کہ ما = ۰ لفاف (ن - ح) ہے اور لا = ۰ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے لیکن وہ خود حل نہیں ہے۔

[مبدا پر جو قبیل کے تمام منحنیوں میں ایک مشترک نقطہ ہے ممیزوں کے معدوم ہونے کی پیش قیاسی کی جا سکتی ہے۔ کیونکہ مبدا پر قبیل کی مساوات ج کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے، ج کی ہر قوت کے سر اور نیز وہ رقم جس میں ج نہیں ہے اِس نقطہ پر معدوم ہوتے ہیں، اِس لیے $\Delta_{ج}$ = ۰ کیونکہ اِس کی ہر رقم معدوم ہوتی ہے۔ چونکہ مشترک نقطہ پر منحنیوں کے مختلف مماس ہیں اس لیے اِس نقطہ پر تفرقی مساوات، ع کی کسی قیمت کے لیے پوری ہوتی ہے اور اِس لیے اُسی استدلال سے جو $\Delta_{ج}$ کے لیے استعمال ہوا $\Delta_{ع}$ = ۰ (دیکھو مثال ۷، صفحہ ۱۵۶)]۔

(۸) ثابت کرو کہ ج کی تمام غیر صفر قیمتوں کے لیے قبیل ما^۲ = لا (لا + ج)^۲ کے منحنی لا = ۰ کو مبدا پر مس کرتے ہیں۔ تفرقی مساوات

۴ لا^{۲} ع^{۲} − ۴ لا ما ع + ما^{۲} − ۴ لا^{۳} = ۰

نیز $\Delta_{ج}$ = لا ما^{۲} ، $\Delta_{ع}$ = لا^{۵} حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ ما = ۰ قرن طریق ہے اور لا = ۰ خاص حل کی ایک انتہائی شکل ہے (اگرچیکہ وہ خود حل نہیں ہے) اور نیز وہ ایک ایسا خط ہے جو تمام منحنیوں کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہے اِلّا اُس منحنی کے جس کے لیے ج = ۰۔ (ایسا خط لفاف کی ہماری تعریف کو پورا نہیں کرتا)۔

[مثال ۷ کی طرح $\Delta_{ج}$ کو مبدا پر معدوم ہونا چاہیئے۔ $\Delta_{ع}$ بھی (۱۹۹)
معدوم ہوتا ہے (اگرچیکہ یہاں منحنی مختلف مماس نہیں رکھتے)۔ (دیکھو مثال ۹ صفحہ ۱۵۶)]۔

(۹) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات (کلیرو کی شکل)

(ما − ع لا)^{۲} = ع^{۳}

کے لیے $\Delta_{ع}$ = ما^{۲} (۲۷ ما − ۴ لا^{۳}) = $\Delta_{ج}$

[۲۷ ما = ۴ لا^{۳} لفاف ہے (ن − ج)۔ خاص حل ما^{۲} = ۰ ہے اور لفاف کے انعطافی مماس کو تعبیر کرتا ہے۔ اب کسی نقطہ میں سے ۲۷ ما = ۴ لا^{۳} کے تین مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ یہ سب اُس علاقہ میں جو پہلے ربع میں منحنی اور ما = ۰ کے درمیان ہے حقیقی ہیں اور نیز اُس مشابہ علاقہ میں جو تیسرے ربع میں ہے۔ دوسرے علاقوں میں ان میں سے دو مماس خیالی ہیں۔ ما = ۰ پر کے کسی نقطہ کے لیے دو مماس منطبق ہوتے ہیں، اِس لیے ما = ۰ ممیزوں میں واقع ہونا چاہیئے۔ اِسی طرح جب کبھی کلیرو کی شکل کی کسی دوسری تفرقی مساوات کا لفاف حل انعطافی مماس رکھے تو وہ ممیزوں میں واقع ہوں گے۔]

(۱۰) تفرقی مساوات

ف (لا، ما، ع) = ۰، .... (۱)

دی گئی ہے۔ اِس سے اخذ کرو کہ

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ع} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اگر ع ممیز سے حاصل شدہ حل کے لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ع}} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

تو اوپر کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ اِس حل پر کے کسی نقطہ کے لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{ع} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۰ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

مساواتیں (۱)، (۳) اور (۴)، نادر حل کے لیے ضروری شرطیں ہیں۔ کلیرو کی شکل کے لیے ف (لا، ما، ع) ≡ ما ۔ ع لا ۔ فا (ع)، اِسلئے مساوات (۴) متماثلاً پوری ہوتی ہے۔ لیکن بالعموم کوئی وجہ نہیں کہ اِن تینوں مساواتوں کا حل ایک ساتھ حاصل ہو، اِس لیے بالعموم تفرقی مساوات کا نادر حل نہیں ہوتا۔

[اِس کو مثال (۱) صفحہ ۱۴۰ پر استعمال کرنے سے تین شرطیں

$$\text{ع}^۲ (۲ - ۳ \text{ما})^۲ = ۴ (۱ - \text{ما}) \text{،} \quad ۲ \text{ع} (۲ - ۳ \text{ما})^۲ = ۰ \text{،}$$

$$\text{ع} \{ -۶ \text{ع}^۲ (۲ - ۳ \text{ما}) + ۴ \} = ۰$$

حاصل ہوتی ہیں۔

۱ ۔ ما = ۰ جس سے ع = ۰ حاصل ہوتا ہے اِن تین شرطوں کو پورا کرتا ہے، لیکن ۲ ۔ ۳ ما = ۰ پہلی شرط کو پورا نہیں کرتا۔]

(۱۱) [اِس مثال میں نادر حل کی تیسری تعریف (دفعہ ۱۶۰) کو استعمال کرنا چاہئے۔ مثال ۱۰ تمام تعریفوں کے لیے درست ہے۔]

اگر ایک منحنی موجود ہو جس کے ہر نقطہ کے لیے تین مساواتیں

$$\text{ف (لا، ما، لہ)} = ۰ \text{،} \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لہ}} = ۰ \text{،} \quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \text{لہ} \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۰$$

لہ میں ایک مشترک حل رکھتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس منحنی پر

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فرما} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لہ}} \text{ فرلہ} = ۰$$

اور اس لیے

$$\text{لہ} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \text{ فرما} = ۰ \qquad (۲۰۰)$$

پس ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq ۰$ تو لہ = ع اور منحنی تفرقی مساوات

ف (لا، ما، ع) = ۰ کا نادر حل ہے، لیکن اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۰$ تو $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = ۰$۔

[اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نادر حل کے لیے ضروری شرطیں جو مثال ۱ میں دی گئی ہیں شرط $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq ۰$ کے اضافہ سے کافی ہو جاتی ہیں۔ لیکن یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ مثال ۲ میں $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = ۱۶$ ما

۔ ۴ لاع ۔ یہ ایک لفاف ما = ۰ کے لیے صفر ہے لیکن دوسرے ۲۷ ما = ۴ لا^۳ کے لیے صفر نہیں ہے۔]

(۱۲) ثابت کرو کہ ان منحنیوں کے نقاط انعطاف کا طریق جو مثال ۱۰ کی مساوات (۱) کے کامل ابتدائی سے تعبیر ہوتے ہیں مثال (۱۰) کی مساوات (۴) کو پورا کرتا ہے اور اس لیے وہ اُس نتیجہ میں شامل ہوگا جو ان مساواتوں سے ع کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

یہ عمل مثال ۷ کی مساواتوں پر استعمال کرو اور عمل اسقاط کی تکمیل سلوسٹر کے طریقہ سے کرو اور لا^۲ ما (۴ ما ۔ لا^۲) = ۰ کو حاصل کرو۔ [دیکھو کہ $\Delta_ع$ کے تمام طریق شامل ہیں اور انعطافوں کا طریق ۴ ما = لا^۲ بھی شامل ہے۔]

(۱۳) ثابت کرو کہ مساواتوں ما^{۲} = (لا − ج)^{۳}، ما = (لا − ج)$^{۳/۲}$، لا$^{۲/۳}$ + ما$^{۲/۳}$ = ج$^{۲/۳}$ سے منحنیوں کے ایسے قبیل تعبیر ہوتے ہیں جن میں متصلہ منحنی حقیقی نقطوں میں متقاطع نہیں ہوتے اور اس کے باوجود ایک لفاف ما = ۰ موجود ہے۔ [تیسری صورت میں لا = ۰ بھی ایک لفاف ہے۔]

متناظر تفرقی مساواتیں

۸ ع^{۳} = ۲۷ ما، ع^{۳} = ۲۷ ما^{۲}، لا ع^{۳} + ما = ۰،

ج ممیز ما^{۴}، ما^{۲}، لا^{۴} ما^{۲} (لا − ما)^{۲} (لا + ما)^{۲}

اور ع ممیز ما^{۲}، ما^{۴}، لا^{۴} ما^{۲}

حاصل کرو۔

[ان تمام صورتوں میں لفاف ایک جفت قوت میں واقع ہوتا ہے اور اس کی وجہ وہی ہے جو اس بحث میں بیان ہو چکی ہے جو ممیزوں کے طریقوں (حدود کے طور پر) سے متعلق ہے۔ پہلے اور تیسرے قبیلوں کے لیے لفاف قرن طریق بھی ہے اور اس لیے معمولی قاعدے یہاں درست ہیں لیکن دوسرے قبیل کے لیے ایسا نہیں ہے۔ طریق لا − ما = ۰، لا + ما = ۰ ہیں جہاں دو خیالی منحنی جو تیسرے قبیل کی مساوات میں ج کو منفی قیمت دینے سے حاصل ہوتے ہیں منطبق ہو جاتے ہیں۔]

(۱۴) ثابت کرو کہ ما = (لا − ج)^{۴} سے منحنیوں کا ایک ایسا قبیل تعبیر ہوتا ہے جو اپنے لفاف ما = ۰ کے ساتھ چار نقطی تماس رکھتا ہے۔

متناظر تفرقی مساوات ع^{۴} = ۲۵۶ ما^{۳} اور ممیز $\Delta_{ج}$ = ما^{۳}، $\Delta_{ع}$ = ما^{۹}

حاصل کرو۔

[لفاف پھر ایک سے بڑی قوت میں وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یہاں اس کی قوت طاق ہے اور یہ ہونا چاہیے کیونکہ کسی نقطہ میں سے گذرنے والے

حقیقی منحنیوں کی تعداد لفاف کی ایک جانب دو ہے اور دوسری جانب صفر ہے -]

(۱۵) ثابت کرو کہ مساواتوں لا^½ + ما^½ = ج^½ ، لا^½ + ما^½ = ج ،

(لا + ما - ج)^۲ = ۴ لا ما ، (لا + ما - ج^۲)^۲ = ۴ لا ما میں سے ہر ایک ، مکافیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے جن کا محور مشترک ہے اور زاویہ لا و ما کی تنصیف کرتا ہے اور نیز یہ کہ لفاف لا = ۰ اور ما = ہیں ثابت کرو کہ پہلی اور دوسری شکلوں میں △ج کو معلوم کرنے کی کوشش ناکام رہتی ہے (یا اس سے ۰ = ۱ حاصل ہوتا ہے جو لاتناہی پر کے خط کی مساوات ہے جو تمام مکافیوں کو مس کرتا ہے) لیکن تیسری شکل کے لیے △ج = لا ما اور چوتھی شکل کے لیے △ج = لا^۲ ما^۲ (لا - ما)^۲ حاصل ہوتا ہے -

[لا - ما = ۰ ایک خاص منحنی ہے جو ج = ۰ کے متناظر ہے - ممیزوں (۲۰۱)
پر بحث کرتے وقت ہمیں پہلی اور دوسری کی مانند شکلوں سے بچنا چاہیے جن میں رقمیں واحد قیمتی نہیں ہیں اور نیز چوتھی کی مانند شکل سے بھی جس میں ج^۲ کی (نہ کہ خود ج کی) مختلف قیمتوں کے متناظر مختلف منحنی حاصل ہوتے ہیں -]

۱۶۲ - ریکٹی (Riccati) کی مساوات - یہ نام ابتداً تفرقی مساوات[۱]

ما + ب ما^۲ = ج لا^م

کو دیا گیا تھا جس میں ب ، ج ، اور م مستقل ہیں - م کی مخصوص قیمتوں کے ایک خاص جٹ کے لیے اس تفرقی مساوات کو محدود رقموں میں تکمیل

---

[۱] لاحقوں سے لا کے لحاظ سے تفرق تعبیر کئے گئے ہیں -

کیا جا سکتا ہے [دیکھو مثالیں ۷ تا ۱۴ دفعہ ۱۶۴ کے آخر میں] - لیکن عام طور پر حل میں ایک لا انتناہی سلسلہ کی ضرورت ہوتی ہے جو بیسیل کے تفاعلوں[1] کے ساتھ بہت قریب کا تعلق رکھتا ہے -

ریکٹی کی مساوات سے اب حسب ذیل عام شکل مراد لی جاتی ہے:

$$\text{ما}_{1} = \text{ف} + \text{ق}\,\text{ما} + \text{سر}\,\text{ما}^{2}، \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جہاں ف، ق اور سر، لا کے تفاعل ہیں - یہ مساوات تفرقی علم ہندسہ میں کچھ اہمیت رکھتی ہے[2]

۱۶۳ - ریکٹی کی مساوات کو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات میں تحویل کرنا -

رکھو $\text{ما} = -\dfrac{\text{ع}_{1}}{\text{سر}\,\text{ع}}$، اِس سے حاصل ہوگا $\text{ما}_{1} = -\dfrac{\text{ع}_{2}}{\text{سر}\,\text{ع}} + \dfrac{\text{ع}_{1}^{2}}{\text{سر}\,\text{ع}^{2}} + \dfrac{\text{سر}_{1}\,\text{ع}_{1}}{\text{سر}^{2}\,\text{ع}}$

جب ہم مساوات (۱) میں اندراج کرتے ہیں تو ع_{1}^{2} کی رقمیں خارج ہو جاتی ہیں[3] - پس $\text{سر}\,\text{ع}$ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

$$-\text{سر}\,\text{ع}_{2} + \text{سر}_{1}\,\text{ع}_{1} = \text{ف}\,\text{سر}^{2}\,\text{ع} - \text{ق}\,\text{سر}\,\text{ع}_{1}$$

---

[1] ریکٹی کی مساوات اور بیسیل کے تفاعلوں کے ساتھ اس کے تعلق کا تذکرہ واٹسن کی "Theory of Bessel Functions" صفحات ۱ تا ۳ اور ۸۵ تا ۹۴ میں ملے گا -

[2] ڈاربو (Darboux) کی کتاب Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces کے اشاریہ میں ریکٹی کے ۲۰ حوالے ہیں - نیز دیکھو Eisenhart's Differential Geometry صفحات ۲۵، ۱۵۸، ۲۴۹، ۴۲۹ اور فورسائتھ کی Differential Geometry صفحات ۲۰ اور ۳۸۳ -

[3] اوپر کا ابدال اختیار کرنے کا اصلی سبب ہے - اگر وہ ذہن میں نہ رہے تو اِس خاصیت سے اُس پر پہنچ سکتے ہیں -

یعنے $\text{س}^2\,\text{ع}'' - (\text{ق}\,\text{س} + \text{س}_1)\,\text{ع}' + \text{ف}\,\text{س}^2\,\text{ع} = \ldots\ldots \;(2)$

جو دوسرے رتبہ کی ایک خطی مساوات ہے۔ خاص صورتوں میں (مثلاً ذیل کی مثالوں میں) اِس کو محدود رقموں میں تکمل کیا جاسکتا ہے لیکن عام طور پر حل کو ایک سلسلہ میں معلوم کرنا ہوگا۔ ہر صورت میں حل عمومی کی شکل

$$\text{ع} = \text{ا}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}(\text{لا})$$

ہوگی اور اِس سے حاصل ہوگا

$$\text{ما} = -\frac{\text{ع}_1}{\text{س}_1\,\text{ع}} = -\frac{\text{ا}\,\text{ف}_1(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}_1(\text{لا})}{\text{س}_1\{\text{ا}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ب}\,\text{فا}(\text{لا})\}}$$

$$= -\frac{\text{ج}\,\text{ف}_1(\text{لا}) + \text{فا}_1(\text{لا})}{\text{ج}\,\text{س}_1\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{س}_1\,\text{فا}(\text{لا})}$$

جہاں $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کی جگہ ج رکھا گیا ہے۔

(۲۰۲) اِس سے یہ اہم نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ **ریکیٹی کی مساوات کا عام تکملہ تکمل کے مستقل کا ایک ہم رسم تفاعل ہوتا ہے۔**

اِس کے بالعکس یہ آسانی سے ثابت ہوتا ہے (جیسا کہ مندرجۂ ذیل مثال ۶ میں بتلایا گیا ہے) کہ شکل

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}\,\text{گ}(\text{لا}) + \text{گ}(\text{لا})}{\text{ج}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{فا}(\text{لا})}$$

کی کسی مساوات سے اختیاری مستقل ج کو ساقط کرنے سے ریکیٹی کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۱۶۴ - ریکیٹی کی مساوات کے کسی چار مخصوص تکملوں کی

جلیبی نسبت لا پر غیر منحصر ہوتی ہے -

ہم اِن چار تکملوں کو ب (لا)، ق (لا)، ر (لا)، س (لا) لے سکتے ہیں۔ یہ تکملے $\frac{\text{ج گ (لا) + گ (لا)}}{\text{ج ف (لا) + فا (لا)}}$ سے ج کو چار خاص قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ دیکر حاصل کئے گئے ہیں۔ اب

$$\text{ب - ق} = \frac{\text{عہ گ + گ}}{\text{عہ ف + فا}} - \frac{\text{بہ گ + گ}}{\text{بہ ف + فا}}$$

$$= \frac{\text{(عہ - بہ)(گ فا - ف گ)}}{\text{(عہ ف + فا)(بہ ف + فا)}}$$

اور اسی طرح اِس کے مشابہ جملے، ب، ق، ر، س میں سے کسی دو کے دوسرے فرقوں کے لیے حاصل ہوتے ہیں - جب ہم اِن کی جلیبی نسبت لیتے ہیں تو وہ سب اجزائے ضربی جن میں لا آتا ہے کٹ جاتے ہیں اور

$$\frac{\text{(ب - ق)(ر - س)}}{\text{(ب - س)(ر - ق)}} = \frac{\text{(عہ - بہ)(جہ - ضہ)}}{\text{(عہ - ضہ)(جہ - بہ)}} = \text{ج (فرض کرو)}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ج، لا پر منحصر نہیں ہے -

۱۶۵ — حل کا طریقہ جبکہ تین مخصوص تکملے معلوم ہوں -

فرض کرو کہ یہ تکملے ق (لا)، ر (لا)، س (لا) ہیں - تب پچھلے نتیجہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عام حل

$$\text{ج} = \frac{\text{\{ما - ق (لا)\}\{ر (لا) - س (لا)\}}}{\text{\{ما - س (لا)\}\{ر (لا) - ق (لا)\}}}$$

ہے جہاں ب (لا) کی بجائے ما درج کیا گیا ہے - اِس لیے اِس صورت میں عام حل کو اعمال تکمل کے بغیر حل کیا گیا ہے -

۱۶۶ — حل کا طریقہ جبکہ دو مخصوص تکملے معلوم ہوں -

فرض کرو کہ یہ تکملے ق (لا) اور ر (لا) ہیں۔

تب ما۱ = ف + ق ما + ر ما²

اور ق۱ = ف + ق ق + ر ق²

∴ ما۱ − ق۱ = (ما − ق) {ق + (ما + ق) ر}

اسی طرح ما۱ − ر۱ = (ما − ر) {ق + (ما + ر) ر}

اس لیے (ما۱ − ق۱)/(ما − ق) − (ما۱ − ر۱)/(ما − ر) = (ق − ر) ر

اِس سے حاصل ہوتا ہے

لوک (ما − ق)/(ما − ر) = ج + ∫ (ق − ر) ر فرلا

پس اِس صورت میں عام حل کے لیے ایک عمل تکمل کی ضرورت ہے۔

۱۶۷ — حل کا طریقہ جبکہ ایک مخصوص تکملہ معلوم ہو۔ (۲۰۳)

فرض کرو کہ یہ تکملہ ق (لا) ہے۔

ما = ق (لا) + ۱/ی درج کرنے سے[1] مساوات (۱)

ق۱ − ی۱/ی² = ف + (ق + ۱/ی) ق + (ق² + ۲ق/ی + ۱/ی²) ر

میں مستحیل ہوتی ہے۔ لیکن چونکہ ق (لا) ایک تکملہ ہے اِس لیے

ق۱ = ف + ق ق + ق² ر

[1] یہ طریقہ بناوٹی معلوم ہوتا ہے۔ زیادہ فطری (لیکن زیادہ طویل) طریقہ میں پہلے ما = ق (لا) + ع رکھا جاتا ہے جس سے ریکیٹی کی شکل کی ایک مساوات حاصل ہوگی جس میں ف کی بجائے صفر ہوگا۔ لیکن یہ برنولی کی مساوات کی ایک خاص صورت ہے (دفعہ ۲۱) اور حل کے معمولی طریقہ میں اندراج ۱/ع = ی کی ضرورت ہوتی ہے۔ اِن دونوں اندراجات کو ملانے سے ہمیں متن میں دیا ہوا اندراج حاصل ہوتا ہے۔

تفریق کرنے اور ی² سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

- ی١ = ی ق + (٢ ی ق + ١) س١

یا ی١ + (ق + ٢ ق س١) ی = - س

یہ ایک خطی مساوات ہے جس کو ایک تکمل جزو ضربی قو {ک (ق + ٢ق س) فر لا}

کے استعمال سے حل کیا جا سکتا ہے۔ اس جزو ضربی کو معلوم کرنے میں ایک عمل تکمل کی ضرورت ہے اور حل کو مکمل کرنے کے لیے دوسرے کی اور اس طرح کل دو اعمال تکمل کی ضرورت ہے۔

حل طلب مثالیں۔

امثلہ ١ تا ٥ میں طالب علم کو ابتدائی اصولوں پر کام کرنا چاہئے اور اوپر کے طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے۔ وہ صرف نتیجوں کو بیان نہ کرے اور صرف اندراج سے کام نہ لے۔

(١) ایک خطی مساوات میں تحویل کرکے ثابت کرو کہ

ما١ = -٢ - ٥ ما - ٢ ما²

کا حل ٢ ما (ج قو^{٣لا} + ١) = - (ج قو^{٣لا} + ٤)

ہے۔

(٢) ثابت کرو کہ لا² ما١ + ٢ - ٢ لا ما + لا² ما² = ٠

کا حل ما (لا² + ج لا) = ٢ لا + ج ہے۔

(٣) ثابت کرو کہ ما١ = ١ + ما² کا ایک تکملہ مس لا ہے اور اس لیے اس کے حل کو عام شکل

ما (ج - مس لا) = ج مس لا + ١

میں حاصل کرو۔

(۴) ثابت کرو کہ مستقل ک کی دو قیمتیں ہیں جن کے لیے لا² (ما، + ما²) = ۲ کا ایک تکملہ ک/لا ہے اور اس لیے عام حل حاصل کرو۔

[ک = ۲ یا -۱، ما (ج لا⁴ - لا) = ۲ ج لا³ + ۱]

(۵) ثابت کرو کہ لا (لا² - ۱) ما، + لا² - (لا² - ۱) ما - ما² = ۰

کے تین تکملے ۱، لا، لا² ہیں اور اس لیے عام حل

ما (لا + ج) = لا + ج لا²

حاصل کرو۔

(۶) مساوات ما = (ج گ (لا) + گ (لا)) / (ج ف (لا) + فا (لا)) (۲۰۴)

سے اختیاری مستقل ج ساقط کر کے ریکیٹی کی مساوات

(گ فا - گ ف) ما، = (گ گ، - گ، گ)

+ (گ ف، - گ، ف - گ فا، + گ، فا) ما + (ف فا، - ف، فا) ما²

حاصل کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ ریکیٹی کی مساوات

ما، + ب ما² = ج لا^م

محدود رقموں میں تکمل کی جا سکتی ہے جبکہ م = ۰۔

[ما ک (قو^(۲ لا ک) + ۱) = ج (قو^(۲ لا ک) - ۱)، جہاں ک = √(ب ج)، اگر ب ج مثبت ہو۔

ما ک = ج مس (ا - ک لا)، جہاں ک = √(- ب ج) اگر ب ج منفی ہو۔

ما = ج لا + ا، اگر ب = ۰۔]

ما (ب لا + ا) = ا، اگر ج = ۰]

(۸) ثابت کرو کہ استحالہ ما = ی/لا سے ریکٹی کی مساوات

$$\text{لا ی}_{\text{ا}} - \text{ی} + \text{ب ی}^{۲} = \text{ج لا}^{\text{م}+۲}$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس لیے ثابت کرو کہ یہ آخری مساوات محدود رقموں میں تکمیل کی جاسکتی ہے اگر م = ۰۔

[مثال ۷ کا نتیجہ استعمال کرو۔]

(۹) اندراج ی = ما لاؑ سے مساوات

$$\text{لا ی}_{\text{ا}} - \text{ا ی} + \text{ب ی}^{۲} = \text{ج لا}^{\text{ن}}$$

$$\text{لا}^{۱-\text{ع}}\ \text{ما}_{\text{ا}} + \text{ب ما}^{۲} = \text{ج لا}^{\text{ن}-۲\text{ع}}$$

کو میں مستحیل کرو۔

ایک مزید اندراج لا = لاؑ سے ریکٹی کی شکل کی ایک مساوات حاصل کرو جس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب ب/ا، ج/ا، (ن-۲ا)/ا ہوں۔ اس لیے ثابت کرو کہ اس مثال کی پہلی مساوات کو محدود رقموں میں تکمیل کیا جاسکتا ہے اگر ن = ۲ا۔

(۱۰) ثابت کرو کہ اندراج ی = ا/ب + لاٰن/ع سے مثال (۹) کی پہلی مساوات مشابہ شکل کی مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ا، ب، ج کی بجائے علی الترتیب ن + ا، ج، ب ہوتے ہیں۔ اس لیے ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں تکمیل کیا جاسکتا ہے اگر ن = ۲ا یا ن = ۲(ن + ا)۔ اس استدلال کو دُہرا کر ثابت کرو کہ مثال (۹) کی پہلی مساوات محدود رقموں میں تکمیل پذیرہ

ہے اگر ن = ۲ (س ن + ۱) جہاں س (ذیل کی مثالوں میں بھی) صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ اندراج ی = $\frac{لا^ن}{ع}$ سے مثال (۹) کی مساوات مشابہ شکل کی ایک مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ا، ب، ج کی بجائے علی الترتیب ن - ا، ج، ب ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان میں سے کسی مساوات کو محدود رقموں میں تکمل کیا جا سکتا ہے اگر

ن = ۲ (س ن - ۱)

(۱۲) مثالوں (۹)، (۱۰)، (۱۱) کے نتیجوں سے ثابت کرو کہ ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے اگر م + ۲ = ۲س (م + ۲) ± ۲ -

ثابت کرو کہ یہ نتیجہ م = $\frac{-۴ ر}{۲ ر \pm ۱}$ کے مماثل ہے جہاں س کی طرح ر بھی صفر یا کوئی مثبت صحیح عدد ہے یا $\frac{۲}{م + ۲}$ ہے جو ایک طاق صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ اندراجات ما = $\frac{۱}{ب لا} + \frac{۱}{لا^۲ ما}$، لا = لا$^{م+۳}$ (۲۰۵)

سے ریکٹی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب $\frac{ج}{م+۳}$، $\frac{ب}{م+۳}$، $-\frac{م+۴}{م+۳}$ مندرج ہوتے ہیں۔ اس سے یہ اخذ کرو کہ اگر م کی شکل $-\frac{۴ س}{۲ س - ۱}$ ہو تو اس استحالہ سے س، س - ا میں بدل جاتا ہے۔ س کے ایسے استحالوں پر غور کر کے ثابت کرو کہ اس صورت میں ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اندراجات ما = ۱/میا ، لا = لا^{م+۱} سے ریکٹی کی مساوات مشابہ شکل کی دوسری مساوات میں مستحیل ہوتی ہے لیکن اس میں ب، ج، م کی بجائے علی الترتیب ج/(م+۱) ، ب/(م+۱) ، ـ م/(م+۱) مندرج ہوتے ہیں۔ اس سے اخذ کرو (مثال ۱۳ کا نتیجہ استعمال کر کے) کہ ریکٹی کی مساوات محدود رقموں میں تکمل پذیر ہے اگر م شکل ـ ۴س/(۲س+۱) کا ہو۔

۱۶۸ ـــ کُل تفرقی مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ کو تکمل کرنے کے دو طریقے۔

ہم گیارہویں باب میں اس مساوات کے تکمل پذیر ہونے کی ضروری اور کافی شرط بیان کر چکے ہیں اور نیز تکملہ کو حاصل کرنے کا ایک عام طریقہ بیان کر چکے ہیں جبکہ یہ شرط پوری ہو۔ اب ہم دو اور طریقے درج کریں گے۔ ان میں سے ایک میں (جس میں متکمل جزو ضربی سے کام لیا جاتا ہے) یہ نقص ہے کہ اس کو صرف بعض متجانس مساواتوں کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے لیکن ان مساواتوں کے لیے غالباً یہ طریقہ سادہ ترین ہے۔ دوسرا (میر کا طریقہ) بالکل عام ہے۔ اس میں صرف ایک عمل تکمل کی ضرورت پڑتی ہے اور اس لیے اس میں دوسرے عام طریقہ (دفعہ ۱۱۷) کی بہ نسبت ایک نظری فائدہ ہے۔ لیکن مبتدی کو اس کے استعمال کا مشورہ نہیں دیا جا سکتا کیونکہ جس واحد عمل تکمل کی اس میں ضرورت پڑتی ہے اس کو (ان جملوں کے عدم تشاکل کی وجہ سے جو واقع ہوتے ہیں) عمل میں لانے کے لیے ان دو اعمال تکمل کی بہ نسبت جو دفعہ ۱۱۷ کے طریقے میں مطلوب ہوتے

ہیں اکثر زیادہ دقتیں پیش آتی ہیں۔ اس کے علاوہ اگر اس طریقہ کو بعض شرطوں کا کافی لحاظ کئے بغیر استعمال کیا جائے تو ایسے نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں جو بالکل غلط ہوں۔

۱۶۹۔ متجانس تفاعلوں کے لیے متکمل جزو ضربی۔

فرض کرو کہ

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰، .... (۱)

ایک تکمل پذیر مساوات ہے جس میں ف، ق، ر ایک ہی درجہ ن کے لا، ما، ی میں متجانس تفاعل ہیں یعنے ف، ق، ر کو شکلوں

لا$^{\text{ن}}$ ف (ع، و)، لا$^{\text{ن}}$ گ (ع، و)، لا$^{\text{ن}}$ ھ (ع، و)

میں علی الترتیب بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ع = $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ اور و = $\frac{\text{ی}}{\text{لا}}$

اب فرما = ع فرلا + لا فرع، فری = و فرلا + لا فرو

اس لیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

لا$^{\text{ن}}${ف (ع، و) فرلا + گ (ع، و) (ع فرلا + لا فرع)
+ ھ (ع، و) (و فرلا + لا فرو)} = ۰

یعنے لا$^{\text{ن}}${(ف + ع گ + و ھ) فرلا + لا (گ فرع + ھ فرو)} = ۰

اس کو لا$^{\text{ن+۱}}$ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کرو اور اگر یہ جملہ صفر نہ ہو تو حاصل ہو گا

$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ + $\frac{\text{گ فرع + ھ فرو}}{\text{ف + ع گ + و ھ}}$ = ۰، .... (۲)

اب چونکہ مساوات (۱) تکمل پذیر ہے اس لیے مساوات (۲۰۶)
(۲) بھی تکمل پذیر ہے خواہ فوری یا ایک متکمل جزو ضربی سے ضرب

دینے کے بعد - مساوات (۲) کی پہلی رقم میں صرف لا شامل ہے اور دوسری رقم میں صرف متغیر ع اور و - ایک متغیر دوسرے متغیروں سے جدا کیا ہوا ہے اور یہ جدائی جو عمل تکمل کے لیے مناسب ترین شکل ہے کسی جزو ضربی (اِلّا صرف ایک مستقل کے) سے ضرب دینے پر باقی نہیں رہے گی - اِس لیے کسی متکمل جزو ضربی کو تلاش کرنے کی ضرورت نہیں ہے اور مساوات (۲) اپنی اِس شکل میں ٹھیک ہے - لیکن متغیروں کی تبدیلی کے علاوہ مساوات (۲) کو مساوات (۱) سے جزو ضربی لا$^{ن+۱}$ (ف + ع گ + و ھ) سے تقسیم کر کے حاصل کیا گیا تھا - یہ جزو ضربی ف لا + ق ما + ر ی کے مساوی ہے - اِس لیے تکمل پذیر متجانس مساوات

ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

کا متکمل جزو ضربی $\frac{۱}{\text{ف لا + ق ما + ر ی}}$ ہے اِلّا آنکہ ف لا + ق ما + ر ی = ۰ -

اِس کے مشابہ مسئلہ مساوات

ف$_۱$ فرلا$_۱$ + ف$_۲$ فرلا$_۲$ + ... + ف$_ن$ فرلا$_ن$ = ۰

کے لیے درست ہے -

مثال - (ما^۲ + ما ی) فرلا + (ی لا + ی^۲) فرما + (ما^۲ - لا ما) فری = ۰

یہاں ف لا + ق ما + ر ی = لا ما^۲ + لا ما ی + لا ما ی + ما ی^۲

+ ما^۲ ی - لا ما ی

= ما (لا ما + لا ی + ی^۲ + ما ی)

= ما (لا + ی) (ما + ی)؛

اس لیے متکمل جزو ضربی
(۱) / (ما (لا + ی) (ما + ی)) ہے ۔

تفرقی مساوات کو اِس متکمل جزو ضربی سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے

فرلا/(لا + ی) + ی فرما/(ما (ما + ی)) + (ما - لا) فری/((لا + ی) (ما + ی)) = ۰

یعنے فرلا/(لا+ی) + {(ما+ی) - ما} فرما/(ما (ما + ی)) + {(ما+ی) - (لا + ی)} فری/((لا + ی) (ما + ی)) = ۰

یا فرلا/(لا + ی) + فرما/ما - فرما/(ما + ی) + فری/(لا + ی) - فری/(ما + ی) = ۰

یا (فرلا + فری)/(لا + ی) + فرما/ما - (فرما + فری)/(ما + ی) = ۰

∴ لوک (لا + ی) + لوک ما - لوک (ما + ی) = لوک ج

∴ ما (لا + ی) = ج (ما + ی)

حل طلب مثالیں

حسب ذیل مثالوں پر یہ طریقہ استعمال کرو :
مثال (۲) صفحہ ۲۷۱، مثال (۱۰) ۱، (۱۰) ۲، اور مثال ۱۱ صفحہ ۲۸۵

۱۷۰ - میر کا طریقہ - کُلی تفرقی مساوات کو شکل

فری = ف (لا، ما، ی) فرلا + ق (لا، ما، ی) فرما
میں لکھو۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر تکمل پذیری کی شرط (دفعات
۱۱۸ اور ۱۱۹) پوری ہو اور اگر تفاعل ف اور تفاعل ق ایک (۲۰۷)
نقطہ (لا، ما، ی) کے قرب میں کُل شکلی Holomorphic ہوں تو تفرقی مساوات کا

ایک حل (اور صرف ایک) موجود ہوتا ہے جو اِس نقطہ میں سے گذرنے والی ایک سطح کو تعبیر کرتا ہے[1]۔ میر کے طریقہ میں ایک متغیر مستوی نقطہ (لا٠، ما٠، ی٠) میں سے محوری کے متوازی کھینچا جاتا ہے اور پھر اِس متغیر مستوی اور سطح کا تقاطع کا منحنی معلوم کر کے سطح کو متعین کیا جاتا ہے۔ لا٠ اور ما٠ کے لیے سادہ سے سادہ قیمتیں جو کُل شکلی شرط کے مطابق ہوں لی جاتی ہیں مثلاً صفر اور صفر، یا صفر اور ایک یا ایک اور ایک۔ آخری نتیجہ میں ی٠ اختیاری مستقل کے طور پر واقع ہوتا ہے۔ یہ عمل حسب ذیل مثالوں سے بہترین طریقہ پر ذہن نشین ہوگا۔ [بلاشبہ یہ مساواتیں فوراً حل کی جا سکتی ہیں لیکن اگر زیادہ مشکل مثالوں کا انتخاب کیا جاتا تو اِس طریقہ کا اصول اُن پیچیدہ اعمال تکمل کی تفصیلات میں پنہاں ہو جاتا جو میئر کے طریقہ میں اکثر داخل ہوتے ہیں۔]

مثال (۱) فری = ۲ لا فرلا + ۴ ما فرما، .... (۱)

تکمل پذیری کی شرط

۲ لا (۰ – ۰) + ۴ ما (۰ – ۰) – ۱ (۰ – ۰) = ۰

ہے جو پوری ہوتی ہے۔ ہم لا٠ = ۰ اور ما٠ = ۰ لے سکتے ہیں کیونکہ تفاعل ۲ لا اور ۴ ما نقطہ (۰، ۰، ی٠) کے قرب میں کُل شکلی ہیں۔ وہ مستوی جو محوری کے متوازی اِس نقطہ میں سے گذرتا ہے

ما = م لا، فرما = م فرلا، .... (۲)

سے حاصل ہوتا ہے۔

مساواتوں (۱) اور (۲) سے

فری = (۲ + ۴ م^۲) لا فرلا

ی – ی٠ = (۱ + ۲ م^۲) لا^۲، .... (۳)

[1] گرسا (Cours d'Analyse Mathematique) جلد دوم چوتھا اڈیشن دفعات ۴۸۵ اور ۴۱۴۔

جہاں تکمل کے مستقل کا تعین اس شرط کے ذریعہ کیا گیا ہے کہ ی = ی. جبکہ لا = ۰۔

مساوات (۳) ایک اسطوانہ کو (جس کے مکون محور ما کے متوازی ہیں) تعبیر کرتی ہے جو منحنی (۲) اور مطلوبہ سطح کے تقاطع کے منحنی میں سے گذرتا ہے۔

مساواتوں (۲) اور (۳) سے م کو ساقط کیا جائے تو سطح کی مساوات

ی - ی. = لا^۲ + ۲ ما^۲

حاصل ہوتی ہے۔

یہ مساوات (۱) کا عام حل ہے اگر ی. کو اختیاری مستقل کے طور پر لیا جائے۔

مثال (۲) فری = ۳ ی فرلا / لا - ۲ ی فرما / ما ، ...... (۴)

تکمل پذیری کی شرط

۳ی / لا (۲- / ما - ۰۰) - ۲ی / ما (۰۰ - ۳ / لا) - ۱ (۰ - ۰) = ۰

ہے جو پوری ہوتی ہے۔ ہم لا = ۰، ما = ۰ نہیں لے سکتے کیونکہ اس سے تفاعل ۳ی / لا اور ۲ی / ما لامتناہی ہو جاتے ہیں۔ لیکن لا = ۱ اور ما = ۱ لیے جا سکتے ہیں۔

رکھو ما = ۱ + م (لا - ۱)، .... (۵) (۲۰۸)

مساوات (۴) ہو جاتی ہے

فری = ۳ ی فرلا / لا - ۲ ی م فرلا / (۱ + م (لا - ۱))

∴ لوک ی - لوک ی. = ۳ لوک لا - ۲ لوک {۱ + م (لا - ۱)}

∴ ی {۱ + م (لا - ۱)}^۲ = ی. لا^۳ ، .... (۶)

(۵) اور (۶) سے م کو ساقط کرنے پر مطلوبہ حل

ی ما^{۲} = ی. لا^{۲}

حاصل ہوتا ہے۔

یہ قابل ذکر ہے کہ اِس قبیل کی تمام سطحیں نقطہ (۰، ۰، ی.) میں سے گذرتی ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ اوپر کی مثال (۲) کو حل کرنے کی سعی جبکہ نقطہ (۰، ۰، ی.) کو ثابت نقطہ کے طور پر لیا گیا ہو ناکام ہو جاتی ہے جبکہ ہم مساوات (۶) کے متناظر اسطوانہ کو اِس نقطہ میں سے گذارنے کی کوشش کرتے ہیں۔

(۲) حل کرو ما^{۲}فری = مافرلا + (ما^{۲} - لا) فرما

[ثابت نقطہ کو (۰، ۱، ی.) کے طور پر منتخب کرنے سے صحیح نتیجہ

ما (ی - ی.) = ما (ما - ۱) + لا

حاصل ہوتا ہے۔ نقطہ (۰، ۰، ی.) کے انتخاب سے غیر صحیح نتیجہ ی - ی. = ما حاصل ہوگا۔]

(۳) حل کرو (۱ + لاما) فری = (۱ + مای) فرلا + لا (ی - لا) فرما

[نتیجہ ی = لا + ی. (۱ + لاما)]

۱۷؍ا۔ دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساواتیں۔

حسب ذیل بحث (دفعات ۱۷؍ا تا ۱۷؍۷) نویں اور دسویں باب کا تتمہ ہے۔ لا کے لحاظ سے تفرقوں کو تعبیر کرنے کے لیے لاحقے استعمال کئے جائیں گے۔ ھ (لا)، ک (لا)، ز (لا)، ھ (لا)، ک (لا) سے یا صرف ھ، ک، ز، ھ اور ک سے لا کے ایسے تفاعل تعبیر ہوں گے جو مبداء پر کل شکلی ہیں؛ یعنے ان کو قوت کے ایسے سلسلوں

میں پھیلایا جا سکتا ہے جو ایک کافی چھوٹے دائرہ کے اندر جس کا مرکز مبدا پر ہو ستدق ہیں) اور نیز ان تفاعلوں میں یہ خاصیت ہے کہ وہ مبدا پر معدوم نہیں ہوتے ۔ اِن کے متکافی بھی کل شکلی ہوں گے اور اِسی طرح اُن کے لوکارثمی مشتق مثلاً

$$\frac{ھ_{1}(لا)}{ھ(لا)}$$

بھی کُل شکلی ہوں گے ۔

جب کبھی ہم نادر نقطوں کا ذکر کریں تو یہ سمجھا جائے گا کہ یہ نقطے منفرد ہیں یعنے یہ کہ کافی چھوٹے نصف قطر کا ایک دائرہ جس کا مرکز ان میں سے کوئی نقطہ ہو کھینچا جائے تو دوسرے تمام نقطے اس کے باہر ہونگے ۔

۱۷۲ - باقاعدہ تکملے - صفحہ ۲۱۶ پر یہ بیان کیا گیا تھا کہ فرابینس کی شکلوں کے حلوں کو باقاعدہ تکملے کہا جاتا ہے۔ اب ہم غور کریں گے کہ اِس کا کیا مفہوم ہے۔ فرض کرو کہ ہم ان جوابوں کی شکلوں کا امتحان کرتے ہیں جو نویں باب کی مثالوں سے حاصل ہوئے ہیں۔ اگرچہ
(۲۰۹) ہم نے حل کے عمل میں چار صورتوں[2] میں امتیاز کیا ہے لیکن فی الحقیقت

---

[1] دیکھو برامویچ کی کتاب Infinite Series دوسرا ایڈیشن دفعات ۵۴ اور ۸۴ -

[2] م ویں رتبہ کی مساواتوں کے لیے فرابینس کے طریقہ میں (دیکھو Crelle Vol. LXXVI یا فورسائتھ کی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" جلد چہارم صفحہ ۷۸ تا ۹۳' یا اِنس کی کتاب "معمولی تفرقی مساواتیں" صفحہ ۳۹۶ تا ۴۰۲) نظری بحث کے لیے صرف دو صورتوں میں تمیز کرنا سہولت بخش ہے' اِن میں سے دوسری صورت میں ہماری (۲)' (۳) اور (۴) صورتیں شامل ہیں۔ اِس دوسری صورت کو حل کرنے میں اُس سلسلہ کو جس کے سر ج کے تفاعل ہیں ف (ج + ۱) ف (ج + ۲) ......

(ملاحظہ ہو بقیہ بر صفحہ آیندہ)

کا بِل ابتدائی ا ۶ + ب و کی صرف دو مختلف شکلیں تھیں۔ ایک تکملہ (فرض کرو ۶) ہمیشہ شکل لا^ع ھ (لا) کا تھا۔ دوسرا تکملہ، چند مثالوں میں اس کے مشابہ شکل کا تھا، مثلاً شکل لا^ع ک (لا) کا دفعات ۹۵ اور ۹۹ میں، دوسری مثالوں میں مثلاً دفعات ۹۷ اور ۹۸ میں اس کی شکل

لا^ع {ھ (لا) لوک لا + لا^س ک (لا) }

تھی جہاں س ایک مثبت یا منفی صحیح عدد تھا (مثال ۱ دفعہ ۹۷ میں ۴ ہ، مثال ۱ دفعہ ۹۸ میں)۔
ہم اِن شکلوں کو (دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے) اُن تکملوں کی تعریفیں قرار دیتے ہیں جو مبدا[1] پر باقاعدہ ہیں صرف

(بقیہ صفحہ گذشتہ) ... ف (ج + ر) سے ضرب دیا جاتا ہے جہاں ف (ج) = ۰ قوت نمائی مساوات ہے اور ر اس کی اصلوں میں سے کسی دو کے درمیان بڑے سے بڑا فرق ہے جہاں یہ اصلیں اُس جُٹ سے متعلق ہیں جن میں صحیح عددوں کا فرق ہے (دیکھو ہمارا طریقہ صورت (۳) کے لیے)۔ اِس سلسلہ میں او ر ج کے لحاظ سے اس کے متواتر جزئی تفرقی سروں میں علی الترتیب اِن اصلوں کو درج کیا جاتا ہے جو اس طرح مرتب ہوتے ہیں کہ کسی ایک اصل اور اصل مابعد کے درمیان فرق ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے یا صفر۔ لیکن مثالوں کو اِس طریقہ سے حل کرنے میں بہت زیادہ غیر ضروری کام انجام دینا پڑتا ہے اور اِس لیے نویں باب میں ہم نے اس میں بہت کچھ ترمیم کی ہے بالخصوص صورت (۴) میں۔

[1] مبدا، سے مختلف نقطوں پر دفعہ ۱۷۵ میں بحث کی گئی ہے۔ بدقسمتی سے لفظ "باقاعدہ" کا مفہوم تفرقی مساواتوں میں مختلف اور تفاعلوں کے نظریہ میں مختلف ہے جس میں یہ کل شکلی کے مرادف ہے۔ مثلاً ایک جملہ جس میں لوک لا یا لا^ع شامل ہو (جہاں ع صفر یا مثبت صحیح عدد نہیں ہے) مبدا پر باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے لیکن اس نقطہ پر باقاعدہ تفاعل نہیں ہو سکتا۔

اِس ترمیم کے ساتھ کہ س صفر بھی ہوسکتا ہے - اِس ترمیم سے کوئی حقیقی فرق پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اگر س صفر ہے تو تکملہ

و = لاٴ { ھ (لا) لوک لا + ک (لا) }

کی بجائے ہم تکملوں کا خطی اجتماع

و - (ک (۰) / ک (۰)) ع = لاٴ { ھ (لا) لوک لا + ک (لا) - (ک (۰) / ھ (۰)) ھ (لا) }

رکھ سکتے ہیں جس کی شکل مشابہ ہے سوائے اِس کے کہ ک (لا) کی بجائے ایک نیا کُل شکلی تفاعل ہے جس کا ایک جزوضربی لا ہے - اِس طرح و کی پہلی شکل میں یعنی لاٴب ک (لا) میں ہم ہمیشہ عہ اور بہ کو غیر مساوی فرض کرسکتے ہیں کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو و کی بجائے و - (ک (۰) / ھ (۰)) ع رکھا جاسکتا ہے جس کا ایک جزوضربی لاٴ+۱ ہے -

م ویں رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے لیے مبداء پر باقاعدہ تکملہ کی یہ تعریف کی جاتی ہے کہ وہ شکل

لاٴ { ھ (لا) (لوک لا)ر + لاس ک (لا) (لوک لا)ر-۱ + ... + لان ز (لا) }

کا ہوتا ہے جہاں س اور ن صفر یا کوئی صحیح عدد (مثبت یا منفی) ہیں اور ر قیمتوں ۰، ۱، ۲، ...، م - ۱ میں سے کوئی اختیار کرسکتا ہے - اس طرح پہلے رتبہ کی مساواتوں کے لیے باقاعدہ تکملوں میں
(۲۱۰) لوک لا نہیں آسکتا - دوسرے رتبہ کے لیے لوکارتم یا تو خطی طور پر وقوع پذیر ہوگا یا بالکل موجود ہی نہ ہوگا - اِس کو دسویں باب سے حسب ذیل طریقہ پر ماخوذ کیا جاسکتا ہے: دفعہ ۱۰۷ میں دونوں تکملے لوکارتموں سے پاک تھے - دفعہ ۱۱۰ میں ہم نے دوسرا تکملہ

[1] دیکھو صفحہ ۴۱۷ کے حاشیہ میں نوٹ

شکل لاʲ ∑ ان لاⁿ کے ایک سلسلہ کو ج کے لحاظ سے جزئی طور پر تفرق کر کے حاصل کیا جہاں سب ا، ج کے تفاعل ہیں اور پھر تفرق کے بعد ج کی بجائے بہ رکھا ۔ نتیجہ (۱۱۰ میں بیان نہیں کیا گیا)

لاᵇ {(∑ ان (بہ) لاⁿ) لوک لا + (∑ (جف ان (بہ) / جف بہ) لاⁿ) }

ہے جس کی شکل لاᵃ {ھ (لا) لوک (لا) + لاˢ ک (لا) } ہے ۔

اگر سروں ان (بہ) میں سے پہلے لہ سر صفر ہوں اور سروں (جف ان (بہ) / جف بہ) میں سے پہلے مہ سر بھی صفر ہوں تو عہ = بہ + لہ اور س = مہ - لہ ۔

یہ قابل توجہ ہے کہ لوک لا کا ہم جزو ضربی خود ایک تکملہ ہے ۔ اِس کو بلاواسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے ۔ فرض کرو کہ تفرقی مساوات

ما + ما ف (لا) + ما ق (لا) = ۰ .... (۱)

ہے جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبداء کے قریب یکساں[1] (یعنے وحید القیمت) ہیں ۔

اگر اِس مساوات کی دائیں جانب ہم ما کی بجائے تکملہ

لاᵃ {ھ (لا) لوک لا + لاˢ ک (لا)} = ء لوک لا + ط (فرض کرو)

درج کریں تو نتیجہ کو تکملہ کی تعریف کی رو سے متماثلاً صفر ہونا چاہئے ۔

---

[1] اِس تفرقی مساوات میں وہ مساواتیں مخصوص صورتوں کے طور پر شامل ہیں جو نویں اور دسویں باب میں زیر بحث آچکی ہیں ۔

اِس نتیجہ میں لوک لا کا ہم جزو ضربی (ع$_2$ + ع$_1$ ف + ع ق) ہے۔ نتیجہ میں یہ اور دوسری تمام رقمیں، اِلّا لوک لا کے، لا^{ع} اور ایک ایکساں تفاعل کے حاصل ضرب ہیں کیونکہ ع اور ط اور اِس لیے ع$_1$، ع$_2$، ط$_1$، ط$_2$ اِس قسم کے حاصل ضرب ہیں اور ف اور ق ایکساں ہیں۔ اگر ہم لوک لا کے ہم جزو ضربی سے اِس تماثلہ کو تقسیم کر سکتے تو یہ لغو نتیجہ حاصل ہوتا کہ غیر یکساں تفاعل لوک لا دو ایکساں تفاعلوں کا خارج قسمت ہے یعنے خود ایک ایکساں تفاعل ہے۔ اِس لیے یہ تقسیم ناجائز ہے اور یہ صرف اُس صورت میں ہو سکتی ہے کہ ہم جزو ضربی صفر ہو، یعنے ع خود ایک تکملہ ہو۔

اِس کے مشابہ مسئلہ لوک لا کی اعلیٰ ترین قوت کے ہم جزو ضربی کے لیے جو م ویں رتبہ کی مساوات (جس کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہوں) کے باقاعدہ تکملہ میں، وقوع پذیر ہو درست ہے۔ اِس طرح ہر اُس صورت میں جس میں باقاعدہ تکملے ہوں کم از کم ایک کو لوکارثموں سے پاک ہونا چاہیئے اور شکل لا^{ع} ھ (لا) کا ہونا چاہیئے۔

(۲۱۱) **۱۷۳۔ فوش (Fuch) کا مسئلہ۔ دوسرے رتبہ کی ایک خطی تفرقی مساوات کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہیں۔ وہ ضروری اور کافی شرط کہ اس کے تمام تکملے مبداء پر باقاعدہ ہوں یہ ہے کہ یہ مساوات شکل**

$$\text{لا}^2 \text{ما}_2 + \text{لا}\,\text{ما}_1\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ما}\,\text{ق}(\text{لا}) = 0$$

میں بیان ہو سکے جہاں ف اور ق مبداء پر کل شکلی ہیں۔

فرابینیس کے طریقہ کی بحث (دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۰) سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ یہ شرط کافی ہے۔ اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ ضروری ہے۔ دفعہ ۱۰۲ کی رو سے کم از کم ایک تکملہ شکل لا^ع ھ (لا) کا ہے

اِس کو ع (لا) سے تعبیر کرو۔ ما = ع ∫ ی فرلا رکھو اور دفعہ ۱۰۲ کی

مساوات (۱) میں اندراج کرو۔ وہ رقمیں جن میں تکمل کی علامت آتی ہے جزو ضربی (ع۲ + ع۱ ف + ع ق) رکھتی ہیں اور اِس لیے معدوم ہوتی ہیں کیونکہ ع ایک تکملہ ہے، پس حاصل ہوتا ہے

ع۲ ی + ع ی۱ + ف ع ی = ۰ .... (۲)

اب تکملہ ما کی شکل

لا^ب ک (لا) یا لا^ع {ھ (لا) لوک لا + لا^س ک (لا)}

ہوگی۔ اِس لیے

ما / ع (لا) = لا^(ب - ع) ک (لا) / ھ (لا) یا لوک لا + لا^س ک (لا) / ھ (لا)

= لا^(ب - ع) ھ (لا)، یا لوک لا + لا^س ھ (لا)، فرض کرو

∴ ی = فر/فرلا (ما / لا) = لا^(ب - ع - ۱) {(ب - ع) ھ + لا ھ۱}

یا = لا^(-۱) + لا^(س - ۱) (س ھ + لا ھ۱)

دونوں صورتوں میں ہم ی کو شکل[1] لا^ج ک (لا) میں لکھ سکتے ہیں

[1] پہلی صورت میں ج = ب - ع - ۱، دوسری صورت میں ج = - ۱ یا س - ۱ بموجب اس کے کہ س مثبت ہے یا منفی۔

جہاں ک (لا) کل شکلی ہے اگر ک (۰) ≠ ۰ پس مساوات (۲) سے

ف = - ی۱/ی - ع۲/ع۱ = - جہ/لا - ک۱/ک - ۲ ء/لا

- ۲ ھ۱/ھ = ف (لا)/لا فرض کرو جہاں ف مبداء پر کل شکلی ہے -

نیز چونکہ لاعہ ھ (لا) مساوات (۱) کا ایک تکملہ ہے اس لیے

لاعہ ھ۲ + ۲ عہ لاعہ-۱ ھ۱ + عہ (عہ - ۱) لاعہ-۲ ھ

+ (لاعہ ھ۱ + عہ لاعہ-۱ ھ) ف + لاعہ ھ ق = ۰

∴ ق = ۱/لا۲ { - لا۲ ھ۲/ھ - ۲ عہ لا ھ۱/ھ - عہ (عہ - ۱)

- (لا ھ۱/ھ + عہ) ف } = ق (لا)/لا۲ فرض کرو

جہاں ق مبداء پر کل شکلی ہے -

مساوات (۱) کی طرفین کو لا۲ سے ضرب دینے اور لا ف اور لا۲ ق کی بجائے علی الترتیب ف اور ق رکھنے سے ہمیں مطلوبہ شکل حاصل ہوتی ہے -

حل طلب مثالیں

(۲۱۲) ما = ا لا^۱/۲ + ب لا^۱/۲ لوک لا سے اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے تفرقی مساوات

۸ لا۲ (۴ - لوک لا) ما۲ + ۲ لا (۸ - لوک لا) ما۱ - ما لوک لا = ۰

حاصل کرو جو" اس لیے" دوسرے رتبہ کی ایک خطی تفرقی مساوات ہے جس کے تمام تکملے مبداء پر باقاعدہ ہیں لیکن اِس کو اُس شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا جو فوش کے مسئلہ میں مذکور ہے۔

[اِس مثال سے اُس مفروضہ کی اہمیت معلوم ہوتی ہے کہ تفرقی مساوات کے سر مبداء کے قریب ایکساں ہونے چاہئیں۔ حقیقت میں اِس سے ایک سخت قید عائد ہوتی ہے کیونکہ شکل

ما = {لاٗ ز (لا) + ب لاٗ {ھ (لا) لو ک لا + لاٗ ک (لا)}}

کے تمام کامل ابتدائی خارج ہو جاتے ہیں اِلّا اُس خاص صورت کے جہاں لاٗ ز (لا)، لاٗ ھ (لا) کا صرف ایک عددی ضعف ہو۔]

۱۷۴ - معمولی اور نادر نقطے - یہ ہو سکتا ہے کہ ف اور ق مبداء پر معدوم ہوں (برخلاف دوسرے کُل شکلی تفاعلوں یہ کے، ز، ھ، ک کے)۔ بالخصوص اگر ف، لا سے اور ق، لاٗ سے تقسیم پذیر ہو تو مساوات کی ابتدائی شکل (۱) میں ف اور ق مبداء پر کُل شکلی ہوں گے۔ اِس صورت میں مبداء کو ایک معمولی نقطہ کہا جاتا ہے اور فرابینیس کا طریقہ استعمال کرنے پر ایک قوت نمائی مساوات حاصل ہو گی جس کی اصلیں صفر اور ایک ہونگی اور اِن سے (حسب دفعہ ۹۹) ایک غیر متعین سر اور بالآخر دو خطی طور پر منبوع تکملے حاصل ہوں گے جو دونوں قوت کے سلسلے ہوں گے۔ نہ لوکارتم واقع ہو سکتے ہیں نہ ایسے قوت نما جو مثبت عددوں (یا صفر) سے مختلف ہوں۔ لیکن یہ ہو سکتا ہے کہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں صفر اور ایک ہوں اور مبداء ایک معمولی نقطہ نہ ہو جیسا کہ دفعہ ۹۸ کی مثال ۲ میں۔

وہ نقطے جو معمولی نہ ہوں نادر کہلاتے ہیں ۔ اگر ایک نادر نقطہ پر (جس کے قریب میں مساوات کے سر ایکساں ہیں) تمام تکملے باقاعدہ ہوں تو اُس کو باقاعدہ نادر نقطہ کہتے ہیں ۔

یہ تعریفیں خود تفرقی مساوات کے نادر نقطوں سے متعلق ہیں یعنے اِس کے سروں سے جبکہ مساوات کو شکل (۱) میں لکھا گیا ہو ۔ معمولی نقطوں کی بحث سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تکملوں کی ندرتیں مساوات کی ندرتیں ہوتی ہیں لیکن اِس کا عکس درست نہیں ہے ۔ مثلاً ما = ا لام + ب لان سے اختیاری مستقلوں ا اور ب کو ساقط کرنے سے

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_{2} - (\text{م} + \text{ن} - 1)\,\text{لا}\,\text{ما}_{1} + \text{م}\,\text{ن}\,\text{ما} = 0$$

حاصل ہوتا ہے ۔ اگر م اور ن نامساوی مثبت صحیح عدد ہیں یا اگر ایک صفر ہے اور دوسرا ا سے مختلف کوئی دوسرا مثبت صحیح عدد تو مبداء مساوات کی ندرت ہے لیکن تکملوں کی نہیں ۔ جب ہر تکملہ ایک
نقطہ پر جو مساوات کے لئے نادر ہے کُل شکلی ہو (جیساکہ یہاں ہے) (۲۱۳)
تو ندرت کو ظاہری کہا جاتا ہے ۔ باقی سب صورتوں میں ندرت کو حقیقی کہتے ہیں ۔ ظاہری ندرت پر یہ ضروری ہے کہ قوت نمائی مساوات کی اصلیں نامساوی مثبت صحیح عدد ہوں یا صفر اور ایک سے بڑا مثبت صحیح عدد ہوں ۔ یہ بھی ضروری ہے کہ چھوٹی اصل سے ایک غیر متعین سر حاصل ہو (دفعہ ۹۹ کے مطابق) ۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ وہ ضروری (مگر ناکافی) شرط کہ مبداء مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_{2} + \text{لا}\,\text{ما}_{1}\,\text{ف}(\text{لا}) + \text{ما}\,\text{ق}(\text{لا}) = 0$$

کی ظاہری ندرت ہو جہاں ف (لا) اور ق (لا) مبداء پر کُل شکلی ہیں یہ ہے کہ

ف (۰) = ایک منفی صحیح عدد - نیز ثابت کرو کہ وہ ضروری اور کافی شرطیں کہ مبدا ایک معمولی نقطہ ہو ف (۰) = ق (۰) = ق۱ (۰) = ۰ ہیں -

(۲) ثابت کرو کہ مبدا، مساوات

$$\text{لا}(1+\text{لا}^{2})\,\text{ما}_{2}-\text{ما}_{1}-\text{لا}^{3}\,\text{ما}=0$$

کی ظاہری ندرت ہے - نیز کامل ابتدائی

$$\text{ما}=\text{ا}\left(1+\frac{1}{8}\text{لا}^{4}-\frac{1}{16}\text{لا}^{6}+\frac{1}{24}\text{لا}^{8}-\cdots\right)+\text{ب}\left(\text{لا}^{2}-\frac{1}{4}\text{لا}^{4}+\frac{1}{6}\text{لا}^{6}-\frac{7}{64}\text{لا}^{8}\cdots\cdots\right)$$

کو حاصل کرو -

(۳) ثابت کرو کہ مبدا، مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\text{ما}_{2}+(\text{لا}^{2}-2)\,\text{ما}=0$$

کی حقیقی ندرت ہے لیکن یہ کہ تمام تکملے لوکارتموں سے پاک ہیں - [قوت نمائی مساوات کی اصلیں - ۱ اور ۲ ہیں - چھوٹی اصل سے ۱ غیر متعین حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۹۹) - محصلہ لامتناہی سلسلہ کو جمع کیا جا سکتا ہے اور بالآخر

$$\text{ما}=\text{ا}\,\text{لا}^{-1}(\text{جم لا}+\text{لا جب لا})+\text{ب}\,\text{لا}^{-1}(\text{جب لا}-\text{لا جم لا})$$

حاصل ہوتا ہے -]

۱۷۵ - فوشی نمونہ کی مساواتیں

- مبدا کے سوا دوسرے نقطوں پر بحث کرنے میں ہم متغیر کو تبدیل کرتے ہیں چنانچہ لا = لا - ا یا لا = لا$^{-1}$ رکھتے ہیں بموجب اس کے کہ زیر بحث نقطہ محدود نقطہ لا = ا ہو یا لامتناہی پر کا نقطہ لا = ∞ -

اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مساوات (۱) میں تفاعل ف اور ق ہر محدود نقطے پر اِلّا چند نقطوں ا، ب، ج، ...... کے کُل شکلی ہوں تو نقطے ا، ب، ج، .... ہی صرف ممکن محدود نادر نقطے ہوں گے۔ اِس طرح ہم اِن نقطوں کو صرف معائنہ سے یہ دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں کہ کہاں ف اور ق متغیر کی تبدیلی کے بغیر کُل شکلی نہیں ہیں مثلاً اگر

$$ف = \frac{لا + ۲}{لا(لا - ۳)} \quad اور \quad ق = \frac{لا + ۱۰}{لا^{۲}(لا - ۳)(لا - ۴)^{۳}}$$

تو ممکن محدود نادر نقطے صرف لا = ۰، ۳، ۴ سے حاصل ہوتے ہیں۔

اِس کے علاوہ اگر یہ امتحان کرنا ہو کہ آیا کوئی نادر نقطہ لا = ا باقاعدہ ہے یا نہیں تو صرف یہ دیکھنا ہو گا کہ آیا (لا - ا) ف اور $(لا - ا)^{۲}$ ق دونوں لا = ا پر کُل شکلی ہیں - اوپر کی مثال میں صفر اور ۳ باقاعدہ نادر نقطے ہیں لیکن ۴ بے قاعدہ ہے کیونکہ $(لا - ۴)^{۲}$ ق، لا = ۴ پر کُل شکلی نہیں ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ (لا - ۴) نسب نما میں ایک جزو ضربی ہے۔

(۲۱۴) لا متناہی پر کے نقطہ لا = ∞ پر متغیر کو تبدیل کر کے بحث کیجا سکتی ہے۔

اگر کسی مساوات کے (جس کے سر ہر جگہ ایکساں ہوں) تمام نادر نقطے باقاعدہ ہوں تو مساوات کو فوشی نمونہ کی مساوات کہتے ہیں۔

حل طلب مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ زائد ہندسی مساوات

$$لا(۱ - لا)\, ی_{۲} + \{ج - (ا + ب + ۱)\, لا\}\, ی_{۱} - اب\, ی = ۰$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۰، ۱ اور ∞ ہیں جو باقاعدہ ہیں۔

(۲) ثابت کرو کہ لیجنڈر کی مساوات

$$(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\, \text{ما}'' - \text{۲}\,\text{لا}\,\text{ما}' + \text{ن}\,(\text{ن} + \text{۱})\,\text{ما} = \text{۰}$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۱، -۱، اور ∞ ہیں جو باقاعدہ ہیں۔

(۳) ثابت کرو کہ بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{ما}'' + \text{لا}\,\text{ما}' + (\text{لا}^{\text{۲}} - \text{ن}^{\text{۲}})\,\text{ما} = \text{۰}$$

کے لیے نادر نقطے صرف ۰ اور ∞ ہیں جن میں سے پہلا باقاعدہ ہے لیکن دوسرا نہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ریمان کی ف مساوات

$$\text{ما} = \text{ف}\left\{\begin{matrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \\ \text{عہ} & \text{بہ} & \text{جہ} & \text{لا} \\ \text{عہَ} & \text{بہَ} & \text{جہَ} & \end{matrix}\right\}$$

یعنی

$$\text{ما}'' + \Sigma\left(\frac{\text{۱} - \text{عہ} - \text{عہَ}}{\text{لا} - \text{ا}}\right)\text{ما}' + \left\{\Sigma\,\frac{\text{عہ}\,\text{عہَ}\,(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})}{\text{لا} - \text{ا}}\right\} \times \frac{\text{ما}}{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})} = \text{۰}$$

کے لیے ا، ب، ج باقاعدہ نادر نقطے ہیں اور باقی دوسرے سب نقطے بشمول ∞ معمولی نقطے ہیں بشرطیکہ $\text{عہ} + \text{عہَ} + \text{بہ} + \text{بہَ} + \text{جہ} + \text{جہَ} = \text{۱}$۔
متغیر کو تبدیل کر کے ثابت کرو کہ نقطہ ا کے متناظر قوت نمائی مساوات کی اصلیں عہ اور عہَ ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ مثالوں ۱، ۲، اور ۴ کی مساواتیں فوشی نمونہ کی ہیں لیکن مثال ۳ اِس نمونہ کی نہیں ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات فوشی نمونہ کی ہے:

$$\text{ما}_{۲} + \frac{\text{ف}}{\text{سا}}\,\text{ما}_{۱} + \frac{\text{ق}}{\text{سا}^{۲}}\,\text{ما} = ۰$$

جہاں سا خطی اجزا (لا - ا)، (لا - ب)، (لا - ج)، ... کی کسی تعداد (فرض کرو ن) کا حاصل ضرب ہے جن میں سے کوئی دو مساوی نہیں ہیں، اور ف اور ق، لا کے کثیر رقمی ہیں جن کے درجے علی الترتیب (ن - ۱) اور (ن - ۲) سے بڑے نہیں ہیں۔

۱۷۶ - ممیز نمایندہ - مساوات

$$\text{ما}_{۲} + \text{لا}^{-\text{لہ}}\,\text{ف}(\text{لا})\,\text{ما}_{۱} + \text{لا}^{-\text{مہ}}\,\text{ق}(\text{لا})\,\text{ما} = ۰$$

پر غور کرو جہاں لہ اور مہ مثبت صحیح عدد ہیں یا صفر، اور ف اور ق لا کے کُل شکلی تفاعل ہیں جو صفر نہیں ہوتے جبکہ لا = ۰ -

اگر ہم اِس کو فرابینس کے طریقہ سے حل کرنے کی سعی کریں تو ما کی بجائے لا کی قوتوں کے ایک سلسلہ کو (جو لا^ع سے شروع ہو) درج کرنے اور تفرقی مساوات کی دائیں جانب سے جو نتیجہ حاصل ہو اُس میں لا کی کم ترین قوت کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے (۲۱۵) قوت نمائی مساوات حاصل ہو گی۔ اِس کی پہلی، دوسری اور تیسری رقموں سے لا کی کم ترین قوتیں علی الترتیب ع - ۲، ع - لہ - ۱، اور ع - مہ ہونگی۔ تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

(۱) اگر اِن میں سے پہلا عدد باقی دو میں سے کسی سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات دوسرے درجہ کی ہو گی۔

(۲) اگر اِن میں سے دوسرا عدد پہلے سے کم لیکن تیسرے سے بڑا نہیں ہے تو قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی ہو گی۔ (دیکھو مثال ۲ اور ۴ صفحہ ۲۳۳)۔

(۳) اگر اِن میں سے تیسرا عدد سب سے کم ہو تو قوت نمائی

مساوات کا درجہ صفر ہو گا۔ (دیکھو صفحہ ۲۳۲ مثال ۲)

پہلی صورت (۱) میں ل > ۱ اور م > ۲، اس لیے فوش کے مسئلہ کی رُو سے دو باقاعدہ تکملے ہونے چاہئیں۔

دوسری صورت (۲) میں ایک باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے۔ لیکن اگر حاصل شدہ واحد سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متسع ہو (جیسا اکثر ہوتا ہے، دیکھو مثال ۴ صفحہ ۲۳۳) تو کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہو گا۔

تیسری صورت (۳) میں کوئی سلسلہ نہیں ہے اور اس لیے کوئی باقاعدہ تکملہ بھی نہیں ہے۔

ممیز نمایندہ وہ عدد ہے جو اُس صورت کو تعبیر کرتا ہے جو پیدا ہوتی ہے اگر ابتدا، صفر سے کی جائے چنانچہ صورت (۱) کے لیے صفر، صورت (۲) کے لیے (۱)، اور صورت (۳) کے لیے (۲) اس تعریف کو اور قوت نمائی مساوات کے بڑے سے بڑے ممکن درجہ کی بحث کو بڑی آسانی سے کسی رتبہ کی مساواتوں پر اطلاق پذیر کیا جا سکتا ہے چنانچہ حسب ذیل نتیجہ برآمد ہوتا ہے: رتبہ م اور ممیز نمایندہ ر کی **ایک خطی تفرقی مساوات کے باقاعدہ تکملے م - ر سے زیادہ نہیں ہو سکتے۔**

۱۷۷۔ طبعی اور تحت طبعی تکملے۔ دفعہ ۱۰۰ میں یہ معلوم ہوا تھا کہ فرابنیس کا طریقہ ایک ایسا تکملہ دریافت کرنے میں ناکام رہا جس کا ایک جزو ضربی $e^{1/x}$ ہو۔ یہ طبعی تکملہ کی ایک مخصوص صورت ہے جس کی یہ تعریف کیجاتی ہے کہ وہ شکل e^{Q} ی کا ہوتا ہے جہاں ی $\frac{1}{x}$ کا ایک کثیر رقمی ہے (سادہ ترین صورت میں یہ تفاعل $\frac{1}{x}$ کا

ایک عددی ضعف ہوتا ہے اور ع، لا کا ایک ایسا تفاعل ہے جیسا کہ باقاعدہ تکملہ میں واقع ہوتا ہے۔ تحت طبعی تکملوں اور طبعی تکملوں میں صرف یہ فرق ہے کہ اول الذکر میں لا کی بجائے اس کا جذر المربع ہوتا ہے (یا اس کا جذر الکعب یا اس سے اعلیٰ جذر جبکہ تفرقی مساواتیں دوسرے رتبہ سے اعلیٰ رتبہ کی ہوں)۔

طبعی اور تحت طبعی تکملوں کو حاصل کرنے کا طریقہ حسب ذیل مثالوں میں بتلایا گیا ہے:

مثال (۱) $\text{ما}_۲ - ۲\,\text{لا}^{-۱}\,\text{ما}_۱ + \text{لا}^{-۴}(-۴ + ۲\,\text{لا}^۲)\,\text{ما} = ۰$ ...... (۱)

یہاں توت نمائی مساوات کی کوئی اصلیں نہیں ہیں اور اس لیے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں (یعنی ممیز نمائندہ ۲ ہے)۔ اس کی وجہ ما کے سر میں رقم $-۴\,\text{لا}^{-۴}$ کی موجودگی ہے۔

(۲۱۶) رکھو $\text{ما} = \text{فو}^{\text{ی}}\,\text{ع}$

تو $\text{ما}_۱ = \text{فو}^{\text{ی}}(\text{ع}_۱ + \text{ی}_۱\text{ع})$، $\text{ما}_۲ = \text{فو}^{\text{ی}}\{\text{ع}_۲ + ۲\,\text{ی}_۱\text{ع}_۱ + (\text{ی}_۱^۲ + \text{ی}_۲)\,\text{ع}\}$

مساوات (۱) $\text{فو}^{\text{ی}}$ سے تقسیم کرنے کے بعد

$$\text{ع}_۲ + (-۲\,\text{لا}^{-۱} + ۲\,\text{ی}_۱)\,\text{ع}_۱ + (-۴\,\text{لا}^{-۴} + ۲\,\text{لا}^{-۲} - ۲\,\text{لا}^{-۱}\,\text{ی}_۱ + \text{ی}_۱^۲ + \text{ی}_۲)\,\text{ع} = ۰ \quad (۲)$$

میں مستحیل ہوتی ہے۔

رقم $-۴\,\text{لا}^{-۴}$ کو خارج کرنے کے لیے $\text{ی}_۱$ کو $\text{ا}\,\text{لا}^{-۲}$ لو جہاں $\text{ا} = \pm ۲$ تو مساوات (۲)

$$\text{ع}_۲ + (-۲\,\text{لا}^{-۱} + ۲\,\text{ا}\,\text{لا}^{-۲})\,\text{ع}_۱ + (۲\,\text{لا}^{-۲} - ۴\,\text{ا}\,\text{لا}^{-۳})\,\text{ع} = ۰$$

ہو جاتی ہے جس کا ممیز نمائندہ ہے -۱ اسلیئے ایک باقاعدہ تکملہ ہو سکتا ہے۔ اس کو معلوم کرنے کے لیے فرابنیس کا طریقہ استعمال کیا جائے تو ا کی دونوں

قیمتوں کے لیے سادہ نتیجہ ع = لا^{۲} حاصل ہوتا ہے۔ قوت نما جزو ضربی سے ضرب دینے پر آخر الامر دو طبعی تکملے لا^{۲} قو$^{\frac{۲}{\text{لا}}}$ اور لا^{۲} قو$^{\frac{۲}{\text{لا}}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

مثال (۲) ما$_{۲}$ + ۴ لا$^{-۲}$ ما$_{۱}$ + لا$^{-۶}$ (-۴ + ۲ لا^{۲} - ۴ لا^{۳}) ما = ۰

یہاں بھی کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں۔ مثال (۱) کی طرح عمل کرنے سے

ع$_{۲}$ + (۴ لا$^{-۲}$ + ۲ ی$_{۱}$) ع$_{۱}$ + (-۴ لا$^{-۶}$ + ۲ لا$^{-۴}$ - ۴ لا$^{-۳}$ + ۴ لا$^{-۲}$ ی$_{۱}$

+ ی$_{۱}^{۲}$ + ی$_{۲}$) ع = ۰

رقم -۴ لا$^{-۶}$ کو خارج کرنے کے لیے ی$_{۱}$ میں رقم ب لا$^{-۳}$ کا موجود ہونا فرض کرو جہاں ب = ± ۲۔ اگر ی$_{۱}$ = ا لا$^{-۲}$ + ب لا$^{-۳}$ تو ع کے سر میں لا$^{-۵}$ والی کوئی رقم نہیں ہوگی بشرطیکہ ا کو ایسا منتخب کیا گیا ہو کہ ۴ ب + ۲ ا ب = ۰ یعنی ا = -۲۔

انتخاب ی$_{۱}$ = -۲ لا$^{-۲}$ + ۲ لا$^{-۳}$ سے مساوات

ع$_{۲}$ + ۴ لا$^{-۳}$ ع$_{۱}$ - ۴ لا$^{-۴}$ ع = ۰

حاصل ہوگی جس کا ایک باقاعدہ تکملہ ع = لا ہے۔

دوسرے انتخاب ی$_{۱}$ = -۲ لا$^{-۲}$ - ۲ لا$^{-۳}$ سے مساوات

ع$_{۲}$ - ۴ لا$^{-۳}$ ع$_{۱}$ + ۸ لا$^{-۴}$ ع = ۰

حاصل ہوگی۔ اِس کا کوئی باقاعدہ تکملہ نہیں ہے کیونکہ صرف سلسلہ

لا^{۲}(۱ + $\frac{۱}{۴}$ لا^{۲} + $\frac{۳ \times ۱}{۴^{۲}}$ لا^{۴} + $\frac{۵ \times ۳ \times ۱}{۴^{۳}}$ لا^{۶} + ...)

حاصل ہوتا ہے جو متسع ہے۔

پس ابتدائی مساوات کا ایک طبعی تکملہ $لا\,و^{(۲لا^{-۱}-لا^{-۲})}$ ہے۔

مثال (۳) $ما_۲ + لا^{-۲}(-۱+۳لا)\,ما_۱ + لا^{-۲}\,ما = ۰$۔

یہاں ممیز نمایندہ ا ہے۔ قوت نمائی مساوات پہلے درجہ کی ہے لیکن (جیساکہ مثال ۴ صفحہ ۲۳۳ میں بتایا گیا ہے) محصلہ سلسلہ متبع ہے۔ حسب سابق عمل کرنے پر

$$ع_۲ + (-لا^{-۲} + ۳لا^{-۱} + ۲ی_۱)\,ع_۱ + \{لا^{-۲} + (-لا^{-۲} + ۳لا^{-۱})\,ی_۱ + ی_۱^۲ + ی_۲\}\,ع = ۰$$

چونکہ ابتدائی مساوات میں تکلیف دہ رقم ما۱ کے سر میں $لا^{-۲}$ تھی اور ما کا سر صرف ایسا تھا جو تکملوں کے باقاعدہ ہونے کی صورت میں واقع ہوتا ہے اِس لیے شائد یہ مناسب معلوم ہوگا کہ ع کے سر کو $ی_۱ = \frac{۱}{۲}لا^{-۲}$ لیکر سادہ بنایا جاسکتا ہے۔ لیکن اِس کی وجہ سے ع کے سر میں $لا^{-۴}$ میں ایک رقم داخل ہوگی اور ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جس کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہوں گے۔

فرض کرو کہ ہم دوسری مساوات کو جس کا ممیز نمایندہ ا ہو اِس امید میں حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ متناظر سلسلہ شاید مستدق ہو۔ رکھو $ی_۱ = ا\,لا^{-۲}$، ع کا سر $لا^{-۴}$ والی رقموں سے پاک ہوگا اگر $ا^۲ - ا = ۰$ یعنے (۲۱۷)
$ا = ۰$ یا ۱۔ لیکن $ا = ۰$ سے ابتدائی مساوات حاصل ہوتی ہے اور $ا = ۱$ سے مساوات

$$ع_۲ + (۳لا^{-۱} + لا^{-۲})\,ع_۱ + (لا^{-۲} + لا^{-۳})\,ع = ۰$$

ملتی ہے جس کا باقاعدہ تکملہ ع = لا^۱ ہے اور اِس لیے طبعی تکملہ ا = لا^-۱ و لا^-۱ حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۴) ع۲ + ۱/۲ لا^-۱ ع۱ ـ لا^-۴ ع = ۰

اِس مساوات کے کوئی باقاعدہ تکملے نہیں ہیں حسب سابق عمل کرنے سے

ع۲ + (۱/۲ لا^-۱ + ۲ ی۱) ع۱ + (ـ لا^-۳ + ۱/۲ لا^-۱ ی۱ + ی۱^۲ + ی۲) ع = ۰

ـ لا^-۳ کو خارج کرنے کے لیے ی۱ = ک لا^-۳/۲ لو جہاں ک = ±۱

اِس سے ع۲ + (۱/۲ لا^-۱ + ۲ک لا^-۳/۲) ع۱ ـ ک لا^-۵/۲ ع = ۰،

ع = لا^ج ∞∑ ان لا^ن/۲ ایک تکملہ ہوگا اگر

ا۰ (۲ک ج ـ ک) = ۰، اِس لیے ج = ۱/۲

ا۱ {۲ک (ج + ۱/۲) ـ ک} + ا۰ {ج (ج ـ ۱) + ۱/۲ ج} = ۰

یعنے ک ا۱ + ۰ = ۰، اِس لیے ا۱ = ۰

اسی طرح ان = ۰، ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو اس سے بڑی ہیں، اسلیے ع = لا^۱/۲

ابتدائی مساوات کے دو تحت طبعی تکملے

لا^۱/۲ و^-۲لا^-۱/۲ اور لا^۱/۲ و^۲لا^-۱/۲

ہیں۔

حل طلب مثالیں

حسبِ ذیل مساواتوں (۱) تا (۵) کے تحت طبعی تکملے معلوم کرو۔

(۱) $\text{ما}_2 + 2\,\text{لا}^{-1}\text{ما}_1 - \text{لا}^{-4}\,\text{ما} = 0$، [جواب: $\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$، $\text{و}^{-\frac{1}{\text{لا}}}$]

(۲) $\text{ما}_2 + \text{لا}^{-1}\text{ما}_1 + \text{لا}^{-4}\left(1 - \frac{1}{4}\text{لا}^{2}\right)\text{ما} = 0$،

[جواب: $\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\,\text{و}^{\frac{\text{ع}}{\text{لا}}}$، $\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\,\text{و}^{-\frac{\text{ع}}{\text{لا}}}$ یا $\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\,\text{جم}\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)$، $\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\,\text{جب}\left(\frac{1}{\text{لا}}\right)$]

(۳) $\text{ما}_2 + \text{لا}^{-2}\left(-2 + \text{لا}\right)\text{ما}_1 + \text{لا}^{-4}\left(1 + \text{لا} - \text{لا}^{2} + \text{لا}^{4}\right)\text{ما} = 0$

[جواب: ع $\text{و}^{-\frac{1}{\text{لا}}}$، و $\text{و}^{-\frac{1}{\text{لا}}}$ جہاں ع اور و سے وہی مراد ہے جو صفحہ ۲۲۷ پر ہے]

(۴) $\text{ما}_2 - \frac{1}{2}\text{لا}^{-1}\text{ما}_1 - 4\,\text{لا}^{-3}\,\text{ما} = 0$

[جواب: $\text{لا}\left(1 + \frac{1}{4}\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\right)\text{و}^{-4\,\text{لا}^{-\frac{1}{2}}}$، $\text{لا}\left(1 - \frac{1}{4}\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\right)\text{و}^{4\,\text{لا}^{-\frac{1}{2}}}$]

(۵) $\text{ما}_2 - \text{لا}^{-4}\left(1 + 5\,\text{لا}^{2}\right)\text{ما} = 0$

[جواب: $\text{لا}^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\text{لا}^{2}\right)\text{و}^{\frac{1}{2}\text{لا}^{-2}}$، $\text{ی} = -\frac{1}{2}\text{لا}^{-2}$ سے متسع سلسلہ حاصل ہوتا ہے]

(۶) اندراج $\text{لا} = \frac{1}{\text{ل}}$ سے صفر رتبہ کی بیسل کی مساوات کو مستحیل کرو اور استحالہ شدہ مساوات کے طبعی تکملے معلوم کرنے کی کوشش کرو۔ ثابت کرو کہ محصلہ سلسلے متسع ہیں۔ ابتدائی متغیر کی طرف رجوع کر کے سلسلہ

$$\text{e}^{-\text{خ لا}}\ \text{لا}^{-\frac{۱}{۲}}\left\{۱-\frac{۱^۲}{\text{۸ خ لا}}+\frac{۱^۲\times۳^۲}{\underline{|۲}\,(\text{۸ خ لا})^۲}-\frac{۱^۲\times۳^۲\times۵^۲}{\underline{|۳}\,(\text{۸ خ لا})^۳}+\cdots\right\}$$

اور اِس کے مشابہ سلسلہ جس میں خ کی علامت بدلی ہوئی ہو حاصل کرو۔

[بیسل کی مساوات کی استحالہ شدہ شکل مثال ۱ صفحہ کے جواب میں دی گئی ہے۔

یہ سلسلے اگرچہ متسع ہیں لیکن بہت کارآمد ہیں۔ اِن کو متقاربی سلسلے کہتے ہیں۔ لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لیے جو کافی بڑی ہو اِن سلسلوں سے ایک تقرب حاصل ہوتا ہے جس کی خطا کو مناسب طور پر کم کیا جا سکتا ہے
(۲۱۸ لیکن اِس کو لا انتہا صغیر نہیں بنایا جا سکتا۔ دیکھو وہیٹکر اور واٹسن کی کتاب "Modern Analysis" چوتھا اڈیشن دفعات ۱ء۸ تا ۲ء۳، ۸ اور ۵ء۱۷]

(۷) وہیٹیکر کی مجتمع زائد ہندسی مساوات

$$\text{ما}_۲+\left(-\frac{۱}{۴}+\frac{\text{ک}}{\text{لا}}+\frac{\frac{۱}{۴}-\text{م}^۲}{\text{لا}^۲}\right)\text{ما}=۰$$

سے سلسلہ (مثال ۲ کے عمل سے)

$$\text{e}^{-\frac{۱}{۲}\text{لا}}\ \text{لا}^{\text{ک}}\left[۱+\sum_{\text{ر}=۱}^{\infty}\frac{\left\{\text{م}^۲-\left(\text{ک}-\frac{۱}{۲}\right)^۲\right\}\left\{\text{م}^۲-\left(\text{ک}-\frac{۳}{۲}\right)^۲\right\}\cdots\left\{\text{م}^۲-\left(\text{ک}-\text{ر}+\frac{۱}{۲}\right)^۲\right\}}{\underline{|\text{ر}}\ \text{لا}^{\text{ر}}}\right]$$

حاصل کرو۔

[یہ سلسلہ عام طور پر اُس تفاعل کا متقاربی پھیلاؤ ہے جو $\text{ط}_{\text{ک،م}}(\text{لا})$ سے تعبیر کیا جاتا ہے، لیکن اگر $(\text{ک}-\frac{۱}{۲}\pm\text{م})$ ایک مثبت صحیح عدد ہو تو یہ سلسلہ مختتم ہوتا ہے اور ایک تکملہ محدود رقموں میں حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا سلسلہ $\text{ط}_{-\text{ک،م}}(-\text{لا})$، سلسلہ $\text{ط}_{\text{ک،م}}(\text{لا})$ سے ک اور لا کی علامتیں بدل کر حاصل

کیا جا سکتا ہے۔]

۱۷۸ — مرتعش ڈوریوں کی مساوات - یہ مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2}\ \text{،} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ہے جہاں ا ایک مستقل ہے۔

رکھو $\text{ﻻ} = \text{لا} - \text{ا ت}$ ، $\text{ٹ} = \text{لا} + \text{ا ت}$

تو
$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ﻻ}}\,\frac{\text{جف ﻻ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\,\frac{\text{جف ٹ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ﻻ}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}$$

اور
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right) = \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف ﻻ}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ٹ}}\right)\left(\frac{\text{جف و}}{\text{جف ﻻ}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\right) = \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ﻻ}^2} + 2\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ﻻ جف ٹ}} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ٹ}^2}$$

اسی طرح
$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ﻻ}}\,\frac{\text{جف ﻻ}}{\text{جف ت}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\,\frac{\text{جف ٹ}}{\text{جف ت}} = \text{ا}\left(-\frac{\text{جف و}}{\text{جف ﻻ}} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ٹ}}\right)$$

اور
$$\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ت}^2} = \text{ا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ﻻ}^2} - 2\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ﻻ جف ٹ}} + \frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ٹ}^2}\right)$$

مساوات (۱) میں مندرج کرنے پر

$$4\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف ﻻ جف ٹ}} = 0$$

جس سے $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$ = فہ (ت)

اور و = ف (لا) + ∫ فہ (ت) فرت

یا و = ف (لا) + فا (ت)

یعنی و = ف (لا - ا ت) + فا (لا + ا ت) ....(۲)

جہاں ف اور فا اختیاری تفاعل ہیں۔

(۲۱۹ ف (لا - ا ت) نہیں بدلتا اگر لا میں اک کا اور ت میں ک کا اضافہ کیا جائے اس لیے اس سے ایک موج تعبیر ہوتی ہے۔ جو محور لا کی مثبت سمت پر رفتار ا سے حرکت کرتی ہے۔ اسی طرح فا (لا + ا ت) سے ایک موج تعبیر ہوتی ہے جو اسی خط پر اسی رفتار سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو حل کرنے کا دوسرا طریقہ یہ ہے کہ دفعہ ۱۴۵ میں بیان کردہ عام نتیجہ کو استعمال کیا جائے اور لا، ما، ی کی بجائے علی الترتیب ت، لا، و کو رکھا جائے۔ مساوات کو

$$\left(\frac{\text{جف}^2}{\text{جف ت}^2} - \text{ا}^2 \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا}^2}\right) \text{و} = ۰$$

یا

$$(\text{عف}^2 - \text{ا}^2 \text{عف}'^2)\ \text{و} = ۰$$

لکھنے سے امدادی مساوات م² - ا² = ۰ حاصل ہو گی جس کی اصلیں -ا، ا ہیں اور اس سے

و = ف (لا - ا ت) + فا (لا + ا ت)

حسب سابق حاصل ہو گا۔

۱۷۹ — موج کی مساوات کے خاص حل۔ مساوات

$$\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2}+\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ی}^2}=\frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ت}^2}\ ،\ \ldots\ldots(۳)$$

ہے جہاں ا ایک مستقل ہے۔ یہ ایک بُعدی مساوات (۱) کی سہ بُعدی نظیر ہے۔ فرض کرو کہ ہم (۲) کے مشابہ حل معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں لیکن لا، ت کی بجائے لا، ما، ی، ت کے ساتھ۔

رکھو

$$\text{و}=\text{ف}\,(\text{ل لا}+\text{م ما}+\text{ن ی}-\text{ا ت})+\text{فا}\,(\text{ل لا}+\text{م ما}+\text{ن ی}+\text{ا ت})\ \ldots\ldots(۴)$$

جہاں ل، م، ن مستقل ہیں۔ مساوات (۳) پوری ہوتی ہے اگر

$$\text{ل}^2+\text{م}^2+\text{ن}^2=1$$

اِس صورت میں ل، م، ن، ایک خاص خط کے حقیقی سمتی جیوب التمام ہیں۔ پہلا تفاعل نہیں بدلتا اگر لا، ما، ی، ت میں علی الترتیب ل ا، م ا، ن ا، ا کا اضافہ کیا جائے اِس لیے اُس سے ایک مستوی موج (جس کے عماد کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں) تعبیر ہوتی ہے جو خود اپنے متوازی رفتار ا سے حرکت کرتی ہے۔ دوسرے تفاعل سے ایک متوازی موج تعبیر ہوتی ہے جو اُسی رفتار سے مخالف سمت میں حرکت کرتی ہے۔ اِس لیے مساوات (۴) مستوی موجوں کی اشاعت کو تعبیر کرتی ہے۔ یہ موج کی مساوات کا ایک خاص حل ہے۔

کرُوی موجوں کے لیے حل حاصل کرنے میں مساوات (۳) کو کرُوی قطبی محددوں میں مستحیل کیا جاتا ہے۔ یہ کام اصولاً لاپلاس کی مساوات[۱] کا استحالہ ہے چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)+\frac{1}{\text{ر}^2\,\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right)$$

۱؎ دیکھو ایڈورڈ کا "تفرقی احصاء" دفعہ ۵۳۲ یا کسی سادہ طریقہ کے لیے جس میں گاس کا مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے سکونیات تحلیلی پر کوئی کتاب۔

$$+\frac{1}{\text{ر}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{ط}}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{فہ}^{2}}=\frac{1}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}^{2}}\text{،}\quad\ldots(5)$$

اس حل کے لیے جو مبداء کے گرد تمام سمتوں میں متشاکل ہو یعنی ط اور فہ پر منحصر نہ ہو یہ مساوات

$$\frac{1}{\text{ر}^{2}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}\left(\text{ر}^{2}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}\right)=\frac{1}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}^{2}}\text{،}\quad\ldots\ldots(6)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

استحالہ $\text{ع}=\text{ر}\,\text{و}$ سے

$$\frac{\text{جف}\,\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ر}}=\text{و}+\text{ر}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}$$

اور

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ر}^{2}}=2\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}+\text{ر}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ر}^{2}}=\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}\left(\text{ر}^{2}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}\right)$$

اس لیے مساوات (۶) کو ر سے ضرب دینے کے بعد وہ

$$\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ر}^{2}}=\frac{1}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{جف}^{2}\,\text{ع}}{\text{جف}\,\text{ت}^{2}}$$

ہو جاتی ہے جس سے

$$\text{ع}=\text{ف}\,(\text{ر}-\text{ا}\,\text{ت})+\text{فا}\,(\text{ر}+\text{ا}\,\text{ت})$$

یعنی

$$\text{و}=\frac{1}{\text{ر}}\left\{\text{ف}\,(\text{ر}-\text{ا}\,\text{ت})+\text{فا}\,(\text{ر}+\text{ا}\,\text{ت})\right\}\text{،}\quad\ldots\ldots(7)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اِس سے دو کروی موجیں تعبیر ہوتی ہیں جن کی رفتار وہی ا ہے اور اِن میں سے ایک مبداء سے پرے ہٹتی جاتی ہے اور دوسری مبداء کے قریب آتی جاتی ہے۔ جزو ضربی $\frac{1}{\text{ر}}$ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خلل کی شدت گھٹتی ہے جبکہ مبداء سے فاصلہ بڑھتا ہے۔

۱۸۰ — پوائسن (یا لیوولی) کا عام حل۔ اِس سے

بوقت ت نقطہ ف پر و کی قیمت، تفاعلوں گ اور گ (فرض کرو) کی اوسط قیمتوں کی رقوم میں جن کو ایک کرہ پر لیا گیا ہو حاصل ہوتی ہے جہاں کرہ کا مرکز ف اور اس کا متغیر نصف قطر ا ت ہے اور گ، گ ایسے تفاعل ہیں جن سے علی الترتیب و اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}}$ کی قیمتیں فضا، کے کسی نقطہ پر حاصل ہوتی ہیں جبکہ ت = ۰ ۔

ف کو مبدا، مانکر کروی قطبی محدد لو ۔

اب ایک تفاعل ف (ر، ط، فہ، ت) کی اوسط قیمت ف̄ جو نصف قطر ر کے ایک کرہ پر لی گئی ہو

$$\bar{\text{ف}} = \frac{1}{\text{۴}\pi\,\text{ر}^{2}} \int_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi}\int_{\text{۰}}^{\pi} \text{ف ر}^{2}\,\text{جب ط فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{\text{۴}\pi} \int_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi}\int_{\text{۰}}^{\pi} \text{ف جب ط فرط فرفہ}$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

موج کی مساوات (۵) کی ہر رقم کی اوسط قیمت کو نصف قطر ر کے ایک کرہ پر لو، دوسری رقم ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{\text{۴}\pi} \int_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi}\int_{\text{۰}}^{\pi} \frac{1}{\text{ر}^{2}} \frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right)\text{فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{\text{۴}\pi\,\text{ر}^{2}} \int_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi} \left[\text{جب ط}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ط}}\right]_{\text{۰}}^{\pi}\text{فرفہ}$$

اور تیسری رقم ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{\text{۴}\pi} \int_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi}\int_{\text{۰}}^{\pi} \frac{1}{\text{ر}^{2}\,\text{جب ط}} \frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف فہ}^{2}}\,\text{فرط فرفہ}$$

$$= \frac{1}{\text{۴}\pi\,\text{ر}^{2}} \int_{\text{۰}}^{\pi} \left[\frac{1}{\text{جب ط}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف فہ}}\right]_{\text{۰}}^{\text{۲}\pi}\text{فرط}$$

دونوں صفر ہیں کیونکہ دونوں حدود بر حیب ط معدوم ہوتا ہے۔
اور فہ = ۲ π سے $\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{فہ}}$ کی وہی قیمت حاصل ہوتی ہے جو فہ = ۰ سے (جو فی الواقع وہی محل ہے)۔ مساوات (۵) کی پہلی اور چوتھی رقمیں معدوم نہیں ہوتیں۔ اِن سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{ر}^2}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}\left(\text{ر}^2\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ر}}\right) = \frac{1}{\text{ا}^2}\,\frac{\text{جف}^2\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}^2} \quad \ldots\ldots (8)$$

اِس لیے

$$\text{ر}\,\text{و} = \text{ف}(\text{ر} - \text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}(\text{ر} + \text{ا}\,\text{ت}) \quad \ldots\ldots (9)$$

$$= \text{ف}(-\text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}(\text{ا}\,\text{ت}) + \text{ر}\left\{\text{ف}'(-\text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}'(\text{ا}\,\text{ت})\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\text{ر}^2\left\{\text{ف}''(-\text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}''(\text{ا}\,\text{ت})\right\} + \ldots\ldots (10)$$

اگر ت کی تمام قیمتوں کے لیے مبدا (ر = ۰) پر و محدود ہو تو

$$\text{ف}(-\text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}(\text{ا}\,\text{ت}) = 0.$$

$$\text{ف}'(-\text{ا}\,\text{ت}) = \frac{\text{فر}\,\text{ف}(-\text{ا}\,\text{ت})}{\text{فر}(-\text{ا}\,\text{ت})} = -\frac{\text{فر}\{-\text{فا}(\text{ا}\,\text{ت})\}}{\text{فر}(\text{ا}\,\text{ت})} = \text{فا}'(\text{ا}\,\text{ت})$$

پس مساوات (۱۰) سے

$$\text{و}_0 = \text{ف}'(-\text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}'(\text{ا}\,\text{ت}) = 2\,\text{فا}'(\text{ا}\,\text{ت}) \quad \ldots (11)$$

جہاں لاحقہ صفر اُس نتیجہ کو تعبیر کرتا ہے جو ر = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے
مساوات (۹) سے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}(\text{ر}\,\text{و}) = \text{ف}'(\text{ر} - \text{ا}\,\text{ت}) + \text{فا}'(\text{ر} + \text{ا}\,\text{ت})$$

اور

$$\text{ر}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}} = -\text{ا}\,\text{ف}'(\text{ر} - \text{ا}\,\text{ت}) + \text{ا}\,\text{فا}'(\text{ر} + \text{ا}\,\text{ت})$$

اِس لیے

$$2\,\text{فا}'(\text{ر} + \text{ا}\,\text{ت}) = \frac{\text{جف}}{\text{جف}\,\text{ر}}(\text{ر}\,\text{و}) + \frac{\text{ر}}{\text{ا}}\,\frac{\text{جف}\,\text{و}}{\text{جف}\,\text{ت}}$$

ر اور ت کی تمام قیمتوں کے لیے ۔ ت = ۰ رکھنے اور ابتدائی شرطوں کو استعمال کرنے سے

$$۲\, فاَ (ر) = \frac{جف}{جف\, ر} (ر گ) + \frac{ر \bar{گ}}{ا}$$

اِس لیے ر کو خاص قیمت ا ت دینے اور مساوات (۱۱) کو استعمال کرنے سے

$$وِ = \frac{جف}{جف (ا ت)} (ا ت \bar{گ}) + ت \bar{گ}$$

لیکن وِ جو صفر نصف قطر کے کرہ پر و کی اوسط قیمت ہے صرف و ہے ۔

$$اِس لیے \quad و = \frac{جف}{جف\, ت} (ت \bar{گ}) + ت \bar{گ}$$

اِس حل کی شکل سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ بوقت ت کسی نقطہ ف پر و کی قیمت صرف اُن نقطوں پر کے ابتدائی خلل پر منحصر ہوتی ہے جو مرکز ف اور نصف قطر ا ت کے کرہ کی سطح پر واقع ہیں ۔
دھماکہ میں ابتدائی خلل بالعموم ایک ایسے علاقہ میں محدود ہوتا ہے (۲۲۲)
جو ایک بند سطح س سے گھِرا ہوا ہو ۔ اگر ف اِس سطح کے باہر ہے اور ف سے س تک کم سے کم فاصلہ د ہے تو وقت $\frac{د}{ا}$ گذرنے تک ف پر کوئی اثر پیدا نہیں ہوگا کیونکہ اِس سے پیشتر متعلقہ کرہ صرف ایسے علاقوں میں سے گزرے گا جہاں کوئی ابتدائی خلل نہیں ہے ۔ کسی وقت ت پر ناصیۂ موج (اُن نقطوں کا طریق جہاں خلل عین ابھی پہنچا ہو) ایک ایسی سطح ہے جو سطح س سے اِس کے تمام باہروار عمادوں کو فاصلہ ا ت تک خارج کرکے حاصل کی گئی ہے ۔

موج کی مساوات کے دیگر عام حل کرخوف (Kirchhoff) نے[له]

جس کے حل کی شکل علم المناظر میں اہمیت رکھتی ہے اور وہیٹکر[1] اور بیٹ میان (Bateman) نے حاصل کئے ہیں۔

حل طلب مثال

تصدیق کرو کہ موج کی مساوات کا ایک حل

و = ∫ ∫ ف (لا جب ع جم د + ما جب ع جب د + ی جم ع + ا ت، ع، د) فرع فرد

ہے جہاں تفاعل ف ایسا ہے کہ تکمل کی علامت کے تحت تفرق جائز ہیں۔ [یہ وھیٹیکر کا حل ہے]۔

۱۸۱ — ریاضیاتی طبیعات کی دیگر تفرقی مساواتیں

اِن میں

لاپلاس کی مساوات $\frac{جف^2 و}{جف لا^2} + \frac{جف^2 و}{جف ما^2} + \frac{جف^2 و}{جف ی^2} = ۰$ ،

پوائسون کی مساوات $\frac{جف^2 و}{جف لا^2} + \frac{جف^2 و}{جف ما^2} + \frac{جف^2 و}{جف ی^2} = -۴ \pi جہ ثہ$ ،

حرارت کے ایصال کی مساوات $\frac{جف^2 و}{جف لا^2} + \frac{جف^2 و}{جف ما^2} + \frac{جف^2 و}{جف ی^2} = \frac{1}{ا} \frac{جف و}{جف ت}$ ،

تیلغرافی کی مساوات $ل ک \frac{جف^2 و}{جف ت^2} + ک ر \frac{جف و}{جف ت} = \frac{جف^2 و}{جف لا^2}$ ،

اور شرڈِنگر Schrodinger کی مساوات

$$\frac{جف^2 سا}{جف لا^2} + \frac{جف^2 سا}{جف ما^2} + \frac{جف^2 سا}{جف ی^2} + \frac{۸ \pi^2 م (ط - و) سا}{ہ^2} = ۰$$

---

[1] دیکھو وہیٹیکر اور واٹسن کی کتاب Modern Analysis چوتھا ایڈیشن دفعہ ۱۸۰۶

[2] ایضاً صفحہ ۴۰۶

شامل ہیں۔ ایک مخصوص صورت میں شروڈنگر کی مساوات کا حل اِس دفعہ کے
۲۲۳ ختم پر ایک مثال میں دیا گیا ہے۔

اِن مساواتوں پر دو نقطہ ہائے نظر سے بحث کی جا سکتی ہے۔ نظری ریاضی[1] کی کتابوں میں اِن مساواتوں کے عام حلوں پر منطقی بحث کی جاتی ہے لیکن طبیعی اِس بحث کی طوالت اور اِن عام حلوں کے اطلاق کی مشکلوں سے گھبراتا ہے۔ طبیعات کی کتابوں میں حلوں کو حاصل کرنے کے لیے جو بالعموم عام ہونے کی بجائے مخصوص ہوتے ہیں منطق اور وجدان دونوں سے کام لیا جاتا ہے۔ ایسے حل ایک طبیعیاتی مفہوم رکھتے ہیں اور وہ کبھی بھی صرف منطق سے حاصل نہیں ہو سکتے۔

اِن نتیجوں کے درست ہونے میں بالعموم بہت کم شبہ ہوتا ہے لیکن کوئی ابہام خواہ وہ کتنا ہی خفیف ہو ریاضی داں کو ناگوار ہوتا ہے۔ وہ جانتا ہے کہ نظری ریاضیات میں وجدان پر بھروسہ نہیں کیا جا سکتا چنانچہ وہ اِس کے اُس قیمتی اور قابلِ اعتماد حصہ کو قدر کی نگاہ سے نہیں دیکھتا جس سے طبیعات میں کام لیا جاتا ہے۔ اِن میں سے ہر نقطۂ نظر پر طول طویل بحث کرنے کی ضرورت ہے جس کی یہاں گنجائش نہیں۔[2]

[ریاضیاتی طبیعات کی زیادہ ابتدائی مساواتوں کو اِس کتاب کے

---

[1] مثلاً گرسا کی کتاب "Cours d'Analyse Mathematique" جلد سوم

[2] ڈیکیو ریمن و ویبر کی کتاب "Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung, auf physikalische Fragen" (تازہ ترین اڈیشن میں بہت سی تبدیلیاں کی گئی ہیں اور اِس کا نام "Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik" رکھا گیا ہے)۔ جیفری کی کتاب "Operational Methods in Mathematical Physics" ہیوی سائڈ کا طریقہ

بکرڈ کی کتاب "Lecons sur Quelques Types Simples d' Equations aux Derivees Partielles avec des Applications a la Physique Mathematique."

ویبسٹر کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics."

اور بیٹمین کی کتاب "Partial Differential Equations of Mathematical Physics"

مختلف مقامات پر حل کیا گیا ہے مثلاً دیکھو صفحات ۴۳، ۵۱، ۵۲، ۶۸، ۸۸، ۹۲-۹۴ — ۱۱۹، ۳۷۳ — ۳۷۸، ۴۶۶، ۴۷۸ — ۴۹۲، ۴۹۷، ۴۹۹

حل طلب مثال

شروڈنگر کی مساوات میں ک کی بجائے $\frac{\text{ہ}}{2\pi}$ رکھ کر، و کی خاص شکل $-\frac{\text{ز}^2}{\text{ر}}$ فرض کر کے، کارٹیزی محددوں کو کروی قطبی محددوں میں تبدیل کر کے، اور سا کی بجائے $\text{ر}^{1}\text{ع}(\text{ر})\,\text{س}(\text{ط}،\text{فہ})$ رکھ کر (مقابلہ کرو دفعہ ۱۷۹ کے ساتھ) حاصل کرو

$$\left\{\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فر ر}^2} + \frac{2\text{م}}{\text{ک}^2}\left(\text{ط} + \frac{\text{ز}^2}{\text{ر}}\right)\text{ع}\right\}\text{س}$$

$$+\frac{\text{ع}}{\text{ر}^2}\left\{\frac{1}{\text{جب ط}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ط}}\left(\text{جب ط}\frac{\text{جف س}}{\text{جف ط}}\right) + \frac{1}{\text{جب}^2\text{ط}}\frac{\text{جف}^2\text{س}}{\text{جف فہ}^2}\right\} = ۰$$

$\text{ر}^{\text{ل}}\text{س}$ کو لاپلاس کی مساوات کا ایک حل لیکر (اور اِس لیے $\text{ر}^{\text{ل}+1}\text{س}$ پچھلی مساوات کا ایک حل ہوگا جبکہ م کی بجائے صفر رکھا جائے)

$$\frac{\text{فر}^2\text{ع}}{\text{فر ر}^2} + \left\{\frac{2}{\text{ک}^2}\text{م}\left(\text{ط} + \frac{\text{ز}^2}{\text{ر}}\right) - \frac{\text{ل}(\text{ل}+1)}{\text{ر}^2}\right\}\text{ع} = ۰$$

کو حاصل کرو۔

بالآخر اندراجات

$$\text{ر} = \frac{2\text{ر}}{\text{ک}}\sqrt{-2\text{م ط}}،\quad \text{ک} = \frac{\text{ز}^2}{\text{ک}}\sqrt{\frac{-\text{م}}{2\text{ط}}}$$

سے اِس کو وھٹیکر کی مجتمع زائد ہندسی مساوات (مثال ۷، دفعہ ۱۷۷ کے آخر) میں تحویل کرو جس میں ما، لا، م کی بجائے علی الترتیب ع، ر، اور $(\text{ل}+\frac{1}{2})$ ہوں۔

۱۸۲ — عددی تقرب۔ آڈم کا طریقہ۔ اب ہم آٹھویں باب کے

مضمون کی طرف رجوع کرکے ایک ایسا طریقہ بیان کرتے ہیں جس کے متعلق پروفیسر وہیٹیکر کا خیال ہے کہ وہ اُن سب طریقوں میں بہترین ہے جن کا امتحان ایڈنبرگ کے ریاضی معمل میں کیا گیا تھا۔ اختصاراً یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ ٹیلر کے مسئلہ اور ایک خاص ضابطہ کو ملا کر استعمال کرنے کے مُرادف ہے۔ یہ خاص ضابطہ ذیل میں درج ہے اور اس کا تعلق محدود فرقوں کے علم احصا سے ہے۔ ٹیلر کا مسئلہ لا کے ایسے اضافوں کے لیے استعمال کیا جاتا ہے جو اس قدر چھوٹے ہوں کہ سلسلہ بسرعت مستدق ہو جائے۔ اِس طریقہ پر ما کی چند قیمتیں (بالعموم چار) حاصل کر لینے کے بعد ہمیں اتنا مواد مل جاتا ہے کہ فرقوں کے ضابطہ سے مزید قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور لا کے بڑے اضافوں کیلیے ٹیلر کے مسئلہ کی ضرورت نہیں پڑتی۔ آخری نتیجہ میں جو خطا پیدا ہو گی اُس کی تخمین حسبِ ذیل طریقہ پر کیجا سکتی ہے۔

مثال۔ تفرقی مساوات لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ما - ۲ لا = ۰ دی گئی ہے اور ابتدائی قیمتیں لا = ۲، ما = ۲٫۵ معلوم ہیں۔ لا = ۲٫۰۵، ۲٫۱۰، ۲٫۱۵، ۲٫۲۰، ۲٫۲۵، ۲٫۳۰، ۲٫۳۵، ۲٫۴۰، ۲٫۴۵، ۲٫۵۰ کے متناظر ما کی قیمتیں معلوم کرو اور نتیجوں میں خطاؤں کے رتبہ کی تخمین کرو۔

ہم لا کے اضافہ کو ھ سے، (لا + ن ھ) کو لاؔن سے، لاؔن کے متناظر ما کی قیمت کو ماؔن سے تعبیر کریں گے۔

لا کے لحاظ سے ما کے متواتر تفرقی سروں کو مَا، مًا، مٌا، ..... سے اور ان کی ابتدائی قیمتوں کو لاحقہ صفر سے تعبیر کیا جائے گا۔

ٹیلر کے سلسلہ

$$\text{ما} = \text{با} + (\text{لا} - ۲)\,\text{بَا} + \frac{(\text{لا} - ۲)^{۲}}{\lfloor ۲}\,\text{بًا} + \frac{(\text{لا} - ۲)^{۳}}{\lfloor ۳}\,\text{مًا} + \cdots\cdots$$

میں سیروں کو معلوم کرنے کے لیے ابتدائی تفرقی مساوات میں اور اس کے متواتر تفرقی سیروں میں لا = ۲ اور ما = ۲٫۵ رکھو تو

$$\text{لا}\,\text{مَا} + \text{ما} - ۲\,\text{لا} = ۰ ، \qquad \text{بَا} = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{لا}\,\text{مًا} + ۲\,\text{مَا} - ۲ = ۰ ، \qquad \text{بًا} = ۱ - \text{بَا} = \frac{۱}{۴}$$

اور علیٰ ہذا القیاس، چنانچہ آخرالامر حاصل ہوگا

$$\text{ما} = ۲\tfrac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}(\text{لا}-۲) + \frac{۱}{۸}(\text{لا}-۲)^{۲} - \frac{۱}{۱۶}(\text{لا}-۲)^{۳}$$

$$+ \frac{۱}{۳۲}(\text{لا}-۲)^{۴} - \frac{۱}{۶۴}(\text{لا}-۲)^{۵} + \cdots \quad (۱)$$

اگر ہم اِس سلسلہ میں علی التواتر لا = ۲٫۰۵، ۲٫۱۰، ۲٫۱۵، ۲٫۲۰ رکھیں تو اِس سلسلہ کی آخری رقم کی قیمت زیادہ سے زیادہ

$$\frac{۱}{۶۴}(۰٫۲)^{۵} = ۰٫۰۰۰۰۰۵$$

ہوگی اور اس لیے ما کی متناظر قیمتیں اعشاریہ کے پانچ مقامات تک درست ہوں گی۔

اِس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ما}_{۱} = ۲٫۵۳۷۸۰ ، \quad \text{ما}_{۲} = ۲٫۵۷۶۱۹ ، \quad \text{ما}_{۳} = ۲٫۶۱۵۱۲ ، \quad \text{ما}_{۴} = ۲٫۶۵۴۵۵$$

اب ہم فرقوں کا ضابطہ[۱]

---

[۱] یہ ضابطہ اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ نیوٹن ادراجی ضابطہ

$$\text{ق}_{\text{ن}}(\text{لا}_{\text{ن}} + \text{ر}\,\text{ھ}) = \text{ق}_{\text{ن}} + \text{ر}\,\Delta\,\text{ق}_{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ر}(\text{ر}+۱)}{\lfloor ۲}\,\Delta^{۲}\,\text{ق}_{\text{ن}-۲} + \ldots$$

کو حدود صفر اور ایک کے درمیان ر کے لحاظ سے تکمل کیا جاتا ہے۔ دیکھو وہٹیکر اور رابن سن کی کتاب "Calculus of Observations" صفحہ ۳۶۵

$$\text{م}_{\text{ن}+1} - \text{م}_{\text{ن}} = \text{ق}_{\text{ن}} + \frac{1}{2}\Delta\,\text{ق}_{\text{ن}-1} + \frac{5}{12}\Delta^{2}\,\text{ق}_{\text{ن}-2} + \frac{3}{8}\Delta^{3}\,\text{ق}_{\text{ن}-3}$$

$$+ \frac{251}{720}\Delta^{4}\,\text{ق}_{\text{ن}-4} + \cdots\cdots \quad (2)$$

استعمال کرتے ہیں جہاں $\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی وہ قیمت تعبیر ہوتی ہے جبکہ لا = لان، ما = مان چنانچہ اوپر کی مثال میں

$$\text{ق}_{\text{ن}} = 0.05\left(2 - \frac{\text{مان}}{\text{لان}}\right)،$$

$\Delta\,\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\text{ق}_{\text{ن}+1} - \text{ق}_{\text{ن}}$ تعبیر ہوتا ہے

$\Delta^{2}\text{ق}_{\text{ن}}$ سے $\Delta\,\text{ق}_{\text{ن}+1} - \Delta\,\text{ق}_{\text{ن}}$ تعبیر ہوتا ہے، علیٰ ہذا القیاس۔

ن = ۵ رکھنے سے مساوات (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}_5 = \text{م}_4 + \text{ق}_4 + \frac{1}{2}\Delta\,\text{ق}_3 + \frac{5}{12}\Delta^{2}\text{ق}_2 + \frac{3}{8}\Delta^{3}\text{ق}_1$$

$$+ \frac{251}{720}\Delta^{4}\text{ق}_0 + \cdots\cdots \quad (3)$$

اب $\text{ق}_0 = 0.05\left(2 - \frac{\text{م}_0}{\text{لا}_0}\right) = 0.03750$

اسی طرح $\text{ق}_1 = 0.03810$، $\text{ق}_2 = 0.03866$، $\text{ق}_3 = 0.03918$،
$\text{ق}_4 = 0.03967$

بس $\Delta\,\text{ق}_0 = \text{ق}_1 - \text{ق}_0 = 0.00060$ اور علیٰ ہذا - اِن فرقوں کو محسوب کرنے میں عددوں کو حسب ذیل جدول کی شکل میں لکھ لینے سے سہولت پیدا ہوگی:

$Δ^4$ق	$Δ^3$ق	$Δ^2$ق	Δق	ق
				ق۰ = ۰٫۰۳۷۵۰
			۰٫۰۰۰۶۰	
		۰٫۰۰۰۰۴-		ق۱ = ۰٫۰۳۸۱۰
	۰٫۰۰۰۰۰		۰٫۰۰۰۵۶	
۰٫۰۰۰۰۱		۰٫۰۰۰۰۴-		ق۲ = ۰٫۰۳۸۶۶
	۰٫۰۰۰۰۱		۰٫۰۰۰۵۲	
		۰٫۰۰۰۰۳-		ق۳ = ۰٫۰۳۹۱۸
			۰٫۰۰۰۴۹	
				ق۴ = ۰٫۰۳۹۶۷

اب ہم اُن فرقوں کے مختلف رتبوں کی عددی قیمت کا امتحان کریں گے جو اِس جدول میں مندرج ہیں۔ Δق سے $Δ^2$ق تک گذرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ بیّن تخفیف ہے۔ لیکن $Δ^3$ق میں صرف قدرے زیادہ تخفیف ہے اور $Δ^4$ق میں تو کوئی تخفیف ہی نہیں ہے۔ اِس سے پتہ چلتا ہے کہ $Δ^3$ق اور $Δ^4$ق غیر صحیح ہیں۔ اِس لیے ہم اِن کا لحاظ نہیں کرتے اور مساوات (۳) کو تقریبی شکل میں استعمال کرتے ہیں۔

$$م_5 = م_4 + ق_4 + \frac{1}{2} Δ ق_3 + \frac{5}{12} Δ^2 ق_2$$

= ۲٫۶۵۴۵۵ + ۰٫۰۳۹۶۷ + ۰٫۰۰۰۲۵ − ۰٫۰۰۰۰۱

= ۲٫۶۹۴۴۶

سلسلہ کی صرف چار رقموں کو لینے سے جو خطا پیدا ہوتی ہے وہ آخری رقم کو رکھنے کی بہ نسبت بہت ہی خفیف ہے اور اِس لیے اعشاریہ کے پانچ مقامات تک اِس کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ اِس کے برخلاف، اگرچہ پہلی اور دوسری رقموں کی اصلی قیمتوں کا فرق اُس فرق سے جو ان کی (پانچ اعشاریہ والی) تقریبی قیمتوں کے درمیان ہے ۰٫۰۰۰۰۵ سے زیادہ نہیں ہے

(۲۲۶) لیکن یہ خطائیں، زیادہ ناموافق صورت میں، Δق میں دگنی اور Δ^{2}ق میں پھر دگنی ہو سکتی ہیں۔ اگر ما_{5} کو محسوب کرنے میں ہر رقم میں بڑی سے بڑی ممکن خطا واقع ہو اور یہ سب خطائیں ایک ہی علامت کی ہوں تو بھی ما_{5} میں بہ حیثیت مجموعی جو خطا پیدا ہوگی وہ ۰٫۰۰۰۰۲۵ سے کم ہوگی۔

اب $\text{ق}_{5} = ۰٫۰۵\left(۲ - \frac{\text{ما}_{5}}{\text{لا}_{5}}\right) = ۰٫۰۴۰۱۲$ ۔ اس کے متعلق ہم یہ بھروسہ کر سکتے ہیں کہ وہ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک صحیح ہے کیونکہ ما_{5} میں ۰٫۰۰۰۰۲۵ کی خطا، چھوٹے عدد $\frac{۰٫۰۵}{۲٫۲۵}$ سے مضروب ہوگی اور اس لیے وہ ہمارے رتبہ تقریب تک ناقابل التفات ہے۔ ق_{5} کی قیمت کو اوپر کی جدول میں درج کر کے ہم فوراً $\Delta \text{ق}_{4} = ۰٫۰۰۰۴۵$ اور $\Delta^{2} \text{ق}_{3} = ۰٫۰۰۰۰۴$ حاصل کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$\text{ما}_{6} = \text{ما}_{5} + \text{ق}_{5} + \frac{۱}{۲}\Delta \text{ق}_{4} + \frac{۵}{۱۲}\Delta^{2}\text{ق}_{3}$$

$$= ۲٫۶۹۴۴۶ + ۰٫۰۴۰۱۲ + ۰٫۰۰۰۲۲ - ۰٫۰۰۰۰۲$$

$$= ۲٫۷۳۴۷۸$$

(چونکہ $\Delta \text{ق}_{3}$ اور $\Delta \text{ق}_{4}$ دونوں کے لیے آخری ہندسہ طاق ہے اس لیے نصف کرنے میں یہ تصفیہ کرنا پڑتا ہے کہ دو مساوی طور پر اچھے پانچ اعشاروی تقربوں میں سے کون سا تقرب منتخب کیا جائے۔ ہم متبادلاً بڑے اور چھوٹے کو منتخب کرتے ہیں اور اس طرح خطاؤں کے جمع ہونے سے بچتے ہیں۔)

اس طریقہ پر عمل کر کے ہم نتیجوں کو حسب ذیل جدول میں حاصل کرتے ہیں:

ما	ق	Δق	Δ^{2}ق
$\text{ما}_{0} = ۲٫۵۰۰۰۰$	$\text{ق}_{0} = ۰٫۰۳۷۵۰$		
		۰٫۰۰۰۶۰	

ما	ق	Δق	Δ^2ق
ما$_1$ = ٢٫٥٣٧٨٠	ق$_1$ = ٠٫٠٣٨١٠		-٠٫٠٠٠٠۴
		٠٫٠٠٠٥٦	
ما$_2$ = ٢٫٥٧٦١٩	ق$_2$ = ٠٫٠٣٨٦٦		-٠٫٠٠٠٠۴
		٠٫٠٠٠٥٢	
ما$_3$ = ٢٫٦١٥١٢	ق$_3$ = ٠٫٠٣٩١٨		-٠٫٠٠٠٠٣
		٠٫٠٠٠۴٩	
ما$_4$ = ٢٫٦٥۴٥٥	ق$_4$ = ٠٫٠٣٩٦٧		-٠٫٠٠٠٠۴
		٠٫٠٠٠۴٥	
ما$_5$ = ٢٫٦٩۴۴٦	ق$_5$ = ٠٫٠۴٠١٢		-٠٫٠٠٠٠٢
		٠٫٠٠٠۴٣	
ما$_6$ = ٢٫٧٣۴٧٨	ق$_6$ = ٠٫٠۴٠٥٥		-٠٫٠٠٠٠٣
		٠٫٠٠٠۴٠	
ما$_7$ = ٢٫٧٧٥٥۴	ق$_7$ = ٠٫٠۴٠٩٥		-٠٫٠٠٠٠٣
		٠٫٠٠٠٣٧	
ما$_8$ = ٢٫٨١٦٦٨	ق$_8$ = ٠٫٠۴١٣٢		-٠٫٠٠٠٠٢
		٠٫٠٠٠٣٥	
ما$_9$ = ٢٫٨٥٨١٧	ق$_9$ = ٠٫٠۴١٦٧		
ما$_{10}$ = ٢٫٩٠٠٠١			

ماؤں کے متعلق یہ توقع کی جا سکتی ہے کہ اِن کے آخری ہندسہ میں چھوٹی خطائیں ہیں۔ واقعہ یہ ہے کہ وہ تفرقی مساوات جس کا ہم نے انتخاب کیا ہے اُس کا ٹھیک حل ما = لا + $\frac{1}{\text{لا}}$ ہے۔ اِس سے محسوب کیا جائے تو ما$_6$ میں ٠٫٠٠٠٠٢ کی خطاء اور ما$_2$، ما$_8$، ما$_9$، ما$_{10}$ میں ٠٫٠٠٠٠١ کی خطاء اور دوسروں میں کوئی خطاء معلوم نہیں ہوتی۔

اگر اِس سے زیادہ صحت مطلوب ہو تو ما$_{۱}$، ما$_{۲}$، ما$_{۳}$، ما$_{۴}$ کو اعشاریہ کے زیادہ مقامات تک محسوب کرنا چاہیئے مثلاً ۸ مقامات تک۔ طالبِ علم کو ایسا کرنا چاہیئے۔ یہ معلوم ہوگا کہ Δ ق، $\Delta^{۲}$ ق، $\Delta^{۳}$ ق، اور $\Delta^{۴}$ ق (۲۲۷)
سب کے سب قابلِ اعتماد ہیں اور اس لیے اِن کو فرقوں کے ضابطہ میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔ آخری نتیجے حسبِ ذیل ہیں:

ما$_{۰}$ =	۲٫۵۰۰۰۰۰۰۰	
ما$_{۱}$ =	۲٫۵۳۷۸۰۴۸۸	
ما$_{۲}$ =	۲٫۵۷۶۱۹۰۴۸	
ما$_{۳}$ =	۲٫۶۱۵۱۱۶۲۸	
ما$_{۴}$ =	۲٫۶۵۴۵۴۵۴۵	
ما$_{۵}$ =	۲٫۶۹۴۴۴۴۴۲	(خطا - ۲ آخری ہندسہ میں)
ما$_{۶}$ =	۲٫۷۳۴۷۸۲۵۸	(خطا - ۳ " ")
ما$_{۷}$ =	۲٫۷۷۵۵۳۱۸۸	(" - ۳ " ")
ما$_{۸}$ =	۲٫۸۱۶۶۶۶۶۱	(" - ۶ " ")
ما$_{۹}$ =	۲٫۸۵۸۱۶۳۲۳	(" - ۴ " ")
ما$_{۱۰}$ =	۲٫۸۹۹۹۹۹۹۳	(" - ۷ " ")

ما$_{۱۰}$ کو محسوب کرنے میں آخری رقم $\frac{۲۵۱}{۷۲۰}$ $\Delta^{۴}$ ق$_{۵}$ کی قیمت

۰٫۰۰۰۰۰۰۰۹ ہے۔ اِس کی مقدار سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِس دفعہ خطائیں (اعشاریہ کے پانچ مقامات کے برخلاف) غالباً اعلیٰ فرقوں کے ترک کرنے سے پیدا ہوئی ہیں۔ اِس کی تصحیح اِس طرح ہو سکتی ہے کہ یا تو ہم ما$_{۵}$ کو صحیح طور پر ٹیلر کے مسئلہ سے محسوب کریں اور $\Delta^{۵}$ ق کو استعمال کریں یا (جیسا کہ بالعموم کیا جاتا ہے) وقفہ کو اتنا گھٹا دیں کہ $\Delta^{۵}$ ق اُس رتبہ تک جہاں تک ہمیں صحت مطلوب ہے ناقابلِ قدر ہو جائے۔

۱۸۳ — دفعات ۹۰ تا ۹۳ کے طریقہ کی ریمس کی توسیع

— ای۔ ریمس (E. Remes) نے عددوں م اور مہ کیلئے جن کی تعریف دفعہ ۹۲ میں کی گئی ہے مناسب قیمتیں مقرر کرنے کا ایک منظم طریقہ[1] بیان کیا ہے:

صورت (۱) م = ف (ا، ب)، مہ = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا + ھ، ب + ھ)}، اگر

فرف/فرلا > ۰، جف ف/جف ما > ۰

صورت (۲) م = ف (ا، ب)، مہ = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا، ب)}، اگر

فرف/فرلا > ۰، جف ف/جف ما < ۰

صورت (۳) م = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا + ھ، ب - ھ)}، مہ = ف (ا، ب)، اگر

فرف/فرلا < ۰، جف ف/جف ما > ۰

صورت (۴) م = ف{ا + ھ، ب + ھ ف (ا، ب)}، مہ = ف (ا، ب)، اگر

فرف/فرلا < ۰، جف ف/جف ما < ۰

یہ قیمتیں صفحہ ۲۱۱ کی نامساواتوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) کو پورا کرتی ہیں۔ ریمس یہ کہتا ہے کہ اگر ہم ں اور ر کی تعریفیں رشتوں

ر = ½ ھ{ف (ا، ب) + ف (ا + ھ، ب + م ھ)}

ں = ½ ھ{ف (ا، ب) + ف (ا + ھ، ب + مہ ھ)}

[1] Phil. Mag., Series 7, Vol. 5, Feb. 1928.

کے ذریعہ کریں تو بھی یہ نامساواتیں دُرست رہتی ہیں جبکہ ق کی بجائے رٗ اور ق کی بجائے ر کو رکھا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ $\bar{\text{ح}}$ سے $\frac{1}{2}(\text{ع} + 2\,\text{ق})$ تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$. (۲۲۸)

لیکن $\frac{1}{2}(\text{ع} + 2\,\text{ق})$ تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$.

فرض کرو کہ $\bar{\bar{\text{ح}}}$ سے $\frac{1}{2}(2\,\text{ع} + \text{ر})$ تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جفب ف}}{\text{جفب ما}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$.

لیکن $\frac{1}{2}(2\,\text{ع} + \text{ر})$ تعبیر ہوتا ہے اگر $\frac{\text{جفب ف}}{\text{جفب ما}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$.

اب رمیس یہ ثابت کرتا ہے کہ تقربوں $\bar{\text{ح}}$ اور $\bar{\bar{\text{ح}}}$ میں خطائیں علی الترتیب کم سے کم چوتھے اور تیسرے رتبہ کی (اگر اضافہ کو پہلے رتبہ کی مقدار لیا جائے) ہوں گی اگر $\frac{\text{جفب ف}}{\text{جفب ما}}\ \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} > 0$، لیکن علی الترتیب کم سے کم تیسرے اور چوتھے رتبہ کی ہونگی اگر $\frac{\text{جفب ف}}{\text{جفب ما}}\ \frac{\text{فر ف}}{\text{فر لا}}\ \frac{\text{فر}^2\text{ف}}{\text{فر لا}^2} < 0$. - یہ نتیجہ م اور مٗ کے اُس انتخاب پر منحصر ہے جس کی صراحت اوپر کی گئی ہے۔ صفحہ ۱۰۷ کی مثال کی خطا اُس سے بہت چھوٹی ہے جس کی توقع اِس نتیجہ سے ہو سکتی تھی لیکن اس کی وجہ غالباً م اور مٗ کا اتفاقیہ اچھا انتخاب ہے جن کو اُس طریقہ سے حاصل نہیں کیا گیا تھا جو رمیس کا مجوزہ ہے۔

عام طور پر آڈمس یا کُٹّا کے طریقے زیادہ بہتر معلوم ہوتے ہیں۔

ضمیمہ ۱

(۲۹)

وہ ضروری اور کافی شرط کہ مساوات م فرلا + ن فرما = ۰ ٹھیک ہو۔

(ا) اگر یہ مساوات ٹھیک ہے تو

م فرلا + ن فرما = ایک کامل تفرقہ = فرف، فرض کرو

اس لیے $\text{م} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$ ، اور $\text{ن} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$

اس لیے $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}}$

اس لیے یہ شرط ضروری ہے۔

(ب) اس کے بالعکس، اگر $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}}$ تو رکھو ف $= \int$ م فرلا جہاں تکمل کی تکمیل اس مفروضہ پر کی گئی ہے کہ ما مستقل ہے۔

تب $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \text{م}$ اور $\frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\text{ف}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$

اس لیے $\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\text{ن} - \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\right) = 0$ ،

ن - (جف ف / جف ما) = مستقل، جہانتک کہ لا کا تعلق ہے یعنی ما کا ایک تفاعل،

= فہ (ما)، فرض کرو

تب ن = (جف ف / جف ما) + فہ (ما)

اب رکھو ف = ف + ∫ فہ (ما) فرما

تو ن = جف ف / جف ما

نیز م = جف ف / جف لا ، ف کی تعریف کی رو سے

= جف ف / جف لا ، کیونکہ ف اور ف میں صرف ما کے ایک تفاعل کا فرق ہے پس م فرلا + ن فرما = (جف ف / جف لا) فرلا + (جف ف / جف ما) فرما = فرف، ایک کامل تفرقہ۔

اِس لیے مساوات ٹھیک ہے یعنے شرط کافی ہے۔

[ہمارا مفروضہ (جف² ف / جف لا جف ما) = (جف² ف / جف ما جف لا) جائز ہے اگر ف اوراِس کے پہلے اور دوسرے تفرقی سر مسلسل ہوں۔ دیکھو لیمب کا (*Infinitesimal Calculus*) دوسرا ایڈیشن دفعہ ۲۱۰ یا تیسرا اڈیشن دفعہ ۱۹۳]۔

(۳۰

ضمیمہ ب

مساوات ف(لا، ما، ی) جفِ ف / جفِ لا + ق(لا، ما، ی) جفِ ف / جفِ ما

+ ر(لا، ما، ی) جفِ ف / جفِ ی = ۰

کے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہوتے جبکہ اِس کو چار ابعادی سمجھا گیا ہو۔

فرض کرو کہ ۶(لا، ما، ی) = ا،

و(لا، ما، ی) = ب

مساواتوں فرلا / ف = فرما / ق = فری / ر کے کوئی دو غیر تابع تکملے ہیں۔ تب آسانی سے ثابت ہوتا ہے کہ

ف جفِ ۶ / جفِ لا + ق جفِ ۶ / جفِ ما + ر جفِ ۶ / جفِ ی = ۰، ... (۱)

اور ف جفِ و / جفِ لا + ق جفِ و / جفِ ما + ر جفِ و / جفِ ی = ۰، ... (۲)

مساوات (۱) کی دائیں جانب ا نہیں ہے اور اِس لئے صرف رشتہ ۶ = ا کی وجہ سے معدوم نہیں ہوسکتی۔ اِس لیے اِس کو متماثلاً معدوم ہونا چاہیئے۔ اسی طرح مساوات (۲) متماثلاً پوری ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ابتدائی جزئی تفرقی مساوات کا کوئی تکملہ ف = ط (لا، ما، ی) ہے تو

$$\text{ف}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{جف لا}} + \text{ق}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ما}} + \text{س}\,\frac{\text{جف ط}}{\text{جف ی}} = \text{۰}\text{،} \quad \ldots\ldots(\text{۳})$$

یہ دوسری متماثلہ مساوات ہے کیونکہ ف اِس میں وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ف، ق، س کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جف}(\text{ع، و، ط})}{\text{جف}(\text{لا، ما، ی})} = \text{۰ متماثلاً}$$

پس ط، ع اور و کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو کہ

$$\text{ط} = \text{فہ}(\text{ع، و})$$

یعنے ف = ط، عام تکملہ کا حصہ ہے اور چونکہ ف = ط کوئی تکملہ ہے اِس لیے کوئی مخصوص تکملے نہیں ہیں۔

[طالب علم کو اوپر کے بیان سے معلوم ہوا ہوگا کہ تفرقی مساوات کے متماثلاً پورا ہونے کی کیا اہمیت ہے۔ ہِل نے Proc. London Math. Soc. 1917. لگرانج کی خطی مساوات کے تکملوں کی ایک نئی تقسیم کی ہے جس میں اُس نازک فرق کو دکھایا گیا ہے جو ایک مساوات کو متماثلاً پورا کرنے والے تکملوں اور ایسی خاصیت نہ رکھنے والے تکملوں کے درمیان ہوتا ہے]

ضمیمہ ج

وہ جملہ جو پہلے رتبہ کی ایک واحد جزئی تفرقی مساوات کو جیکوبی کے طریقہ پر حل کرنے سے فری کے لیے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۱۴۰) ہمیشہ تکمل پذیر ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ

$$\text{فری} = \text{ع}_1\,\text{فرلا}_1 + \text{ع}_2\,\text{فرلا}_2 + \text{ع}_3\,\text{فرلا}_3$$

تکمل پذیر ہے یہ ثابت کرنا ضروری اور کافی ہے کہ

$$\text{ل} = \text{م} = \text{ن} = 0 \qquad (\text{ا})$$

اب دفعہ ۱۴۰ کی مساواتوں (۸)، (۹)، (۱۰) کو جمع کرنے اور رشتہ (فا، فا۱) = ۰ کو استعمال کرنے لیکن (ا) کی صداقت کو تسلیم نہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_2، \text{ع}_3)} + \text{م}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_3، \text{ع}_1)} + \text{ن}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}، \text{فا}_1)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)} = 0، \qquad (\text{ب})$$

اسی طرح

$$\text{ل}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}_1، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_2، \text{ع}_3)} + \text{م}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}_1، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_3، \text{ع}_1)} + \text{ن}\,\frac{\text{جف}(\text{فا}_1، \text{فا}_2)}{\text{جف}(\text{ع}_1، \text{ع}_2)} = 0، \qquad (\text{ج})$$

اور $ل \frac{جف(فا_۲، فا)}{جف(ع_۲، ع_۲)} + م \frac{جف(فا_۲، فا)}{جف(ع_۲، ع_۱)} + ن \frac{جف(فا_۲، فا)}{جف(ع_۱، ع_۲)} = ۰$، (د)

مساواتوں (ب)، (ج)، (د) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ یا ل = م = ن = ۰ یا Δ = ۰. جہاں Δ وہ مقطعہ ہے جس کے اجزائے ترکیبی (ب)، (ج)، (د) میں ل، م، ن کے سر ہیں۔

لیکن یہ سر خود مقطعہ

$$ج = \frac{جف(فا_۲، فا، فا_۱)}{جف(ع_۱، ع_۲، ع_۳)}$$

کے اجزائے ترکیبی کے ہم جزو ضربی ہیں اور مقطعوں کے نظریہ کی رو سے

$\Delta = ج^۲$۔

اب ج معدوم نہیں ہو سکتا[1] کیونکہ اگر ایسا ہو تو ایک تفاعلی رشتہ کا وجود لازم آئے گا جس سے دفعہ ۱۴۰ کے اِس مفروضہ کی تردید ہو گی کہ

$$فا = فا_۱ - ا_۱ = فا_۲ - ا_۲ = ۰$$

سے $ع_۱$، $ع_۲$، $ع_۳$ کو $لا_۱$، $لا_۲$، $لا_۳$ کے تفاعلوں کے طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اس لیے $\Delta \neq ۰$

اِس لیے ل = م = ن = ۰

---

[1] اِس ضمیمہ کی تمام مساواتیں متماثلاً پوری ہوتی ہیں۔

(۲۳۲

ضمیمہ د

مزید مطالعہ کیلیے مشورے

اُن تمام کتابوں کی فہرست جو تفرقی مساواتوں پر لکھی گئی ہیں یہاں درج کرنا مقصود نہیں ہے۔ ہم صرف چند اہم ترین کتابوں کے نام اِن کو تین جماعتوں میں تقسیم کرکے بیان کریں گے۔

۱۔ وہ کتابیں جو تحلیلی نقطۂ نظر سے دلچسپی رکھتی ہیں (دسویں باب کے سلسلہ میں):۔

(ا) فورسائتھ: "Theory of Differential Equations."
مطبع جامعہ کیمبرج، سنہ ۱۸۹۰ء اور سنین مابعد۔
یہ اہم تصنیف چھ جلدوں میں ہے اور اِس موضوع پر انگریزی میں سب سے زیادہ مکمل کتاب ہے۔ اِس کو اُس کتاب کے ساتھ خلط ملط نہ کرنا چاہیے جو مبتدیوں کے لیے ایک جلد میں لکھی گئی ہے (چوتھا اڈیشن ۱۹۱۴ء میکملن اینڈ کو)۔

(ب) گرسا: Cours. d' Analyse Mathematique. جلد دوم و سوم (دوسرا اڈیشن سنہ ۱۹۱۱، ۱۹۱۵، گاتھیر ویلرس۔ انگریزی ترجمہ (Ginn) نے شائع کیا ہے)۔

(ج) شیلسنگر: Handbuch der Theorie der linearen Differential gleichungen
سنہ ۱۸۸۵ء، ۱۸۹۸ء، ۳ جلدوں میں، (ٹابنر)

(د) اِنس: Ordinary Differential Equations (سنہ ۱۹۲۰ لانگمنس)

(ع) بیبرباخ: *Differentialgleichungen.*

(سنہ ۱۹۲۷ء، لانگمنس)

۲ — وہ کتابیں جو کچھ تو تحلیلی اور کچھ ہندسی نقطۂ نظر سے دلچسپ ہیں

(ا) گرسا: *Differential Equations* (1934, Macmillan Co.). (سنہ ۱۸۹۱ء)

(ب) گرسا: *Equations aux derivees partielles du premier ordre*

(سنہ ۱۸۹۶ء، ۱۸۹۸ء، ۲ جلدوں میں، ہرمن ایٹ فلس)

(ج) پیج: "*Ordinary Differential Equations from the standpoint of Lie's Transformation Groups* (1897, Macmillan)"

(سنہ ۱۸۹۷ء، میکمیلن)

اس میں تفرقی مساواتوں کے مبادیات پر بہت ہی ابتدائی طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔

(د) ڈِکسن: *Differential Equations from the group standpoint*

(سنہ ۱۹۲۴ء، مطبع جامعہ پرنسٹن)

۳ — وہ کتابیں جو طبیعاتی نقطۂ نظر سے دلچسپی رکھتی ہیں (تیسرے اور چوتھے باب کے سلسلہ میں):

(ا) ریمان: "*Partielle Differential gleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen* (1869, Vieweg)"

(سنہ ۱۸۶۹ء، وی ویگ)

(ب) ریمان وویبر: (ا) کی نظرثانی کرکے اور اس میں بہت کچھ اضافہ کرکے شائع کیا گیا ہے:

(سنہ ۱۹۰۰ء، سنہ ۱۹۰۱ء، وی ویگ)

(ج) بیٹ میان: "Differential Equations" (سنہ ۱۹۱۸ء، لانگمنس)

اس میں تحقیقات جدید کے بہت سے حوالے درج ہیں۔

اصلی مقالوں کا تفصیلی ذکر ناممکن ہے لیکن پروفیسر ایم - جے - ایم - ہِل کے وہ مقالے جو *Proceedings of the London Mathematical Society* میں شائع ہوئے ہیں نظرانداز نہیں کئے جا سکتے - میں ہِل کے مختلف مقالوں کو شائع

کرنا چاہتا ہوں۔ پہلے دو "لگرانج کی خطی جزئی تفرقی مساوات کے خاص تکملے" Journal of the London Mathematical Society 1939 اور "تفرقی مساواتوں کے کامل ابتدائیوں کی ناکاملیت" Math. Gaz. 1939 ہیں۔ میرے مقالہ "خطی تفرقی مساواتوں کے تکملوں کے تحت گروہ" (Tohoku Math. Journal 1937) میں زیادہ وسیع مضمون پر بحث کی گئی ہے۔

دیگر حوالے دفعہ ۱۸۱ کے حاشیہ میں دیکھو۔ ۱ (ب) اور فورسائتھ کی کتاب (ایک جلد والی) کے جدید اڈیشنوں میں بہت کم تغیر کیا گیا ہے۔

متفرق مثالیں پوری کتاب پر (۲۳۳)

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فری}} = \frac{\text{ما}^{۳} + ۳\,\text{لا}^{۲}\,\text{ما}}{\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا}\,\text{ما}^{۲}}$ [لندن]

(۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{لا ما} = ۲\,\text{لا}\,(۱ + \text{لا}^{۲})$ [لندن]

(۳) $\text{مس ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{مس لا} = \text{جم ما جم}^{۳}\,\text{لا}$ [لندن]

(۴) $\text{ما} = ۲\,\text{لا} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad (\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}})^{۲}$ [لندن]

(۵) $\{(۱ - \text{لا}^{۲})\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{لا ما} = \text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۲}$ • [لندن]

(۶) $(\text{عف}^{۲} + ۴)\,\text{ما} = \text{جب}\,۲\,\text{لا}$ [لندن]

(۷) $(\text{عف}^{۳} - \text{عف}^{۲} + ۳\,\text{عف} + ۵)\,\text{ما} = \text{لا}^{۲} + \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}$ [لندن]

(۸) $(\text{لا}^{۳}\,\text{عف}^{۳} + \text{لا}^{۲}\,\text{عف}^{۲})\,\text{ما} = ۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲}$ [لندن]

(۹) $\text{جم لا جب لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما} + \text{جم لا}$ [لندن]

(۱۰) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{لا} + \text{ما} + ۲\,\text{جم ت}$

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۳\,\text{لا} - \text{ما}$ [لندن]

(۱۱) $\text{ما} = \text{لا}\,(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}})^{۳} + ۱$ [لندن]

(۱۲) $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۲\,(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}})^{۲} = \text{ما}^{۲}$ [لندن]

(۱۳) $(\text{عف}^{۴} + ۸\,\text{عف}^{۲} + ۱۶)\,\text{ما} = \text{لا جم}\,۲\,\text{لا}$ [لندن]

(۱۴) ∫ لا^2 فرما + ∫ لا ما فرلا = لا^3 [لندن]

(۱۵) (ما^2 + ما ی - ی) فرلا + (لا^2 + لا ی - ی) فرما + (لا + ما - لا ما) فری = ۰ [لندن]

(۱۶) (۲ لا^3 - ما^3 - ی^3) ما ی فرلا + (۲ ما^3 - ی^3 - لا^3) ی لا فرما + (۲ ی^3 - لا^3 - ما^3) لا ما فری = ۰ [لندن]

(۱۷) لا ع - ما ق + (لا^2 - ما^2) = ۰ [لندن]

(۱۸) (لا + ۲ ما - ی) ع + (۳ ما - ی) ق = لا + ما [لندن]

(۲۳۴) (۱۹) لا ع + ما ق + (لا ی - ما ی + لا ما)^2 / (۴ ما - لا + ی) [لندن]

(۲۰) ع (لا + ع) + ق (ما + ق) = ی [لندن]

(۲۱) ر + س = ع [لندن]

(۲۲) ی - ½ ع لا - ق ما = ع^2 / لا^2 [لندن]

(۲۳) (ر - لا) = (ت - ما) [لندن]

(۲۴) ی = ع لا + ق ما - س لا ما [لندن]

(۲۵) ی (ر ت - س^2) + ع ق س = ۰ [لندن]

(۲۶) لا^2 ر + ۲ لا ما س + ما^2 ت = لا ما [لندن]

(۲۷) ر ق (ق + ۱) - س (۲ ع ق + ع + ق + ۱) + ت ع (ع + ۱) = ۰ [لندن]

(۲۸) ما^3 = لا ما^2 ع + لا^4 ع^2 [میتھیماٹیکل ٹرائی پاس]

(۲۹) ما فر^{2}ما / فرلا^2 (فرما / فرلا)^2

(۳۰) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - \frac{\text{ن}}{\text{لا}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا}^{2\text{ن}}\,\text{ما} = ۰$ [میتھیماٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۱) $(\text{ی ع} + \text{لا})^{2} + (\text{ی ق} + \text{ما})^{2} = ۱$ [" "]

(۳۲) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - ۳\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\,\text{ما} = \text{قو}^{۳\text{لا}}$ کا حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور نیز جبکہ $\text{لا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,۲$

[میتھیماٹیکل ٹرائی پاس]

(۳۳) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} + ۲\text{ک}\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + (\text{ک}^{2} + \text{ل}^{2})\,\text{لا} = \text{ا جم ع ت}$ کو حل کرو۔
ثابت کرو کہ ع کی مختلف قیمتوں کے لیے خاص تکملہ کا حیطہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ $\text{ع}^{2} = \text{ل}^{2} - \text{ک}^{2}$ اور ثابت کرو کہ اُسوقت خاص تکملہ

$$\left(\frac{\text{ا}}{۲\,\text{ک ل}}\right)\text{جم}\,(\text{ع ت} - \text{ء})$$

ہے جہاں $\text{مس ء} = \frac{\text{ع}}{\text{ک}}$ [لندن]

(۳۴) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\,\text{مس لا} + \text{ما جم}^{2}\,\text{لا} = ۰$ کو ی = جب لا رکھ کر حل کرو۔

(۳۵) (آ) $\frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف لا}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف ما}^{2}} + \frac{\text{جف}^{2}\text{و}}{\text{جف ی}^{2}} = ۰$ کے حل کو شکل فا(ر + ی) کا مانکر تفاعل فا کو معلوم کرو یہاں $\text{ر}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}$، اور ی کے لحاظ سے تکمل کر کے حل $\text{و} = \text{ی لوک}\,(\text{ر} + \text{ی}) - \text{ر}$ کو اخذ کرو۔

(۲) جف و / جف ت = اَ^۲ جف^۲ و / جف لا^۲ کے ایک حل کو شکل فہ (ضا) کا

مانکر تفاعل فہ کو معلوم کرو جہاں ضا = لا / √ت ، اور لا کے لحاظ سے
تفرق کرکے ایک دوسرا حل معلوم کرو۔ [لندن]

(۳۶) لا، ما، ی کا ایک منطق صحیح تفاعل و معلوم کرو جو شرط

جف^۲ و / جف لا^۲ + جف^۲ و / جف ما^۲ + جف^۲ و / جف ی^۲ = ۰

کو پورا کرے اور نیز ایسا ہو کہ ایک کرہ کی سطح پر کے نقطوں پر اس کی قیمت
ا ی^۲ ہو جہاں یہ کرہ اکائی نصف قطر کا ہے اور اس کا مرکز مبداء پر ہے
[میتھیمائیکل ٹرائی پاس]

(۳۷) ثابت کرو کہ لاپلاس کی مساوات ▽^۲ ع = ۰ کا ایک حل (۲۳۵)

ع = (ا جم ن طہ + ب جب ن طہ) قو^{لہ ی} بجن (لہ ر)

ہے جہاں ر، طہ، ی اسطوانی محددیں ہیں اور ا، ب، ن، لہ اختیاری
مستقل ہیں۔
[لندن]

(۳۸) ثابت کرو کہ مساوات جف^۲ و / جف لا^۲ + جف^۲ و / جف ما^۲ + و = ۰

کا ایک حل بجن (ر) (اُن جم ن طہ + بن جب ن طہ) ہے جہاں ر
اور طہ قطبی محددیں ہیں اور اُن اور بن اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۳۹) بتاؤ کہ مساوات جف ع / جف ت = اَ^۲ جف^۲ ع / جف لا^۲

کے حل سلسلوں میں کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور پوری طرح
سے اس صورت کو حل کرو جس میں

$$\text{ج جمزت} = \text{ا}\,\frac{\text{جف}^{6}}{\text{جف لا}} = ۶$$

جبکہ $\text{لا} = 0$ [لندن]

(۴۰) مساوات $$4\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 9\,\text{لا ما} = 0$$

کے دو غیر تابع حل لا کی صعودی قوتوں میں حاصل کرو اور مساوات کے متغیروں کو بدل کر یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کامل حل کو شکل

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{جے}_{\frac{1}{3}}\left(\text{لا}^{\frac{3}{2}}\right) + \text{ب}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{جے}_{-\frac{1}{3}}\left(\text{لا}^{\frac{3}{2}}\right)$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۴۱) ثابت کرو کہ مساوات $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف} + \text{ق ما} + \text{ر ما}^{2} = 0$$

کا کامل حل اندراج $\text{ما} = \text{ما}_{1} + \frac{1}{\text{ی}}$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے اگر ایک خاص حل ما_{1} معلوم ہو جہاں ف، ق اور ر، لا کے تفاعل ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر دو خاص حل ما_{1} اور ما_{2} معلوم ہوں تو کامل حل

$$\text{لوک}\left(\frac{\text{ما} - \text{ما}_{1}}{\text{ما} - \text{ما}_{2}}\right) = \int \text{ر}\left(\text{ما}_{2} - \text{ما}_{1}\right)\text{فر لا} + \text{مستقل}$$

ہے۔

مساوات $$\left(\text{لا}^{2} - 1\right)\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{لا} + 1 - \left(\text{لا}^{2} + 1\right)\text{ما} + \left(\text{لا} - 1\right)\text{ما}^{2} = 0$$

کا کامل حل معلوم کرو، اس مساوات کے دو خاص حل ہیں اور ان کا حاصل ضرب اکائی ہے۔ [لندن]

(۴۲) ثابت کرو کہ تفرقی مساوات

$$\left(1 - \text{لا}^{2}\right)\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + 2\left\{\text{ب} + (\text{و} - 1)\,\text{لا}\right\}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2\,\text{و ما} = 0$$

کا ایک حل شکل $(\text{۱}+\text{لا})^{\text{ف}}(\text{۱}-\text{لا})^{\text{ق}}$ کا ہے جہاں ف اور ق متعین مستقل ہیں۔ اِس مساوات کو پوری طرح حل کرو اور اِس سے اخذ کرو یا کسی طرح ثابت کرو کہ اگر ۲ل ایک مثبت صحیح عدد ن ہو تو مساوات کا ایک حل، لا میں ایک کثیر رقمی ہے جس کا درجہ ن ہے۔

(۲۳۶) (۴۳) تصدیق کرو کہ مساوات

$$\text{لا}(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})(\text{۱}+\text{۳لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{۴لا}(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲}})\text{ما}=\text{۰}$$

کا ایک خاص حل $\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}$ ہے۔ اِس کو پوری طرح حل کرو۔

مبدلوں کے تغیر کے طریقہ سے یا کسی اور طرح اُس مساوات کو پوری طرح حل کرو جو اوپر کی مساوات میں بائیں جانب صفر کی بجائے $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})^{\text{۳}}$ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ [لندن]

(۴۴) ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{ف}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ق ما}=\text{۰}$$

کا کامل حل جہاں ف اور ق، لا کے دیے ہوئے تفاعل ہیں معلوم ہو سکتا ہے اگر مساوات

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}+\text{ع}^{\text{۲}}+\text{ق}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}}-\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\text{ف}^{\text{۲}}=\text{۰}$$

کا کوئی حل معلوم ہو۔

اِس سے یا کسی اور طرح مساوات

$$(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}-\text{۴لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+(\text{لا}^{\text{۴}}-\text{۳})\text{ما}=\text{۰}$$

کو حل کرو۔

[لندن]

(۴۵) ثابت کرو کہ $و = ط\, لا^{ن}$ رکھنے سے مساوات

$$لا \frac{ف^{۲} و}{ف لا^{۲}} - ۲ن \frac{ف و}{ف لا} + لا و = ۰$$

کے کامل حل کو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے شکل

$$(ا\, جم لا + ب\, جب لا)\, ف(لا) + (ا\, جب لا - ب\, جم لا)\, فہ(لا)$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ف (لا) اور فہ (لا) موزوں کثیر رقمی ہیں۔
[لندن]

(۴۶) اگر مساوات

$$ف(لا)\, مَاً - فَ(لا)\, مَا + فہ(لا)\, مَا + خہ(لا)\, ما = ۰$$

کے دو غیر تابع حل ع اور و ہوں جہاں زبر لا کے لحاظ سے تفرق کو بیان کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ کامل حل

$$ا ع + ب و + ج ط$$ ہے جہاں

$$ط \equiv ع \int \frac{و ف(لا)\, فرلا}{(ع وَ - عَ و)^{۲}} - و \int \frac{ع ف(لا)\, فرلا}{(ع وَ - عَ و)^{۲}}$$

اور ا، ب، ج اختیاری مستقل ہیں۔

مساوات

$$لا^{۲}(لا^{۲} + ۵)\, مَاً - لا(۷ لا^{۲} + ۲۵)\, مَا + (۲۲ لا^{۲} + ۴۰)\, مَا - ۳۰ لا\, ما = ۰$$

کو حل کرو جس کے حل شکل $لا^{ن}$ کے ہیں۔ [لندن]

(۴۷) دو غیر تابع قوت کے سلسلے حاصل کرو جو مساوات

$$(لا^{۲} - ا^{۲}) \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + ب لا \frac{ف ما}{ف لا} + ج ما = ۰$$

کے حل ہوں اور ان کے استدقاق کا علاقہ معلوم کرو۔ [لندن]

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات

$$لا(۱ - لا) \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + (۱ - ۲ لا) \frac{ف ما}{ف لا} - \frac{۱}{۴} ما = ۰$$

کے دو تکملے

(۲۳۷ $$\sum^{\infty} ا_ن لا^ن ، \sum^{\infty} ا_ن \left(\frac{۱}{۴} لوک لا + ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \dots - \frac{۱}{۲ن}\right) لا^ن$$

ہیں جہاں
$$ا_ن = \left\{\frac{گا(ن + \frac{۱}{۲})}{گا(ن + ۱)}\right\}^۲$$
[لندن]

(۴۹) وہ تفرقی مساوات معلوم کرو جس کا ابتدائی

$$ما = ا\left(جب لا + \frac{جم لا}{لا}\right) + ب\left(جم لا - \frac{جب لا}{لا}\right)$$

ہے جہاں ا، ب اختیاری مستقل ہیں۔ [لندن]

(۵۰) وہ شرط حاصل کرو کہ مساوات

$$ف فرلا + ق فرما = ۰$$

کا ایک متکمل جزو ضربی ہو جو صرف لا کا ایک تفاعل ہو۔ نتیجہ کو

$$(۳ لا ما - ۲ ا ما^۲) فرلا + (لا^۲ - ۲ ا لا ما) فرما = ۰$$

کے تکمل کرنے میں استعمال کرو۔ [لندن]

(۵۱) ثابت کرو کہ مساواتوں

$$ما - لا \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۲ ا لا^۲}{لا^۲ - ما^۲} \frac{فرما}{فرلا} = ۰ ،$$

$$لا^۲ - ما^۲ + ۲ (لا ما + ب لا^۲) \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

کا ایک مشترک ابتدائی ہے۔ اس کو معلوم کرو۔ [لندن]

(۵۲) ثابت کرو کہ مساوات

$$ف \frac{فر^۲ ع}{فرلا^۲} + ق \frac{فرع}{فرلا} + ر ع = ۰$$

کا کوئی حل مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فر لا}^{2}}(\text{ف ع}) - \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ق ع}) + \text{ر ع} = 0$$

کا ایک متکمل جزو ضربی ہے اور اس کے بالعکس یعنے یہ کہ ثانی الذکر مساوات کا کوئی حل اول الذکر کا ایک متکمل جزو ضربی ہے۔

پس ان میں سے پہلی مساوات کو پوری طرح تکمل کرو، یہ دیا گیا ہے کہ

$$\frac{\text{فر}^{2}}{\text{فر لا}^{2}}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}}\right) + \frac{\text{ر}}{\text{ق}} = 0$$ [لندن]

(۵۳) اگر مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = 0$$

کا ایک حل جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں

$$\text{ما} = \text{ا جب}(\text{ن لا} + \text{ء})$$

ہو سکے جہاں ا اور ء اختیاری مستقل ہیں تو ف اور ق کے درمیان رشتہ معلوم کرو۔

(۵۴) مساوات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} - \text{۴ ما} = \frac{\text{۲ ما}}{(\text{۱} - \text{لا})^{2}}$

کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ اس کے دو تکملے شکل

$$\text{ما} = \frac{\text{ا} + \text{ب لا}}{\text{۱} - \text{لا}}\,\text{و}^{\text{ک لا}}$$

کے ہیں۔ [لندن]

(۲۳۸) (۵۵) ثابت کرو کہ اس خطی تفرقی مساوات کو جس کے حل مساوات

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{ف}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = 0$$

کے حلوں کے مربع ہیں

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}+\text{۲ف}\right)\left(\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{ف}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{۲ق ما}\right)+\text{۲ق}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=\text{۰}$$

لکھا جا سکتا ہے

(۵۶) ثابت کرو کہ کُلّی تفرقی مساوات

$$\text{۳ لا}^{\text{۲}}(\text{ما}+\text{ی})\,\text{فرلا}+(\text{ی}^{\text{۲}}-\text{لا}^{\text{۳}})\,\text{فرما}+(\text{ما}^{\text{۲}}-\text{لا}^{\text{۳}})\,\text{فری}=\text{۰}$$

تکمل پذیری کی شرط کو پورا کرتی ہے، اِس کو تکمل کرو۔ [لندن]

(۵۷) عامل $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ کو عف سے تعبیر کیا گیا ہے ۔ثابت کرو کہ اگر لا، لا کا ایک تفاعل ہو اور فہ (عف)، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو

$$\text{فہ (عف) لا لا}=\text{لا فہ (عف) لا}+\text{فہَ (عف) لا}$$

نتیجہ کی توسیع اِس صورت پر کرو جس میں $\frac{\text{۱}}{\text{فہ (عف)}}$، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے۔

تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}}+\text{۸ ما}=\text{۳ لا}^{\text{۲}}+\text{لا و}^{-\text{۲لا}}\ \text{جم لا}$$

کو حل کرو۔ [لندن]

(۵۸) ثابت کرو کہ

$$\text{۳}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{۴ لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}-\text{۸ ما}=\text{۰}$$

کا ایک تکملہ، لا میں ایک کثیر رقمی ہے ۔عام حل اخذ کرو۔ [شیفیلڈ]

(۵۹) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ میں ف، ق، اور ر، لا، ما، اور ی کے تجانس تفاعل ہوں اور ان کا درجہ ایک ہی ہو تو ایک متغیر کو دوسرے دو سے جدا کیا جا سکتا ہے اور

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فر لا}^2}\left(\text{ف ی}\right) - \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{ق ی}\right) + \text{ر ی} = ۰$$

کا ایک تکمیل جزو ضربی ہے اور اس کے بالعکس یعنے یہ کہ ثانی الذکر مساوات کا کوئی حل اول الذکر کا ایک تکمیل جزو ضربی ہے۔
پس ان میں سے پہلی مساوات کو پوری طرح تکمیل کرو، یہ دیا گیا ہے کہ

$$\frac{\text{فر}^2}{\text{فر لا}^2}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}}\right) + \frac{\text{ر}}{\text{ق}} = ۰$$ [لندن]

(۵۳) اگر مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰$$

کا ایک حل جہاں ف اور ق، لا کے تفاعل ہیں

$$\text{ما} = \text{جب}\left(\text{ن لا} + \text{عہ}\right)$$

ہو سکے جہاں ن اور عہ اختیاری مستقل ہیں تو ف اور ق کے درمیان رشتہ معلوم کرو۔

(۵۴) مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} - ۴\,\text{ما} = \frac{۲\,\text{ما}}{(۱ - \text{لا})^2}$

کو حل کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ اس کے دو تکملے شکل

$$\text{ما} = \frac{\text{ا} + \text{ب لا}}{۱ - \text{لا}} \text{ و } \text{لا}^{\text{ہ}}$$

کے ہیں۔ [لندن]

(۵۵) ثابت کرو کہ اس خطی تفرقی مساوات کو جس کے حل مساوات (۲۳۸)

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ف}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰$$

کے حلوں کے مربع ہیں

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ف}\right)\left(\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \text{ف}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ق ما}\right) + ۲\,\text{ق}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

لکھا جا سکتا ہے

(۵۶) ثابت کرو کہ کُلی تفرقی مساوات

$$۳\,\text{لا}^۲(\text{ما}+\text{ی})\,\text{فرلا} + (\text{ی}^۲ - \text{لا}^۳)\,\text{فرما} + (\text{ما}^۲ - \text{لا}^۳)\,\text{فری} = ۰$$

تکمل پذیری کی شرط کو پورا کرتی ہے، اِس کو تکمل کرو۔ [لندن]

(۵۷) عامل $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ کو عف سے تعبیر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر لا، لا کا ایک تفاعل ہو اور فہ (عف)، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو

$$\text{فہ}(\text{عف})\,\text{لا لا} = \text{لا فہ}(\text{عف})\,\text{لا} + \text{فہَ}(\text{عف})\,\text{لا}$$

نتیجہ کی توسیع اِس صورت پر کرو جس میں $\frac{۱}{\text{فہ}(\text{عف})}$، عف کا ایک منطق صحیح تفاعل ہے۔

تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^۳\,\text{ما}}{\text{فرلا}^۳} + ۸\,\text{ما} = ۳\,\text{لا}^۲ + \text{لا و}^{-۲\text{لا}}\,\text{جم لا}$$

کو حل کرو۔

[لندن]

(۵۸) ثابت کرو کہ

$$۳\,\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + ۴\,\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۸\,\text{ما} = ۰$$

کا ایک تکملہ، لا میں ایک کثیر رقمی ہے۔ عام حل اخذ کرو۔ [شیفیلڈ]

(۵۹) ثابت کرو کہ اگر مساوات ف فرلا + ق فرما + ر فری = ۰ میں ف، ق اور ر، لا، ما، اور ی کے متجانس تفاعل ہوں اور ان کا درجہ ایک ہی ہو تو ایک متغیر کو دوسرے دو سے جدا کیا جا سکتا ہے اور

اِس سے مساوات ٹھیک بنجاتی ہے اگر وہ تکمل پذیر ہو۔

مساوات

ی^۳ (لا^۲ فرلا + ما^۲ فرما) + ی {لا ما ی^۲ + ی^۴ - (لا^۲ + ما^۲)^۲} (فرلا + فرما)

+ (لا + ما) {ی^۴ - ی^۲ (لا^۲ + ما^۲) - (لا^۲ + ما^۲)^۲} فری = ۰

کو تکمل کرو اور تکملہ جبریہ شکل میں حاصل کرو۔ [لندن]

(۶۰) ثابت کرو کہ اگر مساوات فا فرلا + ق فرما + ر فری = ۰

ٹھیک ہو تو اِس کو شکل لہ فرع + مہ فرو = ۰ میں تحویل کیا جا سکتا ہے

جہاں لہ/ع صرف ع اور و کا ایک تفاعل ہے اور ع = مستقل

اور و = مستقل مساواتوں

فرلا / (جف ق/جف ی - جف ر/جف ما) = فرما / (جف ر/جف لا - جف فا/جف ی) = فری / (جف فا/جف ما - جف ق/جف لا)

کے دو غیر تابع حل ہیں۔

اِس سے یا کسی اور طرح مساوات

(ما ی + ی^۲) فرلا - لا ی فرما + لا ما فری = ۰

کو تکمل کرو۔ [لندن]

(۶۱) ثابت کرو کہ ی^۲ = ۲ لا ما،

لا + ما + √(ی^۲ - ۲ لا ما) = ف (لا + ما + ی^۲)

میں جو

{۲ √(ی^۲ - ۲ لا ما) - ۲ لا - ۱} ی ع + {۱ + ۲ ما - ۲ √(ی^۲ - ۲ لا ما)} ی ق = لا - ما

کا عام حل ہے شامل نہیں ہے لیکن اس کے باوجود وہ اُس مساوات کا حل ہے۔ [شیفیلڈ]

۲۳۹ (۶۲) (اَ) بتاؤ کہ ریکیٹی کی مساوات

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ل}_0(\text{لا}) + \text{ل}_1(\text{لا})\,\text{ما} + \text{ل}_2(\text{لا})\,\text{ما}^2$$

کو کس طرح دوسرے رتبہ کی خطی مساوات میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ اِس سے یا کسی اور طرح ثابت کرو کہ کسی چار تکملوں کی چلیپی نسبت مستقل ہوتی ہے۔

(بَ) تصدیق کرو کہ

$$\text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^2 - \frac{1}{4} + \text{ما}^2$$

کے تکملے $\frac{1}{2} + \text{لا مس لا}$ ، $\frac{1}{2} - \text{لا حم لا}$ ہیں اور ابتدائی کو ماخوذ کرو۔

[لندن]

(۶۳)
$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = -\,\text{سہ ما} ،$$

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} = \text{سہ لا}$$

کو معمولی طریقہ پر حل کرو گے اور نتیجہ سے ت کو ساقط کر کے ثابت کرو کہ نقطہ (لا، ما) ایک دائرہ پر واقع ہے۔

نیز اس کو پہلی مساوات کے لا گنے میں دوسری مساوات کے ما گنے کو جمع کر کے ثابت کرو۔

[ان مساواتوں سے ایک نقطہ کی جو زاوئی رفتار سہ سے ایک دائرہ مرتسم کر رہا ہے رفتاریں، محوروں کے متوازی تحلیل شدہ، حاصل ہوتی ہیں]

(۶۴) منحنیوں $\text{ما}^2(\text{ل} - \text{لا}) = \text{لا}^3$ کے قائم مراۃ معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ وہ نظام

$$\text{ر}^{۲} = \text{ب}^{۲} \left(۳ + \text{جم}^{۲} \text{طہ} \right)$$

میں تحویل ہوتے ہیں۔ [شیفیلڈ]

(۶۵) $$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ن ما} - \text{م ی}،$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ل ی} - \text{ن لا}،$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{م لا} - \text{ل ما}$$

جہاں ل، م، ن مستقل ہیں، ثابت کرو کہ

$$\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی}،$$

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲}$$

اور $$\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}\right)^{۲}$$

سب مستقل ہیں۔ اِن نتیجوں کی تعبیر بیان کرو۔

(۶۶) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ مثلث ف ن ت کا رقبہ قطعۂ ا ف ن کے رقبہ کا م گنا ہے جہاں ن ت کسی نقطہ ف پر کا زیر مماس، ف ن معین، اور ا مبداء ہے جو منحنی پر ہے۔ ثابت کرو کہ اِس منحنی کی مساوات $\text{ما}^{۲\text{م}-۱} = \text{ا}^{۲\text{م}-۲}\ \text{لا}$ ہے۔

ثابت کرو کہ قطعہ ا ف ن کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ اُس مخروط کے حجم کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے جو مثلث ف ن ت کی گردِش سے تکوین پاتا ہے۔ [لندن]

(۶۷) اندراج لا = رجم طہ، ما = رجیب طہ استعمال کرکے یا کسی اور (۲۴۰)
طرح تفرقی مساوات

(لا^۲ + ما^۲) (لا ع - ما)^۲ = ۱ + ع^۲

کو حل کرو۔

نیز نادر حل معلوم کرو اور نتیجوں کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔ [لندن]

(۶۸) ثابت کرو کہ مساوات

(لا^۲ + ما^۲ - ۲ لا ع ما)^۲ = ۴ ا^۲ ما^۲ (۱ - ع^۲)

کلیرو کی شکل میں، ما^۲ - لا^۲ کو نیا متبوع متغیر بنانے سے تحویل ہو سکتی ہے۔ اسکو حل کرو اور ثابت کرو کہ نادر حل سے دو قائم زائد تعبیر ہوتے ہیں۔ نیز اسکی تصدیق کرو کہ یہ حل دی ہوئی مساوات کو پورا کرتا ہے۔ [لندن]

(۶۹) ثابت کرو کہ وہ منحنی جن میں نصف قطر انحناء اُس طول کے مساوی ہوتے ہیں جو عماد پر ایک ثابت خط مستقیم سے منقطع ہوتا ہے دائرے ہوں گے یا زنجیرے۔ [لندن]

(۷۰) مساوات

ما = لا - ۲ ا ع + ا ع^۲

کو حل کرو اور نادر حل معلوم کرو۔ [لندن]

(۷۱) ایک مستوی منحنی ایسا ہے کہ اِس کا نصف قطر انحناء غ اُس مقطوعہ نہ کے ساتھ جو عماد پر منحنی اور محور لا کے درمیان منقطع ہوتا ہے رشتہ غ نہ = ج^۲ رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر منحنی کے تقعر کو محور لا کی جانب سے گھما لیا جائے تو

ما^۲ = ج^۲ جب^۲ فہ + ب

جہاں و لا کے ساتھ مماس کا میلان فہ ہے۔ صورت ب = ۰ میں لا کی قیمت، فہ کے تفاعل کے طور پر حاصل کرو اور منحنی کی شکل کا نقشہ کھینچو۔ [لندن]

(۷۲) اگر منحنیوں کے ایک قبیل کی تفرقی مساوات کو دو قطبی محددوں ر، رَ، طہ میں بیان کیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ قائم مرماہ کی

اِلّا آنکہ او لیشج ع جم ع ت مستقل ہونے کی بجائے اب دَوری ہے۔ متمم تفاعل جلد ہی قابل نظر انداز ہو جاتا ہے یعنے رو کے آزاد اہتزازوں کی تقصیر ہو جاتی ہے]

(۸۳)
$$\text{ل}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ق}}{\text{فرت}^{2}}+\text{ر}\,\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}}+\frac{\text{ق}}{\text{ج}}=\text{ع جم ع ت}$$

کا خاص تکملہ معلوم کرو۔

[اِس سے لیڈنی مرتبان کے ایک پترے پر بارق حاصل ہوتا ہے جبکہ دَوری محرکہ برق ع جم ع ت اس دَور میں عمل کرتا ہے جو پتروں کو ملاتا ہے۔ خاص تکملہ سے وہ بار حاصل ہوتا ہے جو آزاد برقی اہتزازوں کی تقصیر کے بعد پایا جاتا ہے]۔

(۸۴) ثابت کرو کہ مساواتیں (۲۴۲)

$$۲\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}+۳\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}-۱۶\text{لا}-۳\text{ما}=۰\text{،}\quad ۷\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}-۲\text{لا}-۳\text{ما}=۰$$

آزمائشی حل ما = م لا سے پوری ہوتی ہیں بشرطیکہ م، دو درجی مساوات

$$\frac{۱۶+۳\text{م}}{۲+۳\text{م}}=\frac{۲+۳\text{م}}{۷}$$

کی ایک اصل ہو، اور لا، مساوات

$$۷\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}-(۲+۳\text{م})\,\text{لا}=۰$$

سے حاصل ہو۔

پس ثابت کرو کہ اِن تفرقی مساواتوں کے حلوں کے دو جٹ

$$\text{ما}=۴\text{لا}=۴\text{ا}\,\text{قو}^{۲\text{ت}}$$

اور

$$\text{ما}=-۳\text{لا}=-۳\text{ب}\,\text{قو}^{-\text{ت}}$$

ہیں اور اِس لیے عام حل

$$لا = ا\, و^{۲ت} + ب\, و^{ت}$$

$$ما = ۴\, ا\, و^{۲ت} - ۳\, ب\, و^{ت}$$

ہے۔

(۸۵) پچھلی مثال کا طریقہ مساواتوں

$$\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} + ۲۳ لا - ۸ ما = ۰ ،$$

$$۳ \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} + ۲ \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} - ۱۳ لا + ۱۰ ما = ۰$$

کو حل کرنے میں استعمال کرو۔

[اِس نمونہ کی مساواتیں اُن مسئلوں میں واقع ہوتی ہیں جو آزادی کے دو درجے رکھنے والے نظاموں کے صغیر اہتزازوں سے متعلق ہوتے ہیں۔ ما = ۲ لا (یا ما = -۵ لا) سے جو حرکت حاصل ہوتی ہے اس کو ارتعاش کا صدری یا **طبعی اسلوب** کہتے ہیں۔ صریحًا یہ حرکت ایسی ہے کہ نظام کے تمام حصے ایک ہی دور کے ساتھ اور ایک ہی ہئیت میں یعنی موسیقی طور پر حرکت کر رہے ہیں۔ اگر ما - ۲ لا اور ما + ۵ لا کو لاَ اور ماَ کی بجائے نئے متغیر قرار دیا جائے تو اِن کو صدری یا **طبعی محدد** کہا جاتا ہے۔]

(۸۶) اگر ل، م، ن، ر، س مثبت عدد ہوں اور ل ن > م^۲ تو ثابت کرو کہ لا اور ما جن کی تعریف مساواتوں

$$ل \frac{فر لا}{فرت} + م \frac{فر ما}{فرت} + ر لا = ۰ ،$$

$$م \frac{فر لا}{فرت} + ن \frac{فر ما}{فرت} + س ما = ۰$$

سے ہوئی ہو لا انتہا گھٹتے ہیں جبکہ ت بڑھتا ہے۔

[ثابت کرو کہ لا = ا قو^عہ ت + ب قو^بہ ت اور ما = ع قو^عہ ت + ف قو^بہ ت جہاں عہ اور بہ حقیقی اور منفی ہیں۔ اِن مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے برقی دَوروں کے آزاد اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ ل اور ن ذاتی امالہ کی اور م باہمی امالہ کی قدریں ہیں اور ر اور س مزاحمتیں ہیں]

(۸۷) ثابت کرو (حلوں کا پوری طرح عمل کئے بغیر) کہ ہمزاد مساواتیں

ل فرلا/فرت + م فرما/فرت + ر لا + ∫ لا فرت/ج = ع جب ع ت،

م فرلا/فرت + ن فرما/فرت + س ما = ۰

(۲۲۴) کے خاص تکملے نہیں بدلتے اگر پہلی مساوات میں رقم ∫ لا/ج فرت کو ترک کیا جائے اور ل کی بجائے ل − ۱/ج ع^۲ رکھا جائے۔

[یہ اِس واقعہ سے مستنبط ہوتا ہے کہ خاص تکملے شکل ا جب (ع ت − عہ) کے ہیں]

[ان مساواتوں سے دو باہم اثر کرنے والے دوروں میں رَوئیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ادنیٰ دور جس میں گنجائش ج کا ایک مکثفہ ہے ایک متبادل محرکہ برق کے زیرِ عمل ہو۔ اِس مثال سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مکثفہ کے اثر کی خود امالہ کے اضافہ سے تلافی کیجا سکتی ہے]

(۸۸) اگر ل فرلا/فرت + م فرما/فرت + ۱/ج ∫ لا فرت = ف (ت)،

اور م فرلا/فرت + ن فرما/فرت = ۰

جہاں ل ن − م^۲ بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے تو ثابت کرو کہ

لا کے لیے جو متمم تفاعل حاصل ہوتا ہے، وہ ایک بہت تیز اہتزاز کو تعبیر کرتا ہے۔

[یہ مساواتیں ریالے (Rayleigh) کے اس نظریہ میں واقع ہوتی ہیں جو ایک بند ثانوی االی لچھے کے اولی دَور کے ایک مکثفہ کے اہتزازی اخراج سے متعلق ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دوسری مساوات سے یہ واضح ہے کہ ثانوی رَو اپنے اعظم پر ہوتی ہے جب کہ اولی رَو اپنے اقل پر ہو۔ دیکھو گرے کی کتاب (Magnetism and Electricity) دفعات ۴۸۹ و ۴۹۰]۔

(۸۹) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں

$$م \frac{فر^2 لا}{فر ت^2} = -ا (لا - ﻻ) + ک جم ع ت ،$$

$$م \frac{فر^2 ﻻ}{فر ت^2} = -\{ﻻ + ا (لا - ﻻ)\}$$

کے خاص تکملوں کو

$$لا = \frac{ب ک}{ا^2 - ب ب} جم ع ت ،$$

$$ﻻ = \frac{- ا ک}{ا^2 - ب ب} جم ع ت$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں ب = م ع^2 - ا اور ب = م ع^2 - (ا + ا)۔
پس ثابت کرو کہ ع کی دو خاص قیمتوں کے لیے لا اور ﻻ دونوں لامتناہی ہیں۔

[ان مساواتوں سے "لچکدار دوہرے رقاص" کے اہتزاز حاصل ہوتے ہیں۔ کمیتوں م اور م کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ وہ صرف ایک ہی افقی خط میں حرکت کر سکتے ہیں۔ ایک کمانی م کو اس خط کے ایک ثابت نقطہ سے لاتی ہے اور دوسری کمانی م اور م کو ملاتی ہے۔

م پر ایک دَوری قوت عمل کرتی ہے اور حل سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دونوں کمیتیں قسری ارتعاشش کرتی ہیں جن کا حیطہ، ع کی دو خاص قیمتوں کے لیے بہت بڑا ہو جاتا ہے۔ بلاشبہ یہ بھیر گمک کا مظہر ہے ۔ ع کی وہ قیمتیں جن سے اِس صورت میں گمک پیدا ہوتا ہے وہی نہیں ہیں جو ہوتیں اگر صرف ایک کمیت موجود ہوتی ۔ اِس کا اطلاق ٹربائین دہرے میں "تیز گھماؤ" کی بحث پر کیا جا سکتا ہے ۔ دیکھو اسٹوڈولا کی کتاب "(*Steam Turbine*)"]

(۹۰) ثابت کرو کہ ہمزاد مساواتوں (۲۴۴)

$$\left(\tfrac{1}{3}\text{م}+\text{مہ}\right)4\text{ا}\,\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2}+2\,\text{مہ}\,\text{ب}\,\frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرت}^2}=-\text{ج}(\text{م}+2\,\text{مہ})\text{ط},$$

$$\frac{4\,\text{ب}}{3}\,\frac{\text{فر}^2\text{فہ}}{\text{فرت}^2}+2\,\text{ا}\,\frac{\text{فر}^2\text{ط}}{\text{فرت}^2}=-\text{ج}\,\text{فہ}$$

کے حل کو جہاں م = مہ اور ا = ب یہ لکھ کر بیان کیا جا سکتا ہے کہ ط اور فہ دونوں میں سے ہر ایک دو ایسی سادہ موسیقی اہتزازوں سے ترکیب یافتہ ہے جن کے دَور $\frac{2\pi}{\text{ع}_1}$ اور $\frac{2\pi}{\text{ع}_2}$ ہیں جہاں ع_1^2 اور ع_2^2، ع^2 میں دو درجی مساوات

$$28\,\text{ا}^2\text{ع}^4-84\,\text{ا}\,\text{ج}\,\text{ع}^2+27\,\text{ج}^2=0$$

کی اصلیں ہیں ۔

[اِن مساواتوں سے کمیتوں م اور مہ اور طولوں ۲ا اور ۲ب کے دو ڈنڈوں کے میلانِ انتصابی کے ساتھ حاصل ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوہرے رقاص کے طور پر ایک انتصابی مستوی میں جھول رہے ہوں، پہلا ڈنڈا ایک ثابت نقطہ سے آزادانہ لٹکا ہوا ہے اور دوسرا پہلے کے نچلے سرے سے لٹک رہا ہے ۔ اوپر جن اہتزازوں کا ذکر کیا گیا ہے

ان کو صدر (یا طبعی) اہتزاز کہتے ہیں۔ چھوٹے اہتزازوں کے بحث سے مسئلوں میں ایسی مساواتیں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ ان کا تفصیلی ذکر راؤتھ کی کتاب "(Advanced Rigid Dynamics)" میں ملے گا جس میں اس صورت پر بھی خاص توجہ کی گئی ہے جبکہ ع کی مساوات کی اصلیں مساوی ہوں۔]

(۹۱)
$$\frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} + ک \frac{فر ما}{فرت} + ج^۲ لا = ۰،$$

$$\frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} - ک \frac{فر لا}{فرت} + ج^۲ ما = ۰۔$$

[ان مساواتوں سے ایک گردشی رقاص کے لنگر کی حرکت معلوم ہوتی ہے جو انتصابی سے زیادہ دور نہیں جھولتا۔ اگر ابتدائی شرطیں ایسی ہوں کہ ب = ۰ تو یہ معلوم ہوگا کہ حرکت ایک دائرہ میں ہے اور زاوئی رفتار ع ہے، لیکن اگر ا = ۰ تو حرکت ایک دائرہ میں زاوئی رفتار ق کے ساتھ مخالف جہت میں حاصل ہوگی۔ (ع، ق، ا، ب کے لیے دیکھو جوابات)۔

ایسی ہی مساواتیں گردشی رَوانوں (Ions) کے راسنہ کے لیے زیمانی اثر (طیف کے ایک خط کا مقناطیسی میدان کی وجہ سے تہرا ہونا) کی تشریح میں درست ہوتی ہیں۔ دیکھو گرے کی کتاب (Magnetism and Electricity) دفعات ۵۶۵ تا ۵۶۹]

(۹۲) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{فر لا}{فرت} + ا لا = ۰، \\ &\frac{فر ی}{فرت} = ب ما، \\ &لا + ما + ی = ج \end{aligned}\right.$$

جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں تو ی کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرو۔ پس ثابت کرو کہ اگر ی = $\frac{فر ی}{فرت}$ = ۰ جبکہ ت = ۰۔

تو

$$ی = ج + \frac{ج}{ا - ب}\left[ب\,و^{-ا\,ت} - ا\,و^{-ب\,ت}\right]$$

[یہ مساواتیں طبیعاتی کیمیا میں واقع ہوتی ہیں جبکہ شئے ا ایک (۲۴۵)
درمیانی شئے ب بنے جو پھر ایک تیسری شئے ج میں تبدیل ہو۔
لا، ما، ی کسی وقت ت پر علی الترتیب ا، ب، ج کے "ارتکاز"
ہیں۔ دیکھو ہارکورٹ اور ایسن " Phil. Trans. " بابتہ سنہ ۱۸۶۶ء
اور سنہ ۱۸۶۷ء]

(۹۳) ایک سادہ حرکی نظام پر جس کو آزادی کا ایک درجہ حاصل ہے کسی دوسرے حرکی نظام کا اثر جبکہ اول الذکر نظام ثانی الذکر کے ساتھ مربوط ہو مساوات

$$\ddot{لا} + ۲\,مہ\,\dot{لا} + ن^۲\,لا = لا$$

سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

اگر موجوں کے مہیج نظام کو یکساں برقرار رکھا جائے اور اس لیے
لا = ا جم ع ت تو ع کی وہ قیمت معلوم کرو جس کے لیے گمک ہے
اور ثابت کرو کہ اگر مہ ایک خاص قیمت سے متجاوز ہو تو گمک نہ ہوگی۔
دونوں صورتوں کی تمثیل کے لیے منحنی کھینچو۔ [Math. Trip]

(۹۴) تفرقی مساوات

$$\ddot{لا} + ۲ک\,\dot{لا} + ن^۲\,لا = ۰$$

کو حل کرو جبکہ $ک^۲ < ن^۲$۔

ایک ایسے رقاص کی صورت میں جو چھوٹے اہتزاز کر رہا ہو اور ایک پورے اہتزاز کا وقت ۲ ثانیے ہو اور ہوا کی وجہ سے زاویئی ابطاء ۰٫۰۴ × (رقاص کی زاویئی رفتار) ہو تو ثابت کرو کہ ۱° کا حیطہ ۱۰ مکمل اہتزازوں میں تقریباً ۰٫۴° تک گھٹ جائے گا۔

[Math. Trip.] [لوک۱۰ و = ۰٫۴۳۴۳]

(۹۵) ایک نظام کی حرکت عملاً ایک واحد محدد لا پر منحصر ہے، اِس کی توانائی کسی لمحہ پر ضابطہ $\frac{1}{2}\,\text{م}\,\dot{\text{لا}}^2 + \frac{1}{2}\,\text{ر}\,\text{لا}^2$ سے بیان ہوتی ہے، اور اِس کی توانائی کے فرکی قصر کی وقتی شرح $\frac{1}{2}\,\text{ک}\,\dot{\text{لا}}^2$ ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کے آزاد اہتزاز کا دور (تہ)

$$2\pi\left(\frac{\text{ر}}{\text{م}} - \frac{1}{16}\,\frac{\text{ک}^2}{\text{م}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ہے۔

ثابت کرو کہ قسری اہتزاز جو نمونہ ا جم ع ت کی ایک خلل ڈالنے والی قوت سے پیدا ہوتا ہے اپنی بڑی سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ $\text{ع}^2 = \frac{\text{ر}}{\text{م}} - \frac{\text{ک}^2}{8\,\text{م}^2}$ اور اُس وقت اِس اہتزاز کا حیطہ $\frac{\text{ا م تہ}}{\pi\,\text{ک}}$ ہے اور اس کی ہیئت (Phase) قوت کی ہیئت سے بقدر $\text{سس}^{-1}\frac{4\,\text{م ع}}{\text{ک}}$ کے پیچھے رہتی ہے۔ [Math. Trip.]

(۹۶) ثابت کرو کہ اندراج $\text{ت} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2$ سے مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \text{ف}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 = \text{ق}$$

خطی شکل

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + 2\,\text{ع}\,\text{ت} = \text{ق}$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

$$(\text{س}+1)\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} + \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right)^2 = (\text{س}-1)\,\text{ج}$$

سے، اگر $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = 0$ اور $\text{س} = 2\,\text{ا}$ جبکہ $\text{ت} = 0$

$$\left(\frac{\text{ف س}}{\text{ف ت}}\right)^2 = \frac{2\text{ج}}{3}\left(\text{س} - 2\text{ا}\right)$$

اور

$$\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{ف ت}^2} = \frac{\text{ج}}{3}$$

حاصل کرو۔

(۲۴۶) [اِس سے حسب ذیل حرکی مسئلہ کا حل حاصل ہوتا ہے: "ایک یکساں زنجیر ایک افقی میز پر لچھے کی شکل میں پڑی ہے اور اِس کا ایک سرا ایک چکنی ہلکی چرخی پر سے جو مستوی کے اوپر ارتفاع ا پر ہے گذرتا ہے، ابتداً زنجیر کا طول ۲ ا آزادانہ دوسری جانب لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ حرکت میں ایکساں اسراع ہے۔" دیکھو لونی کی کتاب "ایک ذرہ اور اُستوار اجسام کا علم حرکت" صفحہ ۱۳۱] -

(۹۷) مساوات

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف ر}}\left(\text{ر}^2\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}}\right) + \frac{1}{\text{جب طہ}}\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}\left(\text{جب طہ}\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}}\right) = 0$$

کا ایک حل شکل

$$\text{فہ} = \text{ف}(\text{ر})\ \text{جم طہ}$$

میں معلوم کرو اگر یہ دیا گیا ہو کہ

$$-\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} = \text{و جم طہ جبکہ ر} = \text{ا}$$

اور

$$-\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}} = 0 \text{ جبکہ ر} = \infty$$

[فہ رفتار قوہ ہے جبکہ نصف قطر ا کا ایک کرہ ایک خطِ مستقیم میں رفتار و کے ساتھ ایک مائع میں جو لاتناہی پر ساکن ہے حرکت کرے۔ دیکھو ریمزے کی کتاب (Hydro Mechanics) حصۂ دوم صفحہ ۱۵۲-]

(۹۸) $\dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{ما}}{\text{جف ت}^{۲}} = \text{ج}^{۲}\,\dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{ما}}{\text{جف لا}^{۲}}$

کا حل معلوم کرو جو معدوم ہو جبکہ لا = ۰ اور ا جم (ع ت + ا) میں تحویل ہو کہ جبکہ لا = ب ۔

[اِس سے ایک تنی ہوئی ڈوری کے ایک حصہ کی شکل معلوم ہوتی ہے جبکہ ڈوری دونوں سِروں پر ثابت ہو اور اس کا ایک معلومہ نقطہ دوری ہٹاؤ ا جم (ع ت + ا) کے ساتھ متحرک رکھا گیا ہو زیر بحث حصہ وہ ہے جو دئے ہوئے نقطہ اور ایک سرے کے درمیان ہے ۔ دیکھو ریمزے کی کتاب (Hydro-Mechanics) حصہ دوم صفحہ ۴۱۲]

(۹۹) $\dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف ت}^{۲}} = \text{ج}^{۲}\left(\dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف ر}^{۲}} + \dfrac{۲}{\text{ر}}\,\dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف ر}}\right)$

کا حل شکل

رفہ = ف (ج ت - ر) + فا (ج ت + ر)

میں معلوم کرو ۔

[جہاں ہوا میں آواز کے ایک کروی ماخذ کا رفتار قوہ فہ ہے ۔ دیکھو ریمزے کی محولہ بالا کتاب صفحہ ۳۴۵]

(۱۰۰) $\dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف لا}^{۲}} + \dfrac{\text{جف}^{۲}\,\text{فہ}}{\text{جف ما}^{۲}} = ۰$

کا ایک ایسا حل معلوم کرو کہ

$\dfrac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = ۰$ جبکہ ما = - ھ

اور فہ ایسے بدلے جیسے جم (م لا - ن ت) جبکہ ما = ۰

[فہ گہرائی ھ کی ایک نہر میں موجوں کا رفتار قوہ ہے نہر کے رُخ انتصابی ہیں ۔ دیکھو ریمزے کی کتاب صفحہ ۲۶۵]

(۱۰۱) ہمزاد تفرقی مساواتوں

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} - ۲\text{ن}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{ع}^2\,\text{لا} = ۰،$$

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرت}^2} + ۲\text{ن}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{ع}^2\,\text{ما} = ۰$$

(۱۰۱) کا حل، ابتدائی شرطوں

$$\text{لا} = \text{ا}،\ \text{ما} = ۰،\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۰،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = ۰$$

کے ساتھ، شکل

$$\text{ی} = \frac{\text{ا}}{۲\text{ق}}\left\{(\text{ق}+\text{ن})\,\text{قو}^{\text{خ}(\text{ق}-\text{ن})\text{ت}} + (\text{ق}-\text{ن})\,\text{قو}^{-\text{خ}(\text{ق}+\text{ن})\text{ت}}\right\}$$

میں حاصل کرو جہاں

$$\text{ی} = \text{لا} + \text{خ}\,\text{ما} \quad \text{اور} \quad \text{ق} = \sqrt{\text{ع}^2 + \text{ن}^2}$$

ثابت کرو کہ حل بر تدویر (Hypocycloid) کو تعبیر کرتا ہے جو نصف قطروں ا اور $\frac{\text{ان}}{\text{ق}}$ کے دو ہم مرکز دائروں کے درمیان ہے۔

[اس مثال سے فوکو کے رقاص کے تجربہ کا وہ نظریہ حاصل ہوتا ہے جس سے زمین کی گردش ثابت ہوتی ہے۔ دیکھو برامو چ "Pro. London Math. Soc. 1914" بابتہ سنہ ۱۹۱۴ء]

(۱۰۲) سیاروی حرکت کی آئنسٹائن کی مساوات

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ع}}{\text{فرفہ}^2} + \text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^2} + ۳\,\text{م}\,\text{ع}^2$$

کا تقریبی حل حسب ذیل طریقہ پر معلوم کرو:

(ا) چھوٹی رقم $۳\,\text{م}\,\text{ع}^2$ کو نظر انداز کرو، اور حاصل کرو

$\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^2}\left\{1 + \text{ز جم}\,(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$، جیساکہ نیوٹن کی حرکیات میں۔

(ب) ع کی اس قیمت کو چھوٹی رقم ۳ م ع^2 میں درج کرو اور حاصل کرو

$$\frac{d^2\text{ع}}{d\,\text{فہ}^2} + \text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^2} + \frac{3\,\text{م}^3}{\text{ھ}^4} + \frac{6\,\text{م}^3}{\text{ھ}^4}\,\text{ز جم}\,(\text{فہ} - \text{قہ})$$

$$+ \frac{3\,\text{م}^3\,\text{ز}^2}{2\,\text{ھ}^4}\left\{1 + \text{جم}\,2\,(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$$

(ج) اس تفرقی مساوات کی بائیں جانب کی تمام رقموں کو سوائے $\frac{\text{م}}{\text{ھ}^2}$ اور $\frac{6\,\text{م}^3}{\text{ھ}^4}\,\text{ز جم}\,(\text{فہ} - \text{قہ})$ کے نظرانداز کرو۔

جم (فہ - قہ) والی رقم کو رکھنا چاہیئے، اس کا دَورہ وہی ہے جو متمم تفاعل کا ہے اور اس لیے اس سے ایک مسلسل بڑھنے والا خاص تکملہ پیدا ہوتا ہے۔ [دیکھو گنگ کا مسئلہ مثال ۳۶ صفحہ ۶۹]۔

پس حاصل کرو

$$\text{ع} = \frac{\text{م}}{\text{ھ}^2}\left\{1 + \text{ز جم}\,(\text{فہ} - \text{قہ}) + \frac{3\,\text{م}^2}{\text{ھ}^2}\,\text{ز فہ جب}\,(\text{فہ} - \text{قہ})\right\}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ھ}^2}\left\{1 + \text{ز جم}\,(\text{فہ} - \text{قہ} - \text{صہ})\right\} \text{ تقریباً}$$

جہاں $\text{صہ} = \frac{3\,\text{م}^2}{\text{ھ}^2}\,\text{فہ}$ اور صہ^2 کو ترک کردیا گیا ہے۔

[اس نتیجہ سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ جب سیارہ ایک گردش میں سے حرکت کرلیتا ہے تو حضیض (جو فہ - قہ - صہ = ۰ سے حاصل ہوتا ہے) گردش کی ایک کسر کے مساوی جو $\frac{\text{صہ}}{\text{فہ}} = \frac{3\,\text{م}^2}{\text{ھ}^2}$ سے حاصل ہوتی ہے آگے بڑھتا ہے۔ جب مستقلوں کو عددی قیمتیں دیجاتی ہیں تو یہ معلوم ہوگا کہ

آئنسٹائن کے نظریہ سے اُس مشہور بے قاعدگی کا ازالہ ہوتا ہے جو عطارد کے حضیض کی حرکت کے مشاہدہ کردہ اور محسوبہ نتیجوں میں پائی جاتی ہے۔ دیکھو ایڈنگٹن کی

Report on the Relativity Theory of Gravitation, pp. 48-52

(۲۴۸) (۱۰۳) لا، ما، لاَ، ماَ کا ایک تفاعل ل (لا، ما، لاَ، ماَ) ہے اور لا اور ما کی تعریف مساواتوں

$$\text{لا} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}} ،\quad \text{ما} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ماَ}}$$

سے کی گئی ہے۔

اگر اِن مساواتوں کو لاَ اور ماَ کے لیے لا، ما، لا، ما کے تفاعلوں کے طور پر حل کیا جا سکے اور اگر ھ (لا، ما، لا، ما) وہ تفاعل ہو جو

$$\text{لا لاَ} + \text{ما ماَ} - \text{ل}$$

کو کُلاً لا، ما، لا، ما کی رقوم میں بیان کرنے سے حاصل ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} = \text{لاَ} \qquad (۱)$$

اور

$$\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} \qquad (۲)$$

نیز ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}\right) = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} \qquad (۳)$$

مساوات

$$\frac{\text{ف لا}}{\text{فت}} = -\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} \qquad (۴)$$

میں مستحیل ہوتی ہے۔

[یہ علم حرکت میں ہیملٹونی استحالہ ہے۔ مساوات (۳) تعمیمی محددوں میں حرکت کی لگرانجی مساوات کا نمونہ ہے۔ ہیملٹن اِس کی بجائے مساواتوں (۱) اور (۴) کا زوج لیتا ہے۔ دیکھو راؤتھ کی کتاب (Elementary Rigid Dynamics) آٹھواں باب۔ اِس استحالہ کا مقابلہ ساتویں باب کے آخر میں دی ہوئی تفرق مثالوں میں سے مثال ۲۱ کے استحالہ کے ساتھ کرو جس میں دو جزئی تفرقی مساواتیں تنویت کے اصول سے ایک دوسرے سے اخذ کی جا سکتی ہیں۔]

(۱۰۴) ثابت کرو کہ اگر ہیملٹن کی جزئی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}} + \text{ھ}\left(\text{لا}_1، \text{لا}_2، \ldots، \text{لا}_{\text{ن}}، \text{ع}_1، \text{ع}_2، \ldots، \text{ع}_{\text{ن}}، \text{ت}\right) = 0$$

پر جیکوبی کا طریقہ (دفعہ ۱۴۰) استعمال کیا جائے تو مساواتیں

$$\frac{\text{فرلا}_{\text{ر}}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ع}_{\text{ر}}}، \quad \frac{\text{فرع}_{\text{ر}}}{\text{فرت}} = -\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}_{\text{ر}}}، \quad (\text{ر} = 1، 2، \ldots، \text{ن})$$

حاصل ہوتی ہیں جو ایک حرکی نظام کی حرکت کی مساواتیں، ہیملٹن کی شکل میں، ہیں۔

[دیکھو وھیٹیکر کی کتاب (Analytical Dynamics) طبع دوم دفعہ ۱۴۲]

(۱۰۵) (آ) ثابت کرو کہ اگر تفرقی مساواتوں کے نظام

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{ع}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})} = \frac{\text{فرما}}{\text{ق}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})} = \frac{\text{فری}}{\text{ر}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی})}$$

کے کوئی دو تکملے

$$\text{ع}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = \text{ا}$$

$$\text{د}(\text{لا}، \text{ما}، \text{ی}) = \text{ب}$$

ہوں تو

$$\frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{جف}(\text{ء}،\text{و})}{\text{جف}(\text{ما}،\text{ی})}=\frac{1}{\text{ق}}\,\frac{\text{جف}(\text{ء}،\text{و})}{\text{جف}(\text{ی}،\text{لا})}=\frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{جف}(\text{ء}،\text{و})}{\text{جف}(\text{لا}،\text{ما})}=\text{م}(\text{لا}،\text{ما}،\text{ی})$$

فرض کرو

[م کو نظام کا ضارب کہتے ہیں]

(۲) ثابت کرو کہ م، جزئی تفرقی مساوات (۲۴۹)

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}(\text{م ع})+\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}(\text{م ق})+\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}(\text{م ر})=\cdot$$

کو پورا کرتا ہے۔

(۳) اگر نظام کا کوئی اور ضارب ن (لا، ما، ی) ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ع}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)+\text{ق}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)+\text{ر}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\right)=\cdot$$

اور اِس لیے یہ کہ

$$\frac{\text{جف}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}،\text{ء}،\text{و}\right)}{\text{جف}(\text{لا}،\text{ما}،\text{ی})}=\cdot\ \text{متماثلاً}$$

اِس طرح $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$، ء اور و کا ایک تفاعل ہے اور $\frac{\text{م}}{\text{ن}}=\text{ج}$، تفرقی مساواتوں کے ابتدائی نظام کا ایک تکملہ ہے۔

(۴) اگر ء (لا، ما، ی) = ا کو ی کے لیے حل کیا جا سکے اور اس سے ی = ف (لا، ما، ا) حاصل ہو اور اگر ی کی اِس قیمت کو و، ع، ق، ر، م میں درج کرنے سے لا، ما، ا کے جو تفاعل حاصل ہوں اُن کو بڑے حرفوں **و**، **ع**، **ق**، **ر**، **م** سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر لا}}{\textbf{ع}}=\frac{\text{فر ما}}{\textbf{ق}}$ کا ایک تکملہ **و** (لا، ما، ا) = ب ہے۔

نیز ثابت کرو کہ

$$\text{م ع} = - \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

اور

$$\text{م ق} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \cdot \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

(جہاں $\frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$ کو لا، ما، ا کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے)، اِس لیے

$$\text{فرو} = \text{م} (\text{ق فرلا} - \text{ع فرما}) \div \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$$

[اِس سے یہ واضح ہوتا ہے کہ اگر کوئی تکملہ ۶ = ا اور کوئی ضارب م معلوم ہوں تو م (ق فرلا - ع فرما) $\div \frac{\text{جف ۶}}{\text{جف ی}}$ ایک کامل تفرقہ ہوگا اور اِس سے نظام کا ایک تکملہ حاصل ہوگا جبکہ ا کی بجائے ۶ (لا، ما، ی) کو مندرج کیا جائے۔

اِس مسئلے کے ثبوت کے لیے وہیٹیکر کی "(Advanced Rigid Dynamics)" طبع دوم دفعہ 119 دیکھو۔ اِس سے زیادہ عام مسئلہ یہ ہے کہ اگر تفرقی مساواتوں کے ایک نظام

$$\frac{\text{فرلا}_{۱}}{\text{ع}_{۱}} = \frac{\text{فرلا}_{۲}}{\text{ع}_{۲}} = \cdots = \frac{\text{فرلا}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{ع}}$$

کے (ن - ۱) تکملے معلوم ہوں اور کوئی ضارب بھی معلوم ہو تو دوسرا تکملہ متعین کیا جا سکتا ہے۔ اِس کو بالعموم جیکوبی کے آخری ضارب کا مسئلہ کہتے ہیں۔ علم حرکت میں یہاں اِس مسئلہ کی کچھ اہمیت ہے (دیکھو وہیٹیکر، دسواں باب) آخری ضارب اکائی ہوتا ہے۔]

(۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا ی} - ۲\,\text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{۲\,\text{لا} - \text{ما ی}} = \frac{\text{فری}}{\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$$

کا ایک ضارب اکائی ہے اور ایک تکملہ لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ۱ ہے، فرض کرو ۶ (لا، ما، ی) = ۱ ۔

ثابت کرو کہ اس صورت میں

م (ق فرلا – ع فرما) / (فر ۶ / فر ی) = فر { – ½ لا ما – √(۱ – لا^۲ – ما^۲) }

اور اس لیے دوسرا تکملہ لا ما + ۲ ی = ب حاصل کرو۔

(۱۰۶) ثابت کرو کہ اگر ما = ∫_ا^ب قو^{لات} ف (ت) فرت جہاں ا اور (۲۵۰)

ب مستقل ہیں تو

لافہ (فر / فرلا) ما + خہ (فر / فرلا) ما = قو^{ب لا} فہ (ب) ف (ب) – قو^{ا لا} فہ (ا) ف (ا)

– ∫_ا^ب قو^{لات} { فہ (ت) فَ (ت) + فہَ (ت) ف (ت) – خہ (ت) ف (ت) } فرت

اس سے ثابت کرو کہ ما، تفرقی مساوات

لافہ (فر / فرلا) ما + خہ (فر / فرلا) ما = ۰

کو پورا کرے گا اگر فہ (ت) ف (ت) = قو^{∫ (خہ (ت) / فہ (ت)) فرت}

اور قو^{ب لا} فہ (ب) ف (ب) = ۰ = قو^{ا لا} فہ (ا) ف (ا)

اس طریقہ کو

لا (فر^۲ ما / فرلا^۲) + (فرما / فرما) – لا ما = ۰

کا حل

$$\text{ما} = \text{آ} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{و}^{\text{لات}} \, \text{فت}}{\sqrt{\text{ت}^2 - 1}} + \text{ب} \int_{1}^{\infty} \frac{\text{و}^{\text{لات}} \, \text{فت}}{\sqrt{\text{ت}^2 - 1}}$$

معلوم کرنے میں جو لا > ۰ کے لیے درست ہے استعمال کرو۔

صورت لا < ۰ کے متناظر حل، پہلے تکملہ کے حدود کو ∞- تا ۱- کی بجائے ۱ تا ∞ لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

[۱۰۶ تا ۱۰۸ مثالوں میں تفرقی مساواتوں کے حلوں کو محدود تکملوں کی شکل میں حاصل کرنے کے لیے چند اہم ترین طریقے بیان ہوئے ہیں]

(۱۰۷) تصدیق کرو کہ

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \text{ک} \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف لا}^2}$$

کا ایک حل

$$\text{و} = \text{و} + \frac{2\,\text{و}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\text{لا}}{2\sqrt{\text{ک ت}}}} \text{و}^{-\text{ی}^2} \, \text{فی}$$

ہے اگر وہ ت = ۰ پر لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے و + و میں اور لا کی تمام منفی قیمتوں کے لیے و - و میں تحویل ہو۔

[و، وقت ت پر ایک ٹھوس جسم کے ایک نقطہ کی تپش ہے جہاں یہ نقطہ ایک خاص مستوی سے فاصلہ لا پر ہے اور جسم تمام سمتوں میں لا تناہی تک پھیلا ہوا ہے اور یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ ابتداً مستوی لا = ۰ کے دو جانبوں پر تپش کی دو مستقل قیمتیں و + و اور و - و تھیں۔

کیلون نے و کے اس جملہ کو زمین کی عمر کا اندازہ لگانے میں استعمال کیا تھا (دیکھو تھامسن اور ٹیٹ کی نیچرل فلاسفی ضمیمہ D) اس مسئلہ میں ایک نئی پیچیدگی اس انکشاف سے پیدا ہوگئی ہے کہ چٹانوں کے تابکارانہ تکسر سے حرارت کی پیدائش مسلسل جاری ہے]

(۱۰۸) (ا) ثابت کرو کہ مستقل سروں کی خطی جزئی تفرقی مساوات

$$\text{فا}\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\text{،}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{،}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\right)\text{و} = ۰$$

کا ایک حل

$$\text{و} = \iint \text{و}^{\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی}}\ \text{ف(س، ت) فرس فرت}$$

ہے (حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں)

(۲۵۲) اگر ل، م، ن کوئی مستقل ہوں یا س اور ت کے ایسے تفاعل ہوں کہ

$$\text{فا (ل، م، ن)} = ۰$$

اِس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر لا، ما، ی، ... اور (ن - ۱) مبدل س، ت، ... ہوں -

$$\text{و} = \iint \text{و}^{\text{س(لاجم ت} + \text{ماجب ت} + \text{س ی)}}\ \text{ف(س، ت) فرس فرت}$$

کو

$$\frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{و}}{\text{جف ما}^2} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ی}}$$

کے حل کے طور پر حاصل کرو - (H. Todd)

(ب) اگر $\text{فا}\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\text{،}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\text{،}\ \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}}\right)\text{و} = ۰$ مستقل سروں کی ایک متجانس خطی جزئی تفرقی مساوات ہو تو ثابت کرو کہ اِس کا ایک حل

$$\text{و} = \int \text{ف(ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی، ت) فرت}$$

ہے جہاں حدود کوئی اختیاری مقداریں ہیں جو لا، ما، ی کے تابع نہیں ہیں اور ل، م، ن کوئی مستقل ہیں یا ت کے ایسے تفاعل ہیں کہ

$$\text{فا (ل، م، ن)} = ۰$$

اس مسئلہ کی توسیع اُس صورت پر کرو جس میں ن متبوع متغیر اور (ن - ۲) مبدل ہوں -

[دیکھو ایچ - ٹاڈ، میسنجر آف میتھیمیٹکس ۱۹۱۴ء ۴۲]

$$و = \int ف \,(لا\, جم\, ت + ما\, جب\, ت + خ\, ی،\, ت)\, فر\, ت$$

کو

$$\frac{جف^2 و}{جف\, لا^2} + \frac{جف^2 و}{جف\, ما^2} + \frac{جف^2 و}{جف\, ی^2} = ۰$$

کے حل کے طور پر حاصل کرو۔ [لاپلاس کی مساوات کا وہٹیکر کا حل]

(۱۰۹) تفرقی مساوات

$$\frac{فر\, ما}{فر\, لا} + ما = \frac{1}{لا}$$

میں آزمائشی حل

$$ما = ل_{.} + \frac{ل_1}{لا} + \frac{ل_2}{لا^2} + \ldots$$

کو درج کر کے سلسلہ

$$ما = \frac{ل}{لا} + \frac{|1}{لا^2} + \frac{|2}{لا^3} + \ldots$$

حاصل کرو۔

ثابت کرو کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متسع ہے۔

خاص تکملہ

$$ما = قو^{-لا} \int_{\infty}^{لا} \frac{قو^{لا}}{لا}\, فر\, لا$$

کو حاصل کرو اور تکمل بالحصص کی تکرار سے ثابت کرو کہ

$$قو^{-لا} \int_{\infty}^{لا} \frac{قو^{لا}}{لا}\, فر\, لا = \frac{ل}{لا} + \frac{|1}{لا^2} + \frac{|2}{لا^3} + \ldots + \frac{|ن}{لا^{ن+1}}$$

$$+ قو^{-لا} \int_{\infty}^{لا} \frac{|ن+1\, قو^{لا}}{لا^{ن+2}}\, فر\, لا$$

اِس سے ثابت کرو کہ اگر لا منفی ہو تو خاص تکمّلہ کی بجائے سلسلہ کی ن+۱ رقموں کو لینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ (ن+۱) ویں رقم کی عددی قیمت سے کم ہے۔ [ایسے سلسلہ کو متقاربی کہتے ہیں۔ دیکھو برامویچ کی (Inf. Series) دفعات ۱۳۰ تا ۱۳۹ یا طبع دوم دفعات ۱۰۶ تا ۱۱۸]

(۱۱۰) اگر تفاعلوں $\text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا})$ کے تواتر کی تعریف (۲۵۲)

$$\text{ف}_{۰}(\text{لا}) = \text{ا} + \text{ب}(\text{لا} - \text{ج})$$ (جہاں ا، ب، ج مستقل ہیں)

اور
$$\text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا}) = \int_{\text{ج}}^{\text{لا}} (\text{ت} - \text{لا})\,\text{فا}(\text{ت})\,\text{ف}_{\text{ن}-۱}(\text{ت})\,\text{فر}\,\text{ت}$$

سے کیجائے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}}\,\text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا}) = -\,\text{فا}(\text{لا})\,\text{ف}_{\text{ن}-۱}(\text{لا})$$

اِس سے ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^{۲}} + \text{ما}\,\text{فا}(\text{لا}) = ۰$$

کا ایک حل
$$\text{ما} = \sum_{۰}^{\infty} \text{ف}_{\text{ن}}(\text{لا})$$

ہے بشرطیکہ لامتناہی سلسلوں پر بعض اعمال جائز ہوں (جن کے ثبوت کے لیے وہیٹیکر اور واٹسن کی modern Analysis صفحہ ۱۸۹[۱] دیکھو۔ وہ اس طریقہ سے دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات کے لیے "مسئلہ موجودگی" کا ثبوت دیتے ہیں۔)

(۱۱۱) ثابت کرو کہ مستقل سروں کی دو خطی ہمزاد تفرقی مساواتوں

$$\text{ف}(\text{عف})\,\text{لا} + \text{فا}(\text{عف})\,\text{ما} = ۰$$

$$\text{فہ}(\text{عف})\,\text{لا} + \text{خہ}(\text{عف})\,\text{ما} = ۰$$ (جہاں $\text{عف} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}\,\text{ت}}$)

[۱] چوتھے اور تیسرے اڈیشنوں میں صفحہ ۱۹۵۔

کے حل[1] کو

لا = فا (عف) و،

ما = - فہ (عف) و

لکھا جاسکتا ہے جہاں و،

{فہ (عف) خہ (عف) - فا (عف) فہ (عف)} و = ۰

کا کامل ابتدائی ہے۔

اِس سے ثابت کرو کہ اگر ف، فا، فہ، خہ کے درجے عف میں علی الترتیب ع، ق، ر، س ہوں تو حل میں وقوع پذیر ہونے والے اختیاری مستقلوں کی تعداد بالعموم عددوں (ع + س) اور (ق + ر) میں سے بڑے عدد کے مساوی ہوگی لیکن اگر ع + س = ق + ر تو اختیاری مستقلوں کی تعداد کمتر ہوسکتی ہے یا صفر بھی ہوسکتی ہے جیساکہ حسب ذیل مساواتوں کی صورت میں:

(عف + ۱) لا + عف ما = ۰،

(عف + ۳) لا + (عف + ۲) ما = ۰

(۱۱۲) (ا) ثابت کرو کہ اگر پہلے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات

ع (لا) ما، + ف (لا) ما = ۰

کے کوئی دو حل

ما = ۶ (لا)،

ما = و (لا)

ہوں تو

(و ۶، - ۶ و،) / ۶۲ = ۰

ا؎ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ عام ترین حل نہیں ہوسکتا اگر لا اور ما کے لیے باہم مختلف اختیاری مستقلوں کی تعداد اُس تعداد سے کم ہو جو و کے لیے حاصل ہوتی ہے جیساکہ اُسوقت ہوگا جبکہ (ف (عف) اور فا (عف)) میں ایک مشترک جزو ضربی صرف ایک مستقل سے مختلف ہو۔

اور اس لیے و = ا ۶ جہاں ا ایک مستقل ہے۔

(ب) ثابت کرو کہ اگر دوسرے رتبہ کی خطی تفرقی مساوات

ع (لا) ما۲ + ق (لا) ما۱ + ر (لا) ما = ۰

کے کوئی تین حل

ما = ۶ (لا)، ما = و (لا)، ما = ط (لا) (۲۵۳)

ہوں تو

ع فر/فرلا (ط و۱ - و ط۱) + ق (ط و۱ - و ط۱) = ۰

اور ع فر/فرلا (۶ و۱ - و ۶۱) + ق (۶ و۱ - و ۶۱) = ۰

اس سے ثابت کرو کہ

ط = ا ۶ + ب و

[اس طرح قدم بہ قدم آگے بڑھ کر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ن ویں رتبہ کی مشابہ تفرقی مساوات کے ن سے زیادہ خطی غیر تابع حل نہیں ہو سکتے]۔

(۱۱۳) فرض کرو کہ لا کے کوئی تین تفاعل ۶، و، ط ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر تین ایسے مستقل ا، ب، ج معلوم ہو سکیں کہ ما ≡ ا ۶ + ب و + ج ط متماثلاً معدوم ہو تو

| ۶ | و | ط |
| ۶۱ | و۱ | ط۱ | = ۰
| ۶۲ | و۲ | ط۲ |

اور اس کے بالعکس اگر یہ مقطعہ جس کو "رانسکی" مقطعہ کہتے ہیں معدوم ہو تو تفاعل خطی طور پر غیر تابع نہیں ہوتے۔

ن تفاعلوں کی صورت میں ان نتیجوں کی توسیع کرو۔

[دوسرے رتبہ کی اُس تفرقی مساوات پر غور کرو جو مقطعہ میں ۶، ۶۱، ۶۲ کی

بجائے علی الترتیب ما، ما۱، ما۲ رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ ایسی کسی مساوات کے رو سے زیادہ خطی طور پر غیر تابع تکملے نہیں ہو سکتے۔

"رانسکی" مقطعہ رانسکی (Wronski) سے منسوب ہے جو مقطعات پر ابتدائی مقالہ نگاروں میں سے تھا۔

(۱۱۴) ثابت کرو کہ $\text{ی} = \text{قو}^{\frac{1}{2}\text{لا}\left(\text{ت} - \frac{1}{\text{ت}}\right)}$ سے جزئی تفرقی مساوات

$$\text{ت}\,\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\left(\text{ت}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ت}}\right) = \frac{1}{4}\,\text{لا}^{2}\left(\text{ت} + \frac{1}{\text{ت}}\right)^{2}\text{ی} + \frac{1}{2}\,\text{لا}\left(\text{ت} - \frac{1}{\text{ت}}\right)\text{ی}$$

پوری ہوتی ہے۔

اس لیے اگر پھیلاؤ

$$\text{قو}^{\frac{1}{2}\text{لا}\left(\text{ت} - \frac{1}{\text{ت}}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{ت}^{\text{ن}}\ \text{سبجن}\,(\text{لا})$$

میں $\text{ت}^{\text{ن}}$ کے سر کو سبجن (لا) سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ رتبہ ن کی بیسل کی مساوات

$$\text{لا}^{2}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + (\text{لا}^{2} - \text{ن}^{2})\,\text{ما} = 0$$

ما = سبجن (لا) سے پوری ہوتی ہے۔

[لا متناہی سلسلوں پر اعمال کا اطلاق کرنے میں بعض امور پر غور کرنا پڑتا ہے]

(۱۱۵) اگر $\text{ع}_{\text{لا}}$ سے لا کا ایک تفاعل تعبیر ہو اور عامل ع سے $\text{ع}_{\text{لا}}$، $\text{ع}_{\text{لا}+1}$ میں تبدیل ہو تو حسب ذیل نتیجے ثابت کرو:

$$(\text{ا})\quad \text{ع}\,\text{ا}^{\text{لا}} = \text{ا} \times \text{ا}^{\text{لا}} \quad \text{یعنے} \quad (\text{ع} - \text{ا})\,\text{ا}^{\text{لا}} = 0.$$

$$(2)\quad \text{ع}^{2}\,\text{ا}^{\text{لا}} = \text{ا}^{2} \times \text{ا}^{\text{لا}}$$

(۳) ع (لا ا^لا) = ا (لا ا^لا) + ا × ا^لا یعنے (ع - ا) (لا ا^لا) = ا × ا^لا

(۴) (ع - ا)^۲ (لا ا^لا) = ۰

(۵) (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) ا^لا = (ب. ا^۲ + ب۱ ا + ب۲) ا^لا اگر ب مستقل ہوں۔

(۶) خطی تفرقی مساوات (۲۵۴)

ب. ی_{۲+لا} + ب۱ ی_{۱+لا} + ب۲ ی_لا = ۰

یعنے (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) ی_لا = ۰

کا ایک حل ی_لا = ا ا^لا + ب ب^لا

ہے اگر ا اور ب اختیاری مستقل ہوں اور ا اور ب، امدادی مساوات ب. م^۲ + ب۱ م + ب۲ = ۰ کی اصلیں ہوں۔ [دیکھو دفعہ ۲۵]

اِس طریقہ سے (۲ ع^۲ + ۵ ع + ۲) ی_لا = ۰ کو حل کرو۔

(۷) (ع^۲ - ۲ ا ع + ا^۲) ی_لا = ۰ کا ایک حل ی_لا = (ا + ب لا) ا^لا ہے۔

یہاں امدادی مساوات م^۲ - ۲ ا م + ا^۲ = ۰ کی اصلیں مساوی ہیں (دیکھو دفعہ ۳۴)۔

(۸) (ب. ع^۲ + ب۱ ع + ب۲) ی_لا = ۰

کا ایک حل ی_لا = ر^لا (ف جم لا ط + ق جب لا ط)

ہے اگر ف اور ق اختیاری مستقل ہوں، امدادی مساوات

ب. م۲ + ب۱ م + ب۲ = ۰

کی اصلیں ف ± خ ق ہوں، اور

ف + خ ق = ر (جم ط + خ جب ط) (دیکھو دفعہ ۲۶)

اِس طریقہ سے (ع۲ - ۲ ع + ۲) ع لا = ۰ کو حل کرو۔

(۹) مستقل سروں کی خطی تفرقی مساوات

فا (ع) ع لا ≡ (ب. عن + ب۱ عن-۱ + ... + بن-۱ ع + بن) ع لا = ف (لا)

کا عام حل ایک خاص تکملہ اور متمم تفاعل کا مجموعہ ہے جہاں متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو بائیں جانب کے لا کے تفاعل کی بجائے صفر درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۹)

(۱۰)   فا (ع) ع لا = ا لا

کا خاص تکملہ $\frac{ا^{لا}}{فا (ا)}$ ہے بشرطیکہ فا (ا) ≠ ۰۔ (دیکھو دفعہ ۲۵)

اِس طریقہ سے (ع۲ + ۸ ع - ۹) ع لا = ۲ لا کو حل کرو۔

[مزید تمثیلوں کے لیے دیکھو بُول کی کتاب (Finite Differences) گیارہواں باب]

(۱۱۶) لگرانج کی مساوات

ما = لا فا (ع) + ف (ع)

پر دفعہ ۵۳ کا طریقہ استعمال کر کے ثابت کرو کہ بالعموم کامل ابتدائی

حسب ذیل مبدلی شکل

$$\text{لا} = \text{ج فہ}(\text{ع}) + \text{سا}(\text{ع})،$$

$$\text{ما} = \text{ج فا}(\text{ع})\,\text{فہ}(\text{ع}) + \text{فا}(\text{ع})\,\text{سا}(\text{ع}) + \text{ف}(\text{ع})$$

میں حاصل ہوتا ہے (لیکن یہ کلیرو کی شکل کے لیے درست نہیں ہے جس میں فا (ع) = ع)۔

اِس سے ثابت کرو کہ اگر ج_1، ج_2، ج_3 کوئی تین منحنی ہوں جو اِس ابتدائی میں شامل ہوں اور ج کی قیمتوں ج_1، ج_2، ج_3 کے متناظر ہوں اور اگر ج_1، ج_2، ج_3 پر علی الترتیب نقطے $\text{ف}_1(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ $\text{ف}_2(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$، $\text{ف}_3(\text{لا}_3، \text{ما}_3)$ ایسے ہوں کہ اِن نقطوں پر کے مماس سب کے سب متوازی ہوں تو

$$\frac{(\text{لا}_3 - \text{لا}_1)}{\text{لا}_3 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ج}_3 - \text{ج}_1}{\text{ج}_3 - \text{ج}_2} = \frac{\text{ما}_3 - \text{ما}_1}{\text{ما}_3 - \text{ما}_2}$$

یعنی ف_1، ف_2، ف_3 ہم خط ہیں اور نسبت $\text{ف}_1\text{ف}_2 : \text{ف}_2\text{ف}_3$ (۲۵۵)
مستقل ہے کیونکہ نقطے اپنے منحنی پر اس طریقہ پر حرکت کرتے ہیں کہ متناظر مماس متوازی رہتے ہیں۔ [اس طرح اگر دو منحنی، کامل ابتدائی میں شامل، دئیے گئے ہوں تو ہم ہندسی طور پر دوسرے منحنیوں کی کوئی تعداد معلوم کر سکتے ہیں]

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک ایسا مستوی منحنی کہ اس کے کسی نقطہ پر کے نصف قطر انحناء کا طول اُس عماد کے طول کا دُگنا ہو جو منحنی اور ایک ثابت خط مستقیم کے درمیان منقطع ہوتا ہے یا تو خط تدویر ہوگا جس کا قاعدہ ثابت خط مستقیم ہوگا یا قطع مکافی ہوگا جس کا مرتب

ثابت خطِ مستقیم ہوگا۔

(۱۱۸) ایک منحنی کی خاصیت یہ ہے کہ ع = ک مس سا [لندن]
جہاں ع نصف قطرِ انحناء اور سا وہ زاویہ ہے جو مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے اور ک مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ اس منحنی کی ایک شاخ مساواتوں

لا = ک (۱ - جم طہ) ما = ک { لوک (قط طہ + مس طہ) - جب طہ }

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ۰ ≤ طہ < $\frac{1}{2}\pi$ اور مبداء کو نقطہ طہ = ۰ پر لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر س وہ قوس ہو جو اس شاخ پر نقطہ طہ = ۰ سے ناپی گئی ہے تو

$$\text{س} = \text{ک لوک} \frac{\text{ک}}{\text{ک - لا}}$$

[لندن]

(۱۱۹) مساوات $\frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف ت}^2} = \text{ج}^2 \frac{\text{جف}^2\text{ع}}{\text{جف لا}^2}$

کا ایک حل شکل ف (لا) جب م ت
میں معلوم کرو جو ایسا ہو کہ

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}}$ = ک، ایک مستقل، جبکہ لا = ۰ اور ت = ۰

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ = ۰ جبکہ لا = ۰، ت کی تمام قیمتوں کے لیے [لندن]

(۱۲۰) مساوات $\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = 0$

کا ایک ایسا حل معلوم کرو جو حسبِ ذیل شرطوں کو پورا کرے:

(۱) ی = جب لا جبکہ ما = ۰.

(۲) ی = ۰ جبکہ لا = ۰، π

(۳) مستوی لا، ما کے اُس علاقہ میں جس میں ما > ۰ اور π > لا > ۰.

کسی جگہ بھی ی/لا متناہی نہ ہو جائے۔ [لندن]

(۱۲۱) تکمیل بالحصص کے دو عملوں سے ثابت کرو کہ اگر لا کے تفاعل ف، ق، ر ہوں اور لاحقوں سے لا کے لحاظ سے تفرقوں کو تعبیر کیا جائے تو

$$\int ی (ف ما_۲ + ق ما_۱ + ر ما) فر لا = ی (ف ما_۱ + ق ما)$$

$$- ما (ف ی)_۱ + \int ما \{ (ف ی)_۲ - (ق ی)_۱ + ر ی \} فر لا$$

اِس سے یہ اخذ کرو کہ دو مساواتیں

$$ف ما_۲ + ق ما_۱ + ر ما = ۰،\quad (ف ی)_۲ - (ق ی)_۱ + ر ی = ۰$$

ایسی ہیں کہ ایک کا کوئی تکملہ دوسرے کا تکمل جزو ضربی ہے [ایسی مساواتوں کو ایک دوسرے کا مُعیّن (Adjoint) کہتے ہیں]

ثابت کرو کہ اگر عف سے عامل $\frac{فر}{فر لا}$ تعبیر ہو تو مساوات (۲۵۶)

$$\{عف + ع (لا)\} \{عف + ق (لا)\} ما = ۰$$

کی مُعیّن مساوات

$$\{عف - ق (لا)\} \{عف - ع (لا)\} ی = ۰$$

ہے۔ مساوات $ما_۲ + (لا + لا^۲) ما_۱ + (۲ لا + لا^۳) ما = ۰$ کی صورت میں اسکی تصدیق کرو۔

[یہاں ع (لا) = لا، ق (لا) = لا^۲] -

$$\frac{جف^۲ ما}{جف لا^۲} = \frac{۱}{ت^۲} \frac{جف^۲ ما}{جف ت^۲}$$ کا عام حل

عامل کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے مساوات

$$\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\left\{\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\text{ما}\right\}$$

$$= \left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\left\{\left(\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف}}{\text{جف ت}}\right)\text{ما}\right\} = 0$$

لکھی جا سکتی ہے۔

پس (دیکھو صفحہ ۶۱) ابتدائی مساوات، لگرانج کی دو خطی مساواتوں

$$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} - \frac{1}{\text{ا}}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} = 0$$

میں سے ایک کے کسی تکملہ سے پوری ہوتی ہے۔

اِن میں سے پہلی کے لیے ذیلی مساواتیں (دفعہ ۱۲۳ سے)

$$\frac{\text{فرلا}}{1} = \frac{\text{فرت}}{\frac{1}{\text{ا}}} = \frac{\text{فرما}}{0}$$

ہیں۔

دو غیر تابع تکملے

$$\text{ما} = \text{ب}\,،\quad \text{لا} - \text{ا ت} = \text{ج}$$

ہیں۔

عام تکملہ

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا} - \text{ا ت})$$

ہے۔

اِسی طرح لگرانج کی دوسری مساوات سے $\text{ما} = \text{فا}(\text{لا} + \text{ا ت})$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دونوں ابتدائی تفرقی مساوات کے تکملے ہیں۔ چونکہ وہ خطی ہے اِس لیے ایک تیسرا تکملہ

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا} - \text{ا ت}) + \text{فا}\,(\text{لا} + \text{ا ت})$$

ہے جس میں دو اختیاری تفاعل ہیں اور دوسرے رتبہ کی ایک مساوات کے لیے

اِس سے زیادہ عام حل کی توقع نہیں کیجا سکتی ۔ (دیکھو صفحات ۱۱۸ اور ۴۳۷) دفعہ ۱۴۵ کی مساوات کے لیے اِس کے مشابہ طریقہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مبدلوں کا طریقہ ۔ (سی ۔ این ۔ سرینیو اسس اینگر)

اگر ایک جزئی تفرقی مساوات ع = ف (لا ، د) \ فہ (ی ، د)، ق = فا (ما ، د) \ فہ (ی ، د) درج کرنے پر ایک متماثلہ ہو جائے تو ہم اِن مساواتوں اور فری = ع فرلا + ق فرما کو تکامل تکملہ

∫ فہ (ی ، د) فری = ∫ ف (لا ، د) فرلا + ∫ فا (ما ، د) فرما + ب

حاصل کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں ۔

مثلاً مساوات ی^{۲} (ع + ق) = لا^{۲} + ما^{۲} ایک متماثلہ ہو جاتی ہے اگر

ع = (لا^{۲} + د) \ ی^{۲} ، ق = (ما^{۲} − د) \ ی^{۲} ،

اس سے ی^{۳} = لا^{۳} + ما^{۳} + ۳ د لا − ۳ د ما + ب

حاصل ہوتا ہے ۔

یہ طریقہ معیاری شکلوں ۱ اور ۳ (دفعات ۱۲۹ اور ۱۳۱) کی تمام مساواتوں اور شکل (۲) (دفعہ ۱۳۰) کی بعض مساواتوں پر اطلاق پذیر ہوگا ۔

جوابات

پہلا باب

دفعہ ۵

(۱) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۴\,\text{ما}$ (۲) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = -۹\,\text{ما}$

(۳) $\text{ما}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}$ (۴) $\text{ما} = \text{لا}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۳}$

(۵) ایک دائرہ کا مماس اُس خط پر عمود ہوتا ہے جو نقطۂ تماس کو مرکز سے ملاتا ہے۔

(۶) کسی نقطہ پر کا مماس خود خطِ مستقیم ہے۔

(۷) انحناء صفر ہے۔

دفعہ ۸

(۱) $\text{ما} = \text{ا} + \text{ا لا} + \text{ا}\frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \text{ا}\frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \text{ا}\frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \cdots = \text{ا و}^{\text{لا}}$

(۲) $\text{ما} = \text{ا} + \text{ب لا} - \text{ا}\frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} - \text{ب}\frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \text{ا}\frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \cdots = \text{ا جم لا}$

$+ \text{ب جب لا}$

پہلے باب پر متفرق مثالیں

(۱) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ (۲) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۳}} - ۶\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۱۱\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\text{ما} = ۰$

(۳) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} - ۲\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + ۲\text{ ما} = ۰$

(۴) $\text{ما لوک}_{\text{و}}\left[\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}\right] = \text{لا}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = ۰$

(۶) $\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}^{۳} = \text{ا}^{۲}\left(\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\right)^{۲}$ یعنے $\text{غہ}^{۲} = \text{ا}^{۲}$

(۷) $(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲})\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۲\left(\text{لا}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما}\right)\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}$

(۸) $\left\{۱ + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}\right\}\frac{\text{فر}^{۳}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۳}} = ۳\left(\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}\right)^{۲}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

(۱۱) $\text{ما} = \text{ا لا} + \text{ب لا}^{۲}$

(۱۲) $\text{ما} = \text{ا قو}^{\text{لا}} + \text{ب قو}^{-\text{لا}}$

(۱۴) ۶۰° اور -۶۰°

(۱۵) تفرق کرو اور رکھو لا = ۱، ما = ۲ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ اور اِس سے غہ حاصل ہوگا۔

(۱۷) (اَ) لا + ۱ = ۰ ، (۲) ما^{۲} = لا^{۲} + ۶ لا + ۱

دوسرا باب

دفعہ ۱۴

(۱) ۶ لا^{۲} + ۵ لا ما + ما^{۲} - ۹ لا - ۴ ما = ج

(۲) جب لا مس ما + جب (لا + ما) = ج

(۳) قط لا مس ما - قو^{لا} = ج

(۴) لا - ما + ج = لوک (لا + ما)

(۵) لا + ما قو$^{لا^{۲}}$ = ج ما

(۶) ما = ج لا

(۷) قو^{ما} (جب ما + جم لا) = ج

(۸) لا^{۴} ما + ۴ ج ما + ۴ = ۰

(۹) ما قو^{لا} = ج لا

(۱۰) جب لا جم ما = ج

دفعہ ۱۷

(۱) (لا + ما)^{۳} = ج (لا - ما)

(۲) لا^{۲} + ۲ ما^{۲} (ج + لوک ما) = ۰

(۳) لا ما^{۲} = ج (لا - ما)^{۲}

(۴) ج لا^{۲} = ما + $\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}$

(۵) (۲ لا - ۱)^{۲} = ج (لا + ۲ ما - ۵)

(۶) (لا + ۵ ما - ۴)^{۳} (۳ لا + ۲ ما + ۱) = ج

(۷) لا - ما + ج = لوک (۲ لا - ۴ ما + ۱)

(۸) ۳ لا - ۳ ما + ج = ۲ لوک (۳ لا + ۶ ما - ۱)

دفعہ ۲۱

(۱) ۲ ما = (لا + ا)^{5} + ۲ ج (لا + ا)^{3}

(۲) لا ما = جب لا + ج جم لا

(۳) ما لوک لا = (لوک لا)^{2} + ج

(۴) لا^{3} = ما^{3} (۳ جب لا + ج)

(۵) ما^{2} (لا + ج قو$^{\text{لا}}$) = ۱

(۶) لا = ما^{3} + ج ما   (۷) لا = قو$^{\text{ما}}$ (ج + مس ما)

دفعہ ۲۲

(۱) مکافی ما^{2} = ۴ ا لا + ج

(۲) قائم زائد لا ما = ج^{2}

(۳) برنولی کا دوچشمی (منحنی) ر^{2} = ا^{2} جب ۲ طہ

(۴) زنجیرہ ما = ک جمز $\frac{\text{لا} - \text{ج}}{\text{ک}}$

(۵) لا ما = ج^{2}

(۶) ما$^{2/3}$ = لا$^{2/3}$ + ج$^{2/3}$ (۷) ما$^{\text{ف}}$ = ج لا$^{\text{ق}}$

(۸) ر^{2} = ج قو$^{\text{طہ}^{2}}$ (۹) لوک ر + $\frac{1}{2}$ طہ^{2} + $\frac{1}{3}$ طہ^{3} = ج

(۱۰) مساوی الزاویہ مرغولے ر = ج قو$^{\pm \text{طہ مس عہ}}$

دوسرے باب پر متفرق مثالیں

(۱) لا ما = ما^{3} + ج   (۲) ج لا^{3} = ما + $\sqrt{\text{ما}^{2} - \text{لا}^{2}}$

(۳) جب لا جب ما + قو$^{\text{جب لا}}$ = ج

(۴) ۲ لا^{۲} − ۲ لا ما + ۳ ما + ۲ ج لا^{۲} ما = ۰

(۵) ج لا ما = ما + $\sqrt{\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$

(۱۱) لا^{۳} ما$^{-۲}$ + ۲ لا^{۵} ما$^{-۳}$ = ج

(۱۲) مس$^{-۱}$ (لا ما) + لوک (لا/ما) = ج

(۱۴) (لا^{۲} − ۱ + ما^{۲}) قو$^{\text{لا}^{۲}}$ = ج

(۱۵) (۱) تنکافی لولب ر (طہ − عہ) = ج

(۲) ارشمیدش کا لولب ر = ج (طہ − عہ)

(۱۶) مکافی ۳ک ما^{۲} = ۲ لا (۱۸) لا = ما (ج − ک لوک ما)

(۱۹) (۱) لا^{۲} + (ما − ج)^{۲} = ۱ + ج^{۲}، ہم محور دائروں کا ایک قبیل جو دئے ہوئے نظام کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۲) ر^{۲} = ج قو$^{-\text{طہ}^{۲}}$

(۳) ن^{۲} = ر{ج + لوک (قم ن طہ + مم ن طہ)}

(۲۰) (لا + ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$) (لا − ما $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$) = ا^{۲} − ب^{۲}

(۲۱) لوک (۲ لا^{۲} ± لا ما + ما^{۲}) + $\frac{۶}{\sqrt{۷}}$ مس$^{-۱}$ $\frac{\text{لا} \pm ۲\,\text{ما}}{\text{لا}\sqrt{۷}}$ = ج

تیسرا باب

دفعہ ۲۸

(۱) ما = ا و$^{-\text{لا}}$ + ب و$^{-\text{۳لا}}$ (۲) ما = ا جم۲لا + ب جب۲لا

(۳) ما = ا و$^{-\text{۳لا}}$ + ب و$^{-\text{۴لا}}$ (۴) ما = و$^{\text{۲لا}}$ (ا جم لا + ب جب لا)

(۵) س = و$^{-\text{۲ت}}$ (ا جم ۳ ت + ب جب ۳ ت)

(۶) س = ا + ب و$^{-\text{۴ت}}$

(۷) ما = ا و + ب و$^{-\text{لا}}$ + ج و$^{-\text{۲لا}}$

(۸) ما = ۲ و$^{-\text{لا}}$ − و$^{-\text{۲لا}}$

(۹) ما = ا جم (۲لا − عہ) + ب جم (۳لا − بہ)

(۱۰) ما = ا جمز (۲لا − عہ) + ب جمز (۳لا − بہ) یا

ما = ع و$^{\text{۲لا}}$ + ف و$^{-\text{۲لا}}$ + گ و$^{\text{۳لا}}$ + ھ و$^{-\text{۳لا}}$

(۱۱) ما = ا و$^{-\text{۲لا}}$ + ب و$^{\text{لا}}$ جم (لا$\sqrt{۳}$ − عہ)

(۱۲) ما = ا و$^{\text{۲لا}}$ + ب و$^{-\text{۲لا}}$ + ع و$^{-\text{لا}}$ جم (لا$\sqrt{۳}$ − عہ)

+ ف و$^{\text{لا}}$ جم (لا$\sqrt{۳}$ − بہ)

(۱۳) ط = عہ جم ت $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ (۱۴) ک^{۲} > ۴ م ج

(۱۶) ق = ق. و$^{-\frac{\text{م ت}}{\text{۲ل}}}$ (جم ن ت + $\frac{\text{م}}{\text{۲ل ن}}$ جب ن ت) جہاں

ن = $\sqrt{\left(\frac{۱}{\text{ل ج}} - \frac{\text{م}^{۲}}{\text{۴ل}^{۲}}\right)}$

دفعہ ۲۹

(۱) ما = قو $^{\text{لا}}$ (۱ + ا جم لا + ب جب لا)

(۲) ما = ۳ + ا قو $^{\text{لا}}$ + ب قو $^{\text{۱۲لا}}$

(۳) ما = ۲ جب ۳ لا + ا جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۴) ا = ۲، ب = ۱ (۵) ا = ۶، ب = -۱

(۶) ا = -۴، پ = ۲ (۷) ا = ۱، ب = ۲، پ = ۱

(۸) ا = ۲ (۹) ۴ قو $^{\text{۳لا}}$ (۱۰) ۳ قو $^{\text{۷لا}}$

(۱۱) $-\frac{۵}{۲}$ جب ۵ لا (۱۲) $\frac{۲۵}{۲۹}$ جم ۵ لا - $\frac{۱۰}{۲۹}$ جب ۵ لا

(۱۳) ۲

دفعہ ۳۴

(۱) ما = ا + ب لا + (ع + ف لا) قو $^{\text{-لا}}$

(۲) ما = (ا + ب لا + ج لا ^{۲}) جم لا + (ع + ف لا + گ لا ^{۲}) جب لا

(۳) ما = (ا + ب لا) قو $^{\text{لا}}$ + ع جم لا + ف جب لا

(۴) ما = ا + ب لا + ج قو $^{\text{لا}}$ + (ع + ف لا) قو $^{-\frac{۱}{۲}\text{لا}}$

دفعہ ۳۵

(۱) ما = ۲ قو$^{\text{۳لا}}$ + قو$^{\text{-۳لا}}$ (ا جم ۴ لا + ب جب ۴ لا)

(۲) ما = قو$^{\text{-ب لا}}$ (ا جم ق لا + ب جب ق لا) + $\frac{\text{قو}^{\text{ا لا}}}{\text{(ا+ب)}^{2}\text{ + ق}^{2}}$

(۳) ما = (ا + ۹ لا) قو$^{\text{۳لا}}$ + ب قو$^{\text{-۳لا}}$

(۴) ما = ا + (ب + $\frac{1}{2}$ لا) قو$^{\text{لا}}$ + (ج + $\frac{1}{2}$ لا) قو$^{\text{-لا}}$

(۵) ما = (ا + $\frac{\text{ا لا}}{\text{۲ب}}$) جمزب لا + ب جبزب لا

(۶) ما = ا + (ب + ج لا - ۲ لا^{2}) قو$^{\text{-۲لا}}$

دفعہ ۳۶

(۱) ما = ۲ جب ۲ لا - ۴ جم ۲ لا + ا قو$^{\text{-لا}}$

(۲) ما = ۴ جم ۴ لا - ۲ جب ۴ لا + ا قو$^{\text{۲لا}}$ + ب قو$^{\text{۳لا}}$

(۳) ما = ۲ جم لا + قو$^{\text{-۴لا}}$ (ا جم ۳ لا + ب جب ۳ لا)

(۴) ما = جب ۲۰ لا + قو$^{\text{-لا}}$ (ا جم ۲۰ لا + ب جب ۲۰ لا)

دفعہ ۳۷

(۱) ما = لا^{3} - ۳ لا^{2} + ۶ لا - ۶ + ا قو$^{\text{-لا}}$

(۲) ما = ۶ لا^{2} - ۶ لا + ا + ب قو$^{\text{-۲لا}}$

(۳) ما = ۶ لا + ۶ + (ا + ب لا) $قو^{۳لا}$

(۴) ما = $لا^{۳}$ + ۳ $لا^{۲}$ + ع لا + ف + (ا + ب لا) $قو^{۳لا}$

(۵) ما = ۲۴ $لا^{۲}$ + ۱۴ لا − ۵ + ا $قو^{-لا}$ + ب $قو^{۲لا}$

(۶) ما = ۸ $لا^{۳}$ + ۷ $لا^{۲}$ − ۵ لا + ا $قو^{-لا}$ + ب $قو^{۲لا}$ + ج

دفعہ ۳۸

(۱) ما = ا جم لا + (ب + ۲ لا) جب لا

(۲) ما = ا $قو^{لا}$ + (لا + ۲) $قو^{۲لا}$

(۳) ما = ا $قو^{۲لا}$ + (ب + ج لا − ۲۰ $لا^{۲}$ − ۲ $لا^{۳}$ − ۱۵ $لا^{۴}$ − ۹ $لا^{۵}$) $قو^{-لا}$

(۴) ما = {ا جب لا + (ب − لا) جم لا} $قو^{-لا}$

(۵) ما = (ا + ب لا − $لا^{۳}$) جم لا + (ع + ف لا + ۳ $لا^{۲}$) جب لا

(۶) ما = ا + (ب + ۳ لا) $قو^{لا}$ + ج $قو^{-لا}$ + $لا^{۲}$ + ع جم لا + (ف + ۲ لا) جب لا

(۷) ما = {ا جب ۴ لا + (ب − لا + $لا^{۲}$) جم ۴ لا} $قو^{۳لا}$

دفعہ ۳۹

(۱) ما = ا لا + ب $لا^{۲}$ + ۲ $لا^{۳}$

(۲) ما = ۲ + ا $لا^{-۴}$ جم (۳ لوک لا) + ب $لا^{-۴}$ جب (۳ لوک لا)

(۳) ما = ا جم (لوک لا) - جب (لوک لا) + ۱ لا$^{-۲}$

+ ب لا جم ($\sqrt{۳}$ لوک لا - عہ)

(۴) ما = ۴ + لوک لا + ا لا + ب لا لوک لا

+ ج لا (لوک لا)^{۲} + د لا (لوک لا)^{۳}

(۵) ما = (۱ + ۲ لا)^{۲} [{لوک (۱ + ۲ لا)}^{۲} + ا لوک (۱ + ۲ لا) + ب]

(٦) ما = ا جم {لوک (۱ + لا) - عہ} + ۲ لوک (۱ + لا) جب لوک (۱ + لا)

دفعہ ۴

(۱) ما = ا جم (لا - عہ)، ی = - ا جب (لا - عہ)

(۲) ما = ا قو$^{۵ لا}$ + ب قو$^{۳ لا}$، ی = ٦ ا قو$^{۵ لا}$ - ۷ ب قو$^{۳ لا}$

(۳) ما = ا قو^{لا} + ب جم (۲ لا - عہ)، ی = ۲ ا قو^{لا} - ب جم (۲ لا - عہ)

(۴) ما = قو^{لا} + ا + ب قو$^{-۲ لا}$، ی = قو^{لا} + ا - ب قو$^{-۲ لا}$

(۵) ما = ا جم (لا - عہ) + ۴ ب جم (۲ لا - بہ) + جم ۷ لا،
ی = ا جم (لا - عہ) + ب جم (۲ لا - بہ) - ۲ جم ۷ لا

(٦) ما = - ۵ ا قو$^{۳ لا}$ - ۴ ب قو$^{۴ لا}$ + ۲ قو$^{-لا}$ + جم ۲ لا - جب ۲ لا

ی = ا قو$^{۳ لا}$ + ب قو$^{۴ لا}$ + ۳ قو$^{-لا}$ + ۴ جم ۲ لا + ۵ جب ۲ لا

تیسرے باب پر متفرق مثالیں

(۱) ما = (ا + ب لا + ج لا^۲) و^لا + ۲ و^۳لا

(۲) ما = (ا + ب لا + ۶ لا^۳) و^(-۳لا/۲)

(۳) ما = ا و^(-۳لا) + ب و^(-۲لا) + ج و^(-لا) + ع + ۲ و^(-۲لا) (جب لا - ۲ جم لا)

(۴) ما = ا و^لا + ب جم (۲ لا - عہ) - ۲ و^لا (۴ جب ۲ لا + جم ۲ لا)

(۵) ما = (ا + ب لا + ج لا^۲) و^(-لا) + (ع + لا + ۲ لا^۲) و^۳لا

(۶) ما = ا جب (لا - عہ) + ب جبز (۳ لا - یہ) - ۲ جبز ۲ لا

(۷) ما = (ا + ب لا + ۵ لا^۲) جمز لا + (ع + ف لا) جبز لا

(۸) ما = ۳ + ۴ لا + ۲ لا^۲ + (ا + ب لا + ۴ لا^۲) و^۲لا + جم ۲ لا

(۹) ما = (ا + ب لا + ۳ جب ۲ لا - ۴ لا جم ۲ لا - ۲ لا^۲ جب ۲ لا) و^۲لا

(۱۰) ما = ا جم (لا - عہ) + ۳/۲ - ۱/۲ جم ۲ لا - ۳/۴ لا جم لا + ۱/۱۶ جب ۳ لا

(۱۱) ما = ا جم (لا - عہ) + ب جم (۳ لا - یہ) - ۳ لا جم لا + لا جم ۳ لا

(۱۲) ما = (ا. + ا۱ لا + ا۲ لا^۲ + ... + ا(ن-۱) لا^(ن-۱)) و^لا + لا^ن / (لوک ن - ۱)

(۱۳) ما = ا + ب لوک لا + ۲ (لوک لا)^۳

(۱۴) ما = ا + ب لا^{-۱} + ۵/۳ لا^{۲}

(۱۵) ما = ا لا^{۳} + ب جم (√۲ لوک لا - عہ)

(۱۶) ما = ا + ب لوک (لا + ۱) + {لوک (لا + ۱)}^{۲} + لا^{۲} + ۸ لا

(۱۷) لا = ا قو^{۳ت} + ب قو^{-۳ت} + ع جم ت + ف جب ت - قو^{ت}،

ما = ا قو^{۳ت} + ۲۵ ب قو^{-۳ت} + (۳ ع - ۴ ف) جم ت + (۳ ف + ۴ ع) جب ت - قو^{ت}

(۱۸) لا = ا قو^{۲ت} + ب قو^{-ت} جم (√۳ ت - عہ)

ما = ا قو^{۲ت} + ب قو^{-ت} جم (√۳ ت - عہ + ۲π/۳)

ی = ا قو^{۲ت} + ب قو^{-ت} جم (√۳ ت - عہ + ۴π/۳)

(۱۹) لا = ا ت + ب ت^{-۱}، ما = ب ت^{-۱} - ا ت

(۲۰) لا = ا ت جم (لوک ت - عہ) + ب ت^{-۱} جم (لوک ت - بہ)،

ما = ا ت جب (لوک ت - عہ) + ب ت^{-۱} جب (لوک ت - بہ)

(۲۷) (آ) (لا - ۱) قو^{لا} (۲) ۱/۲ (لا^{۲} - ۲ لا + ۱) جب لا + ۱/۲ (لا^{۲} - ۱) جم لا

(۳۱) ما = قو^{۲لا} + ا قو^{لا}

(۳۲) ما = جب ا لا / (ب^{۲} - ا^{۲}) + ا جم ب لا + ب جب ب لا

(۳۳) ما = ا قو^الا + ب قو^ب لا + قو^ب لا ∫ لا قو^(ا - ب) لا (لوک لا - ۱) قر لا

(۳۵) (۳) ما = ا جم (لا - عہ) - لا جم لا + جب لا لوک جب لا

(۳۷) (آ) ک / ۲ ب ھ ع   (۲) صفر

(۳۸) ما = ع جم ن لا + ف جب ن لا + گ جمز ن لا

+ ھ جبز ن لا

چوتھا باب

دفعہ ۴۲

(۱) جف ی / جف ما = ا جف ی / جف لا

(۲) جف^۲ ی / جف لا^۲ + جف^۲ ی / جف ما^۲ = ۰ (دو ابعاد میں لاپلاس کی مساوات)

(۳) جف^۲ ی / جف لا^۲ + جف^۲ ی / جف ما^۲ = ۱ / ا^۲ · جف^۲ ی / جف ت^۲

(۴) ما جف ی / جف لا + لا جف ی / جف ما = ۰

(۵) ب جف ی / جف لا + ا جف ی / جف ما = ۲ ا ب ی

(۶) لا جف ی / جف لا + ما جف ی / جف ما = ن ی (یولر کے مسئلہ متجانس تفاعلوں پر)

دفعہ ۴۳

(۱) $\frac{جف^{2} ی}{جف لا^{2}} = \frac{جف ی}{جف ت}$ (۲) $\frac{جف^{2} ی}{جف لا^{2}} + \frac{جف^{2} ی}{جف ما^{2}} + \frac{جف^{2} ی}{جف ت^{2}} = ۰$

(۳) $\frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} = ۱$

(۴) $ی = لا \frac{جف ی}{جف لا} + ما \frac{جف ی}{جف ما} + \left(\frac{جف ی}{جف لا}\right)^{2} + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^{2}$

(۵) $۴ ی = \left(\frac{جف ی}{جف لا}\right)^{2} + \left(\frac{جف ی}{جف ما}\right)^{2}$

(۶) $\frac{جف ی}{جف لا} \frac{جف ی}{جف ما} = ۱$

دفعہ ۴۵

(۱) $ما = ا قو^{-پ^{2}(لا + ت)}$ (۲) $ی = ا جب پ لا جب پ ا ما$

(۳) $ی = ا جم پ (ا لا - ما)$

(۴) $و = ا قو^{-پ لا + ق ما} جب ی \sqrt{پ^{2} + ق^{2}}$ جہاں پ اور ق ثابت ہیں

(۵) $و = ج جم (پ ق لا + پ^{2} ما + ق^{2} ی)$

(۶) $و = ا قو^{-رت} جب \left(\frac{م \pi لا}{ل}\right) جب \left(\frac{ن \pi ما}{ل}\right)$ جہاں م اور ن کوئی صحیح عدد ہیں

اور $ر ل^{2} = \pi^{2} (م^{2} + ن^{2})$

دفعہ ۴۸

(۱) $\frac{۴}{\pi}$ (جب لا + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ لا + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ لا + ……)

(۲) ۲ (جب لا − $\frac{۱}{۲}$ جب ۲ لا + $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ لا − ……)

(۳) $\frac{۲}{\pi}$ [($\frac{\pi^{۳}}{۱} - \frac{۶\pi}{۱^{۳}}$) جب لا − ($\frac{\pi^{۳}}{۲} - \frac{۶\pi}{۲^{۳}}$) جب ۲ لا

+ ($\frac{\pi^{۳}}{۳} - \frac{۶\pi}{۳^{۳}}$) جب ۳ لا ……]

(۴) $\frac{۴}{\pi}$ [$\frac{۲}{۲^{۲}-۱}$ جب ۲ لا + $\frac{۴}{۴^{۲}-۱}$ جب ۴ لا + $\frac{۶}{۶^{۲}-۱}$ جب ۶ لا

+ ……]

(۵) $\frac{۲}{\pi}$ [$\frac{۱}{۲}$ (۱ + $و^{\pi}$) جب لا + $\frac{۲}{۵}$ (۱ − $و^{\pi}$) جب ۲ لا

+ $\frac{۳}{۱۰}$ (۱ + و) جب ۳ لا + $\frac{۴}{۱۷}$ (۱ − $و^{\pi}$) جب ۴ لا + ……]

(۶) $\frac{۳۲}{\pi}$ $\sum_{۱}^{\infty}$ $\frac{۱}{ن^{۳}}$ جب $\frac{ن\pi}{۲}$ (۴ جب $\frac{ن\pi}{۴}$ − ن π جم $\frac{ن\pi}{۴}$) جب ن لا

(۷) (ا) (۲)، (۳) اور (۶) (ب) (۶)

چوتھے باب پر متفرق مثالیں

(۲) $\frac{جف^{۲} و}{جف لا^{۲}} = \frac{۱}{ک} \frac{جف و}{جف ت}$

$$(\text{۵})\ \frac{\text{جف}^{\text{۲}}\,\text{و}}{\text{جف ت}^{\text{۲}}} = \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\ \text{جف}}{\text{ر}^{\text{۲}}\ \text{جف ر}}\left(\text{ر}^{\text{۲}}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}}\right)$$

$$(\text{۷})\ \text{و} = \text{و}\,\text{و}^{-\text{گ لا}}\ \text{جب}\,(\text{ن ت} - \text{گ لا})\ \text{جہاں گ} = +\sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{۲ک}}}$$

$$(\text{۱۲})\ \text{و} = \frac{\text{۸}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ک ت}}\,\text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲۷}}\,\text{قو}^{-\text{۹ک ت}}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۱۲۵}}\,\text{قو}^{-\text{۲۵ک ت}}\,\text{جب ۵ لا} + \cdots\right)$$

(۱۳) لا کی بجائے $\frac{\pi\ \text{لا}}{\text{ل}}$، ت کی بجائے $\frac{\pi^{\text{۲}}\text{ت}}{\text{ل}^{\text{۲}}}$، اور جزو ضربی $\frac{\text{۸}}{\pi}$ کی بجائے $\frac{\text{۸ ل}^{\text{۲}}}{\pi^{\text{۳}}}$ رکھو۔

$$(\text{۱۴})\ \text{و} = \frac{\pi^{\text{۲}}}{\text{۶}} - \left(\text{قو}^{-\text{۴ک ت}}\,\text{جم ۲ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\,\text{قو}^{-\text{۱۶ک ت}}\,\text{جم ۴ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۹}}\,\text{قو}^{-\text{۳۶ک ت}}\,\text{جم ۶ لا} + \cdots\right)$$

$$(\text{۱۵})\ \text{و} = \frac{\text{۴۰۰}}{\pi}\left(\text{قو}^{-\text{ک ت}}\,\text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{قو}^{-\text{۹ک ت}}\,\text{جب ۳ لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{قو}^{-\text{۲۵ک ت}}\,\text{جب ۵ لا} + \cdots\right)$$

[یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگرچہ صفر اور π کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لیے و = ۱۰۰ لیکن لا = ۰ یا π کے لیے و = ۰ اور یہ عدم تسلسل ہے]

(۱۶) مثال (۱۵) کے حل میں و کی بجائے ۱۰۰ - و رکھو۔

(۱۸) و = $\frac{۴ و}{π}$. { قو$^{-ک π^{۲} ت \ ۴ ل^{۲}}$ جم ($\frac{π لا}{۲ ل}$)

- $\frac{۱}{۳}$ قو$^{-۹ ک π^{۲} ت \ ۴ ل^{۲}}$ جم ($\frac{۳ π لا}{۲ ل}$) + ... }

(۱۹) ا = $\frac{۴ م}{π}$ (جب لا جم و ت - $\frac{۱}{۹}$ جب ۳ لا جم ۳ و ت

+ $\frac{۱}{۲۵}$ جب ۵ لا جم ۵ و ت - ....)

پانچواں باب

دفعہ ۵۲

(۱) (ما - ۲ لا - ج) (ما + ۳ لا - ج) = ۰

(۲) (۲ ما - لا^{۲} - ج) (۲ ما + ۳ لا^{۲} - ج) = ۰

(۳) ۹ ۴ (ما - ج)^{۲} = ۴ لا^{۷}

(۴) (۲ ما - لا^{۲} - ج) (۲ لا - ما^{۲} - ج) = ۰

(۵) (۲ ما - لا^{۲} - ج) (ما - ج قو^{لا}) (ما + لا - ۱ - ج قو$^{-لا}$) = ۰

(۶) (ما - قو^{لا} - ج) (ما + قو$^{-لا}$ - ج) = ۰

دفعہ ۵۴

(صرف کامل ابتدائی درج کئے گئے ہیں - آگے چل کر یہ

معلوم ہوگا کہ بعض صورتوں میں نادر حل موجود ہیں،

(۱) لا = ۴ع + $۴ع^{۳}$ ، ما = $۲ع^{۲}$ + $۳ع^{۴}$ + ج

(۲) لا = $\frac{۱}{۲}$ (ع + $ع^{-۱}$) ، ما = $\frac{۱}{۴}$ $ع^{۲}$ − $\frac{۱}{۲}$ لوک ع + ج

(۳) $(ع-۱)^{۲}$ لا = ج − ع + لوک ع ، $(ع-۱)^{۲}$ ما = $ع^{۲}$ (ج − ۲ + لوک ع) + ج

(۴) لا = $\frac{۳}{۲}$ $ع^{۲}$ + ۳ع + ۳ لوک (ع − ۱) + ج ،

ما = $ع^{۳}$ + $\frac{۳}{۲}$ $ع^{۲}$ + ۳ع + ۳ لوک (ع − ۱) + ج

(۵) لا = ۲ $مس^{-۱}$ ع − $ع^{-۱}$ + ج ، ما = لوک ($ع^{۳}$ + ع)

(۶) لا = ع + ج $قو^{ع}$ ، ما = $\frac{۱}{۲}$ $ع^{۲}$ + ج (ع + ۱) $قو^{ع}$

(۷) لا = ۲ع + ج ع $(ع^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$ ، ما = $ع^{۲}$ − ۱ + ج $(ع^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}$

(۸) لا = جب ع + ج ، ما = ع جب ع + جم ع

(۹) لا = مس ع + ج ، ما = ع مس ع + لوک جم ع

(۱۰) لا = لوک (ع + ۱) − لوک (ع − ۱) + لوک ع + ج ،

ما = ع − لوک ($ع^{۲}$ − ۱)

(۱۱) لا = $\frac{ع}{۱+ع^{۲}}$ + $مس^{-۱}$ ع ، ما = ج − $\frac{۱}{۱+ع^{۲}}$

(۱۲) ع = ۱

چھٹا باب

دفعہ ۵۸

(۱) ک۔ ۱: (= کامل ابتدائی)، (ما + ج)^{۲} = لا^{۳}، لا = ۰ قرن طریق ہے

(۲) ک۔ ۱: (ما + ج)^{۲} = لا ۔ ۲، ن ۔ ح (= نادر حل) لا = ۲

[VIII] (۳) ک۔ ۱: لا^{۲} + ج ما + ج^{۲} = ۰، ن ۔ ح: ما^{۲} = ۴ لا^{۲}

(۴) ک۔ ۱: ما = جب (لا + ج)، ن ۔ ح: ما^{۲} = ۱

(۵) ک۔ ۱: (۲ لا^{۳} + ۳ لا ما + ج)^{۲} ۔ ۴ (لا^{۲} + ما)^{۳} = ۰، لا^{۲} + ما = ۰ قرن طریق ہے

(۶) ک۔ ۱: ج^{۲} ۔ ۲ ا ج لا ما + ۸ ج ما^{۳} ۔ ۱۲ ا لا^{۲} ما^{۲} + ۱۶ ا لا^{۳} = ۰، ما^{۲} ۔ لا = ۰ قرن طریق ہے

(۷) ک ۔ ۱: ج^{۲} + ۶ ج لا ما ۔ ۲ ج ما^{۳} ۔ لا (۳ ما^{۲} ۔ لا) = ۰، ما^{۲} + لا = ۰ قرن طریق ہے

دفعہ ۶۵

(۱) ک ۔ ۱: (ما + ج)^{۲} = لا (لا ۔ ۱)(لا ۔ ۲)، ن ۔ ح: لا (لا ۔ ۱) (لا ۔ ۲) = ۰ (تماس طریق) لا = ۱ ۔ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ اور لا = ۱ + $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ خیالی نقاط تماس کا (تماس طریق) ہے۔

(۲) ک ۔ ۱: (ما + ج)^{۲} = لا (لا ۔ ۱)^{۲}، ن ۔ ح: لا = ۰، (تماس طریق لا = $\frac{۱}{۳}$، عقدہ طریق لا = ۱

(۳) ک۔ ا: ما^{۲} − ۲ ج لا + ج^{۲} = ۰، ن۔ ح: ما^{۲} = لا^{۲}

(۴) ک۔ ا: لا^{۲} + ج (لا − ۳ ما) + ج^{۲} = ۰، ن۔ ح:
(۳ ما + لا) (ما − لا) = ۰

(۵) ک۔ ا: ما − ج لا − ج^{۲} = ۰، ن۔ ح: لا^{۲} + ۴ ما = ۰،
(تماس طریق) لا = ۰

(۶) ک۔ ا: ما = ج (لا − ج)^{۲}، ما = ۰ نادر حل اور خاص تکملہ بھی ہے، ۲۷ ما − ۴ لا^{۳} = ۰ ایک نادر حل ہے۔

(۷) تفرقی مساوات ع^{۲} ما^{۲} جم^{۲} عہ − ۲ ع لا ما جب^{۲} عہ
+ ما^{۲} − لا^{۲} جب^{۲} عہ = ۰،
ن۔ ح: ما^{۲} جم^{۲} عہ = لا^{۲} جب^{۲} عہ، (تماس طریق) ما = ۰

(۸) تفرقی مساوات (لا^{۲} − ۱) ع^{۲} − ۲ لا ما ع − لا^{۲} = ۰، ن۔ ح:
لا^{۲} + ما^{۲} = ۱، (تماس طریق) لا = ۰

(۹) تفرقی مساوات
(۲ لا^{۲} + ۱) ع^{۲} + (لا^{۲} + ۲ لا ما + ما^{۲} + ۲) ع + ۲ ما^{۲} + ۱ = ۰،
ن۔ ح: لا^{۲} + ۶ لا ما + ما^{۲} = ۴، لا = ما ایک (تماس طریق) ہے۔

(۱۰) تفرقی مساوات
ع^{۲} (۱ − لا^{۲}) − (۱ − ما^{۲}) = ۰، ن۔ ح: لا = ±۱ اور ما = ±۱

دفعہ ۶۷

(۱) ک۔ ا: ما = ج لا + ج^{۲}، ن۔ ح: لا^{۲} + ۴ ما = ۰

(۲) ک۔ ا: ما = ج لا + ج^{۳}، ن۔ ح: ۲۷ ما^{۲} + ۴ لا^{۳} = ۰

(۳) ک۔ ا: ما = ج لا + جم ج، ن۔ ح: (ما − لا جب$^{-۱}$ لا)^{۲} = ۱ − لا^{۲}

(۴) ک-۱: ما = ج لا + $\sqrt{\text{ا}^{۲}\text{ج}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$ ، ن-ح: $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$

(۵) ک-۱: ما = ج لا - لو ج ، ن-ح: ما = لا (لوک لا - ۱)

(۶) ک-۱: ما = ج لا - جب$^{-۱}$ ج ، ن-ح: ما = ± $\left\{ \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱} \right.$ - جب$^{-۱}$ $\left. \sqrt{۱ - \frac{۱}{\text{لا}^{۲}}} \right\}$

(۷) $\frac{۱}{۲}$ (ما - ع لا)^{۲} = - ع ک^{۲} ، ۲ لا ما = ک^{۲} ، ایک قائم زائد جس کے متقارب محور ہیں۔

(۸) (لا - ما)^{۲} - ۲ ک (لا + ما) + ک^{۲} = ۰ ، ایک مکافی جو محوروں کو مس کرتا ہے۔

(۹) چار قرنی بر تدویر لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = ک$^{\frac{۲}{۳}}$

چھٹے باب پر متفرق مثالیں

(۱) کوئی نادر حل نہیں ، لا = ۰ ایک (تماس طریق) ہے۔

(۲) ما = ع لا - $\frac{\text{ع}}{\text{ع} - ۱}$

(۵) ۲ ما = ± ۳ لا لفافوں کو تعبیر کرتا ہے ، ما = ۰ لفاف اور قرن طریق دونوں ہے۔

(۶) ک-۱: لا ما = ما ج + ج^{۲}

(۷) ک-۱: لا = ما ج + لا ما ج^{۲} ، ن-ح: ما + ۴ لا^{۲} = ۰۔

(رکھو ما = ۱/ما ، لا = ۱/ل)

(۸) (اَ) ع + لا = ۳ ت^{۲} رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

۲ لا = ۳ (ت^{۳} - ت^{۲})، ۴۰ ما = ۹ (۵ ت^{۴} + ۲ ت^{۵} - ۵ ت^{۴}) + ج

(۲) ک - ا: ما^{۲} + ۴ ج^{۲} = ۱ + ۲ ج لا ، ن - ح: لا^{۲} - ۴ ما^{۲} + ۴ = ،

(تماسس طریق) ما =

(۱۱) ک - ا: ما = ا {۱ + جم (لا - عہ)} مساوی خط صنوبری کا ایک
قبیل جو دائرہ ر = ۲ ا میں کھینچا گیا ہو جہاں ر = ۲ ا ایک
نادر حل ہے - نقطہ ر = ۰ قرن طریق اور نادر حل دونوں ہے۔

ساتواں باب

دفعہ

(۱) ما = لوک قط لا + ا لا + ب ،

(۲) لا = ا + ما + ب لوک (ما - ب)

(۳) ا ما = جم (ا لا + ب)

(۴) لا = لوک {قط (ا ما + ب) + مس (ا ما + ب)} + ج

(۵) ما = لا^{۳} + ا لا لوک لا + ب لا + ج

(۶) ما = - و + ا و + ب لا$^{ن-۲}$ + ج لا$^{ن-۳}$ + ... + صہ لا + ک

(۷) دائرہ (لا - ا)^{۲} + (ما - ب)^{۲} = ک^{۲} - تفرقی مساوات سے
یہ معلوم ہوتا ہے کہ نصف قطر انحناء ہمیشہ ک کے مساوی ہے۔

(۹) (۱ + ما^۲)^{۱/۲} = ک ما^۲، زنجیرہ ما = ب عکس جمز {(لا - ۱)/س}

دفعہ ۳ کے

(۱) ما = لا (۱/۲ لوک لا + ب)

(۲) ما = ۱/۲ لا جم (۲ لوک لا) + ب لا جب (۲ لوک لا)

(۳) ما = لا (۱/۲ لوک لا + ب)^۲

(۴) ما = لا^۲ (۱/۲ لوک لا + ب)^۲

دفعہ ۴ کے

(۱) ما = ± مز (لا - ج)/√۲   (۲) ما = - لوک (۱ - لا)

(۳) ما = جب^{-۱} لا   (۴) ت = (۱/ا) √(ھ/۲گ) {ھ جم^{-۱} √(لا/ھ)

+ √(ھ لا - لا^۲)}

(۵) (اَ) مخروطی ع = م/ھ^۲ + (۱/ج - م/ھ^۲) جم ط

(۲َ) ج ع = جم ط √(۱ - م/ھ^۲) یا جمز ط √(م/ھ^۲ - ۱)

بموجب اس کے کہ م < > ھ^۲

دفعہ ۷۵

(۱) ما = ا (لا^{۲} + ۱) + ب قو$^{-لا}$ (۲) ما = ا (لا − ۱) + ب قو$^{-لا}$

(۳) ما = ا (لا − ۱) + ب قو$^{-لا}$ + لا^{۲} (۴) ما = ۱ + قو$^{-\frac{لا^{۲}}{۲}}$

(۵) ما = قو$^{لا^{۲}}$

دفعہ ۷۷

(۲) ما = لا^{۳} + ا لا − $\frac{ب}{لا}$ (۳) ما = (لا^{۲} + ا لا) قو^{لا} + ب لا

(۴) ما = قو$^{لا^{۲}}$ + (ا لا^{۳} + ب) قو^{لا}

(۵) ما = ا لا^{۳} + ب لا$^{-۳}$ (۶) ما = ا لا^{۲} + ب جب لا

دفعہ ۸۰

(۱) ما = (ا − لا) جم لا + (ب + لوک جب لا) جب لا

(۲) ما = {ا − لوک مس ($\frac{\pi}{۴}$ + لا)} جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۳) ما = {ا − قو$^{-لا}$ + لوک (۱ + قو$^{-لا}$)} قو^{لا} + {ب − لوک (۱ + قو^{لا})} قو$^{-لا}$

(۴) ما = ا لا + ب لا$^{-۱}$ + (۱ − لا$^{-۱}$) قو^{لا}

(۵) ما = ا قو^(لا) + (ب − لا) قو^(۲لا) + ج قو^(۳لا)

ساتویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ما = ا قو^(لا/ب) − ب   (۲) ما = ا + لوک (لا^۲ + ب)

(۳) ما = ۲ لا^(ن+۱) / ⌊ن+۱ + ۲ا لا^(ن) / ⌊ن + ا^۲ لا^(ن−۱) / ⌊ن−۱ + ب لا^(ن−۲)

+ ج لا^(ن−۳) + ... + ہ لا + ک

(۴) ما = − ۳^(۲−ن) جم {۳ لا − ½ π (ن − ۲)} + ا جم لا

+ ب جب لا + ج لا^(ن−۳) + ... + ہ لا + ک

(۵) ما = ا لا + ب لوک لا   (۶) ما = ا قو^(لا) + ب (لا^۲ − ۱) قو^(۲لا)

(۷) ما = ا جم ن لا + ب جب ن لا + (لا/ن) جب ن لا

− (۱/ن^۲) جم ن لا لوک قطا ن لا

(۸) ما (۲ لا + ۳) = ا لوک لا + ب + قو^(لا)

(۹) (ا) ما = √(ا لا + ب)

(۲) ما = √(ا لوک لا + ب)

(۱۰) ما = (ا جم لا + ب جب لا + جب ۲ لا) قو^لا۲

(۱۲) ما = لا۲ ی (۱۴) ع = − ۱/۴

(۱۷) (اَ) ما = ا قو^لا۲ + ب قو^−لا۲ − جب لا۲ (رکھو ی = لا۲)

(۲َ) ما (۱ + لا۲) = ا (۱ − لا۲) + ب لا (رکھو لا = مس ی)

(۱۸) فر۲ ما / فر ی۲ − ۲ ما = ۲ (۱ − ی۲)، ما = جب۲ لا + ا جمز (√۲ جب لا + ع)

(۱۹) ما = ا جم {۲ (۱ + لا) قو^−لا} + ب جب {۲ (۱ + لا) قو^−لا} + (۱ + لا) قو^−لا

آٹھواں باب

دفعہ ۸۳

(۱) ما = ۲ + لا + لا۲ − ۱/۳ لا۴ − ۲/۱۵ لا۵، ٹھیک حل ما = ۲ + لا + لا۲

(۲) ما = ۲ لا − ۲ لوک لا − ۱/۳ (لوک لا)۳، ٹھیک قیمت ما = لا + ۱/لا

(۳) $\text{ما} = ۲ + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \frac{۳}{۲۰}\text{لا}^{۵} + \frac{۱}{۱۰}\text{لا}^{۶}$

$\text{ی} = ۳\text{لا}^{۲} + \frac{۳}{۴}\text{لا}^{۴} + \frac{۶}{۵}\text{لا}^{۵} + \frac{۳}{۲۸}\text{لا}^{۷} + \frac{۳}{۴۰}\text{لا}^{۸}$

(۴) $\text{ما} = ۵ + \text{لا} + \frac{۱}{۱۲}\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۶}\text{لا}^{۶} + \frac{۲}{۶۳}\text{لا}^{۷} + \frac{۱}{۷۲}\text{لا}^{۹}$

$\text{ی} = ۱ + \frac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۵} + \frac{۲}{۹}\text{لا}^{۶} + \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۸} + \frac{۱۱}{۳۲۴}\text{لا}^{۹} + \frac{۷}{۲۶۴}\text{لا}^{۱۱}$

(۵) ما کی وہی قیمت ہے جو مثال ۴ میں ہے۔

دفعہ ۸۷

(۱) ۲٫۱۹　　(۲) ۲٫۱۹۲

(۳) (ا) ۴٫۱۲ ، (ب) ۴٫۱۱۸

(۴) خطائیں ۰٫۰۰۱۸ ، ۰٫۰۰۰۱۷ ، ۰٫۰۰۰۰۱۳

بالائی حدود ۰٫۰۱۷۲ ، ۰٫۰۰۲۸۶ ، ۰٫۰۰۰۴۲۰

دفعہ ۸۹

۱٫۱۶۷۸۴۸۷ ، ۱٫۱۶۷۸۰۲۵۰ ، ۱٫۱۶۷۸۴۴۹

نواں باب

XI

دفعہ ۹۵

(۱) $\text{ع} = \left\{۱ - \frac{\text{لا}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۴}} - \cdots\cdots\right\} = \text{جم}\sqrt{\text{لا}}$

$\text{د} = \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\left\{۱ - \frac{\text{لا}}{|\underline{۳}} + \frac{\text{لا}^{۲}}{|\underline{۵}} - \cdots\cdots\right\} = \text{جب}\sqrt{\text{لا}}$

(۲) $\text{ع} = \left\{1 - 3\text{لا} + \frac{3\text{لا}^2}{1\times 3} + \frac{3\text{لا}^3}{3\times 5} + \frac{3\text{لا}^4}{5\times 7} + \frac{3\text{لا}^5}{7\times 9} + \cdots\right\}$

$\text{و} = \text{لا}^{\frac{1}{2}}(1-\text{لا})$

(۳) $\text{ع} = \left\{1 + \frac{1}{3}\text{لا} + \frac{1\times 4}{3\times 6}\text{لا}^2 + \frac{1\times 4\times 7}{3\times 6\times 9}\text{لا}^3 + \cdots\right\} = (1-\text{لا})^{-\frac{1}{3}}$

$\text{و} = \text{لا}^{\frac{4}{3}}\left\{1 + \frac{8}{10}\text{لا} + \frac{8\times 11}{10\times 13}\text{لا}^2 + \frac{8\times 11\times 14}{10\times 13\times 16}\text{لا}^3 + \cdots\right\}$

(۴) $\text{ع} = \text{لا}^{\text{ن}}\left\{1 - \frac{1}{4(\text{ن}+1)}\text{لا}^2 + \frac{1}{4\times 8(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)}\text{لا}^4 - \frac{1}{4\times 8\times 12(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)(\text{ن}+3)}\text{لا}^6 + \cdots\right\}$

و کو ع سے حاصل کرنے کے لئے ن کو -ن میں تبدیل کرو۔ اگر ع کو مستقل $\frac{1}{2^{\text{ن}}\,\text{جا}(\text{ن}+1)}$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب کو رتبہ ن کا بیسل کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کو جن (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔

دفعہ ۹۶

(۱) اور (۴)، لا کی تمام قیمتیں (۲) اور (۳)، $|\text{لا}| < 1$

دفعہ ۹۷

(۱) $\text{ع} = \left\{1 + \text{لا} + \frac{2}{4}\text{لا}^2 + \frac{2\times 5}{4\times 9}\text{لا}^3 + \frac{2\times 5\times 10}{4\times 9\times 16}\text{لا}^4 + \cdots\right\}$

$$\text{و} = \text{ع لوک لا} + \left\{ -۲\,\text{لا} - \text{لا}^{۲} - \frac{۱۴}{۲۷}\text{لا}^{۳} - \cdots \right\}$$

$$(۲)\quad \text{ع} = \left\{ ۱ - \frac{۱}{۲^{۲}}\text{لا}^{۲} + \frac{۱}{۲^{۲} \times ۴^{۲}}\text{لا}^{۴} - \frac{۱}{۲^{۲} \times ۴^{۲} \times ۶^{۲}}\text{لا}^{۶} + \cdots \right\}$$

$$\text{و} = \text{ع لوک لا} + \left\{ \frac{۱}{۲^{۲}}\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۲^{۲} \times ۴^{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۲^{۲} \times ۴^{۲} \times ۶^{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right)\text{لا}^{۶} - \cdots \right\}$$

ع کو رتبہ صفر کا بیسل کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کو جے (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۳)\quad \text{ع} = \left\{ ۱ - ۲\,\text{لا} + \frac{۳}{\underline{|۲}}\text{لا}^{۲} - \frac{۴}{\underline{|۳}}\text{لا}^{۳} + \cdots \right\}$$

$$\text{و} = \text{ع لوک لا} + \left\{ ۲\left(۲ - \frac{۱}{۲}\right)\text{لا} - \frac{۳}{\underline{|۲}}\left(۲ + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right)\text{لا}^{۲} + \frac{۴}{\underline{|۳}}\left(۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right)\text{لا}^{۳} - \cdots \right\}$$

$$(۴)\quad \text{ع} = \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\left\{ ۱ + \frac{۳ \times ۱}{۴^{۲}}\text{لا}^{۲} + \frac{۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۴^{۲} \times ۸^{۲}}\text{لا}^{۴} + \frac{۱۱ \times ۹ \times ۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۴^{۲} \times ۸^{۲} \times ۱۲^{۲}}\text{لا}^{۶} + \cdots \right\}$$

$$\text{و} = \text{ع لوک لا} + ۲\,\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\left\{ \frac{۳ \times ۱}{۴^{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲}\right)\text{لا}^{۲} + \frac{۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱}{۴^{۲} \times ۸^{۲}}\left(۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۴}\right)\text{لا}^{۴} + \cdots\cdots \right\}$$

XII

دفعہ ۹۸

(۱) ی = لاَ^{-۲} { − ۱/(۲^۲ × ۴) لاَ^۴ + ۱/(۲^۲ × ۴^۲ × ۶) لاَ^۲ − ۱/(۲^۲ × ۴^۲ × ۶^۲ × ۸) لاَ^۸

\+ ۱/(۲^۲ × ۴^۲ × ۶^۲ × ۸^۲ × ۱۰) لاَ^{-۱} − ...... }

و = ی لوک لا + لاَ^{-۲} { ۱ + ۱/۲^۲ لاَ^۲ + ۱/(۲^۲ × ۴^۲) لا^۴

− ۱۱/(۲^۲ × ۴^۲ × ۶^۲) لاَ^۶ + ۳۱/(۲^۲ × ۴^۲ × ۶^۲ × ۸^۲) لاَ^۸ .... }

(۲) ی = لا + ۲ لاَ^۲ + ۳ لاَ^۳ + ... = لا (۱ − لا)^{-۲}

و = ی لوک لا + (۱ − لا)^{-۱} = ی لوک لا + ۱ + لا + لاَ^۲ + ...

(۳) ی = { ۱ × ۲ لاَ^۲ + ۲ × ۳ لاَ^۳ + ۳ × ۴ لاَ^۴ + ... }

و = ی + ی لوک لا + { − ۱ + لا + ۳ لاَ^۲ + ۵ لاَ^۳ + ۷ لاَ^۴

\+ .... }

(۴) ی = { ۲ لا + ۲ لاَ^۲ − لاَ^۳ − لاَ^۴ + ۵/۴ لاَ^۵ ..... }

و = ی لوک لا + { ۱ − لا − ۵ لاَ^۲ − لاَ^۳ + ۱۱/۴ لاَ^۴ .... }

دفعہ ۹۹

(۱) م = اَ { ۱ − لاَ^۲ − ۱/۳ لاَ^۴ − ۱/۵ لاَ^۶ .... } + اَ_۱ لا

$$= \text{ا}\left\{۱ - \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\,\text{لوک}\,\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}\right\} + \text{ا}_{۱}\,\text{لا}$$

(۲) $$\text{ما} = \text{ا}\left\{۱ - \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\underline{|۲}}\,\text{لا}^{۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۳)}{\underline{|۴}}\,\text{لا}^{۴} - \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \text{ا}_{۱}\left\{\text{لا} - \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}+۲)}{\underline{|۳}}\,\text{لا}^{۳} + \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۴)}{\underline{|۵}}\,\text{لا}^{۵} - \ldots\ldots\right\}$$

[$\frac{۱}{\text{لا}}$ کی قوتوں کے حلوں کے لیے نویں باب کے آخر میں متفرق مثالوں میں سے مثال ۷ کو دیکھو]

(۳) $$\text{ما} = \text{ا}\left\{۱ - \frac{۱}{۴\times۳}\,\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۸\times۷\times۴\times۳}\,\text{لا}^{۸} - \frac{۱}{۱۲\times۱۱\times۸\times۷\times۴\times۳}\,\text{لا}^{۱۲} + \ldots\right\}$$

$$+ \text{ا}_{۱}\left\{\text{لا} - \frac{۱}{۵\times۴}\,\text{لا}^{۵} + \frac{۱}{۹\times۸\times۵\times۴}\,\text{لا}^{۹} - \frac{۱}{۱۳\times۱۲\times۹\times۸\times۵\times۴}\,\text{لا}^{۱۳} + \ldots\right\}$$

(۴) $$\text{ما} = \text{ا}\left\{۱ - \frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۱۲}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۵}{۹۶}\,\text{لا}^{۴} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \text{ا}_{۱}\left(\text{لا} - \frac{۱}{۶}\,\text{لا}^{۳} - \frac{۱}{۲۴}\,\text{لا}^{۴} + \frac{۱}{۲۴}\,\text{لا}^{۵} \ldots\right\}$$

دفعہ ۱۰۰

$$(\text{۱})\quad \text{ی}^{۴}\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر ی}^{۲}}+\text{ی}^{۳}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ی}}+(۱-\text{ن}^{۲}\text{ی}^{۲})\,\text{ما}=۰$$

$$(\text{۲})\quad \text{ما}=\text{ا لا}^{۲}(۱+۲\text{لا})$$

$$(\text{۳})\quad \text{ما}=\text{لا}^{۲}(۱+۲\text{لا})\left\{\text{ا}+\text{ب}\int \text{لا}^{-۲}(۱+۲\text{لا})^{-۲}\,\text{و}^{\frac{۱}{\text{لا}}}\,\text{فر لا}\right.$$

$$(\text{۵})\quad \text{ی و}^{-\text{ی}}\ \text{اور}\ \Big[\text{ی و}^{-\text{ی}}\,\text{لوک ی}+\text{ی}^{۲}\Big\{۱-\frac{۱}{\underline{|۲}}\Big(۱+\frac{۱}{۲}\Big)\text{ی}$$
$$+\frac{۱}{\underline{|۳}}\Big(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\Big)\text{ی}^{۲}-\cdots\Big\}\Big]$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ی}=\frac{۱}{\text{لا}}$$

نویں باب پر متفرق مثالیں

XIII

$$(\text{۱})\quad \text{ع}=\text{لا}^{-\frac{۱}{۲}}\left\{۱+\frac{۳}{\underline{|۳}}\text{لا}+\frac{۹}{\underline{|۶}}\text{لا}^{۲}+\frac{۲۷}{\underline{|۹}}\text{لا}^{۳}+\cdots\right\}$$

$$\text{و}=\left\{\frac{۱}{\underline{|۱}}+\frac{۳}{\underline{|۴}}\text{لا}+\frac{۹}{\underline{|۷}}\text{لا}^{۲}+\frac{۲۷}{\underline{|۱۰}}\text{لا}^{۳}+\cdots\right\}$$

$$\text{ط}=\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}\left\{\frac{۱}{\underline{|۲}}+\frac{۳}{\underline{|۵}}\text{لا}+\frac{۹}{\underline{|۸}}\text{لا}^{۲}\times\frac{۲۷}{\underline{|۱۱}}\text{لا}^{۳}+\cdots\right\}$$

$$(\text{۲})\quad \text{ع}=\left\{۱+\frac{۱}{۱^{۲}}\text{لا}+\frac{۱}{۱^{۲}\times۲^{۲}}\text{لا}^{۲}+\frac{۱}{۱^{۲}\times۲^{۲}\times۳^{۲}}\text{لا}^{۳}+\cdots\right\}$$

$$\text{و}=\text{ع لوک لا}+۲\left\{-\frac{۱}{۱^{۲}}\text{لا}-\frac{۱}{۱^{۲}\times۲^{۲}}\Big(۱+\frac{۱}{۲}\Big)\text{لا}^{۲}\right.$$

$$-\frac{۱}{۱^۲\times ۲^۲\times ۳^۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)\text{لا}^۳-\ldots\ldots\Big\}$$

$$\text{ط} = ۶\,(\text{لوک لا})^۲+۲\,(\text{و}-۶\ \text{لوک لا})\ \text{لوک لا}$$

$$+\Big\{۶\,\text{لا}+\left(\frac{۶}{۱^۴\times ۲^۲}+\frac{۸}{۱^۳\times ۲^۳}+\frac{۹}{۱^۲\times ۲^۴}\right)\text{لا}^۲+\cdots\Big\}$$

گیارھواں باب

دفعہ ۱۱۳

(۱) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}=\frac{\text{ما}}{\text{ب}}=\text{ی}$، مبداء میں سے گذرتے ہوئے خطوطِ مستقیم۔

(۲) $\text{ل لا}+\text{م ما}+\text{ن ی}=\text{ا}$، $\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲=\text{ب}$، دائرے

(۳) $\text{ما}=\text{ا ی}$، $\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲=\text{ب ی}$، دائرے

(۴) $\text{لا}^۲-\text{ما}^۲=\text{ا}$، $\text{لا}^۲-\text{ی}^۲=\text{ب}$، قائم زائدی اسطوانوں کے دو نظاموں کے تقاطع۔

(۵) $\text{لا}-\text{ما}=\text{ا}\,(\text{ی}-\text{لا})$، $(\text{لا}-\text{ما})^۲(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})=\text{ب}$،

(۶) $\text{لا}^۲+\text{ما}^۲+\text{ی}^۲=\text{ا}$، $\text{ما}^۲-۲\,\text{ما ی}-\text{ی}^۲=\text{ب}$، کروں کے ایک نظام اور قائم زائدی اسطوانوں کے ایک نظام کے تقاطع۔

(۷) $\sqrt{\text{م}^۲+\text{ن}^۲}$

(۸) زائدنما $\text{ما}^۲+\text{ی}^۲-۲\,\text{لا}^۲=۱$

(۹) (لا^۲ + ما^۲) (ک مس^-۱ ما/لا)^۲ = ی^۲ ر^۲

(۱۰) ۱/لا = ۱/ما + ۱/۲ = ۱/ی + ۱/۲

دفعہ ۱۱۴

(۱) ما − ۳لا = د، ۵ی + مس (ما − ۳لا) ب قو^۵لا

(۲) ما + لا = د، لوک {ی^۲ + (ما + لا)^۲} − ۲لا = ب

(۳) لا ما = د، (ی^۲ + لا ما)^۲ − لا^۴ = ب

(۴) ما = د لا، لوک (ی − ۲لا/ما) − لا = ب

دفعہ ۱۱۶

(۱) لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ج^۲، کرے جن کے مرکز مبداء پر ہیں

(۲) لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ج لا، کرے جن کے مرکز محور لا پر ہیں اور جو مبداء میں سے گذرتے ہیں ۔

(۳) لا ما ی = ج^۳

(۴) ما ی + ی لا + لا ما = ج^۲، مشابہ مخروطی نما جن کے مرکز مبداء پر ہیں ۔ XIV

(۵) لا − ج ما = ما لوک ی

(۶) لا^۲ + ۲ما ی + ۲ی^۲ = ج^۲، مشابہ مخروطی نما جن کے مرکز مبداء

پر ہیں ۔

دفعہ ۱۱۷

(۱) ما = ج لا لوک لا   (۲) لا^{۲} ما = ج ی وی

(۳) (لا + ما + ی^{۲}) و$^{\text{لا}^{۲}}$ = ج

(۴) ما (لا + ی) = ج (ما + ی)

(۵) $\frac{\text{ما + ی}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا + ی}}{\text{ما}}$ = ج

(۶) ن ما − م ی = ج (ن لا − ل ی)،

مشترک خط $\frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}}{\text{م}} = \frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ ہے۔

دفعہ ۱۲۰

(۳) ی = ج و$^{\text{لا}^{۲}}$ (۴) لا^{۲} ی + ۴ = ۰

گیارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ما = ا لا ، ی^{۲} − لا ما = ب

(۲) لا^{۲} ما^{۳} ی = ا ، لا^{۳} + ما^{۳} = ب لا^{۲} ما^{۲}

(۳) ما + ی = ا و$^{\text{لا}}$ ، ما^{۲} − ی^{۲} = ب

(۴) $\text{ما} = \text{جب لا} + \dfrac{\text{ج ی}}{\text{۱} + \text{ی}^{2}}$

(۵) $\text{لا}^{2} + \text{لا ما}^{2} + \text{لا}^{2}\,\text{ی} = \text{ت} + \text{ج}$

(۶) $\text{ف}(\text{ما}) = \text{ک ما}$ ، $\text{لا}^{\text{ک}} = \text{ج ما}^{\text{ی}}$

(۸) $\dfrac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \dfrac{\text{فرما}}{\text{۲ ما}} = \dfrac{\text{فری}}{\text{۳ ی}}$

(۹) $\text{ما} + \text{ی} = \text{۳ و}^{\text{لا}-\text{۳}}$ ، $\text{ما}^{2} - \text{ی}^{2} = \text{۳}$

(۱۰) (آ) $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} = \text{ج}(\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})$ ،

(بؔ) $\text{لا}^{2} - \text{لا ما} + \text{ما}^{2} = \text{ج ی}$

(جؔ) $\text{ما}^{2} - \text{ما ی} - \text{لا ی} = \text{ج ی}^{2}$

(۱۴) $\text{لا ما} = \text{ج و}^{\text{ی}}\,\text{جب ط}$

بارھواں باب

دفعہ ۱۲۳

(۱) $\text{فہ}\left(\dfrac{\text{لا}}{\text{ی}} ، \dfrac{\text{ما}}{\text{ی}}\right) = \text{۰}$

(۲) $\text{فہ}\left(\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی} ، \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}\right) = \text{۰}$

(۳) $\text{فہ}\left(\dfrac{\text{ما}}{\text{ی}} ، \dfrac{\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}}{\text{ی}}\right) = \text{۰}$

(۴) فہ (لا^{2} − ما^{2} ، لا^{2} − ی^{2}) = ۰

(۵) فہ {(لا − ما)^{2} (لا + ما + ی) ، $\frac{\text{لا − ما}}{\text{ی − لا}}$} = ۰

(۶) فہ (لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} ، ما^{2} − ۲ ما ی − ی^{2}) = ۰

(۷) فہ [ما − ۳ لا ، ق$^{-۵ لا}$ {۵ ی + س (ما − ۳ لا)}] = ۰

(۸) فہ {ما + لا ، لوک (ی^{2} + ما^{2} + ۲ ما لا + لا^{2}) − ۲ لا} = ۰

(۹) ما^{2} = ۴ لا ی ، (۱۰) ا (لا^{2} − ما^{2}) + ب (لا^{2} − ی^{2}) + ج = ۰

(۱۲) فہ (لا^{2} + ما^{2} ، ی) = ۰ ، محوری کے گرد گردشی سطحیں

دفعہ ۱۲۶

(۱) فہ (ی + لا$_{۱}$ ، لا$_{۲}$ + لا$_{۱}$ ، لا$_{۱}$ + لا$_{۳}$) = ۰

(۲) فہ (ی ، لا$_{۱}^{۲}$ لا$_{۲}^{-۱}$ ، لا$_{۱}^{۳}$ لا$_{۳}^{-۱}$ ، لا$_{۱}^{۴}$ لا$_{۴}^{-۱}$) = ۰

(۳) فہ (ی − لا$_{۱}$ لا$_{۲}$ ، لا$_{۱}$ + لا$_{۲}$ + لا$_{۳}$ ، لا$_{۲}$ لا$_{۳}$) = ۰

(۴) فہ (۲ ی + لا$_{۱}^{۲}$ ، لا$_{۱}^{۲}$ − لا$_{۲}^{۲}$ ، لا$_{۱}^{۲}$ − لا$_{۳}^{۲}$) = ۰

(۵) فہ (۴ ما ی − لا$_{۳}^{۲}$ ، ۲ لا$_{۲}$ − لا$_{۳}^{۲}$ ، ۲ لا$_{۱}$ − لا$_{۲}^{۲}$) = ۰ ، خاص تکملہ ی = ۰

(۶) فہ {ی - ۳ لا۱' ی - ۳ لا۲' ی + ۶ √(ی - لا۱ - لا۲ - لا۳)} = ۰'

خاص تکملہ ی = لا۱ + لا۲ + لا۳

دفعہ ۱۲۹

(۱) ی = (۲ ب۲ + ۱) لا + ب ما + ج

(۲) ی = لا جم عہ + ما جیب عہ + ج

(۳) ی = ا لا + ما لوک ا + ج

(۴) ی = ا۳ لا + ا-۲ ما + ج

(۵) ی = ۲ لا قط عہ + ۲ ما مس عہ + ج

(۶) ی = لا (۱ + ا) + ما (۱ + ۱/ا) + ج

دفعہ ۱۳۰

(۱) ا ی = (لا + ا ما + ب)۲

(۲) ی = ± جذر {(لا + ا ما + ب) \ (۱ + ا۲)^(۱/۲)}

(۳) ی۲ - ا۲ = (لا + ا ما + ب)۲ یا ی = ب

(۴) ی۲ (۱ + ا۳) = ۸ (لا + ا ما + ب)۳

(۵) (ی + ا) نو^(لا + ا ما) = ب

(۶) ی = ب نو^(ا لا + ا۲ ما)

دفعہ ۱۳۱

(۱) ۳ ی = ۲ (لا + ا)$^{۳/۲}$ + ۳ ا ما + ۳ ب

(۲) ۲ ا ی = ا^{۲} لا^{۲} + ما^{۲} + ۲ ا ب

(۳) ا ی = ا لا^{۲} + ا^{۲} لا + و$^{ا ما}$ + ا ب

(۴) (۲ ی − ا ما^{۲} − ۲ ب)^{۲} = ۱۶ ا لا

(۵) ی = ا (و^{لا} + و^{ما}) + ب

(۶) ا ی = ا^{۲} لا + ا جب لا + جب ما + ا ب

دفعہ ۱۳۳

(۱) ی = −۲ − لوک لا ما　　(۲) ۳ ی = لا ما − لا^{۲} − ما^{۲}

(۳) ۸ ی^{۳} = −۲۷ لا^{۲} ما^{۲}　　(۴) ی لا = − ما

(۵) ی = ۰　　(۶) ی^{۲} = ۱　　(۷) ی = ۰

دفعہ ۱۳۶

(۱) ۴ ی = − ما^{۲}

(۴) عام تکملہ کی ایک مخصوص صورت جو اُس سطح کو تعبیر کرتی ہے جس کی تکوین نقطہ (۰، ۱-، ۰) میں سے گذرتے ہوئے

ممبئروں سے ہوئی ہے۔

بارہویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی = ا لا + ب ما − ا^{۲}ب ، نادر تکملہ ی^{۲} = لا^{۲} ما

(۲) ی لا = ا لا + ب ما − ا^{۲}ب ، نادر تکملہ ی^{۲} = ما

(۳) فہ {لا ما ، (ی^{۲} + لا ما)^{۲} − لا^{۴}} = ۰

(۴) ی = ۳ لا^{۳} − ۳ ا لا^{۲} + ا^{۲} لا + ۲ ما^{۲} − ۴ ا ما^{۳} + ۳ ا^{۲} ما^{۲} − ا^{۳} ما + ب

(۵) ی = ا لا$_{۱}$ + ب لوک لا$_{۲}$ + (ا^{۲} + ۲ ب) لا$_{۳}^{-۱}$ + ج

(۶) ی = فہ {(لا$_{۱}$ + لا$_{۳}$) \ لا$_{۲}$ ، لا$_{۱}^{۲}$ − لا$_{۳}^{۲}$}

(۷) ۳ ا (لا + ا ما + ب) = (۱ + ا^{۳}) لوک ی یا ی = ب ، ی = ب میں ی = ۰ شامل ہے لیکن وہ نادر تکملہ بھی ہے۔

(۸) ی (۱ + ا^{۲} + ب^{۲}) = (لا$_{۱}$ + ا لا$_{۲}$ + ب لا$_{۳}$ + ج)^{۲}

(۹) فہ (ی ÷ قو$^{ہ لا_۱}$ ، ی ÷ قو$^{ہ لا_۲}$ ، ی ÷ قو$^{ہ لا_۳}$) = ۰

(۱۰) ی = ا لا − (۲ + ۳ ا + $\frac{۱}{۲}$ ا^{۲}) ما + ب

(۱۱) ی^{۲} = ا لا^{۲} − (۲ + ۳ ا + $\frac{۱}{۲}$ ا^{۲}) ما^{۲} + ب

(۱۲) ی^۲ = (۱ + ا^۲) لا^۲ + ا ما^۲ + ب

(۱۳) ی = ا س (لا + ا ما + ب)، یا ی = ب
ی = ۰ نادر تکملہ ہے لیکن وہ ی = ب میں بھی شامل ہے

(۱۴) ی^۲ = ا لا^۲ + ب ما^۲ - ۳ ا^۳ + ب^۲، نادر تکملہ ی^۲ = ± ۲ لا^۳ / ۹ - ما^۴ / ۴

(۱۵) ی = لا + ما - ۱ ± ۲ √((لا - ۱)(ما - ۱))

(۱۶) ی^۲ - لا ما = ج

XVI (۱۷) فہ (ی/لا ، ی/ما) = ۰، مخروط جن کے راس مبداء پر ہیں۔

(۱۸) لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ۲ لا جم ع + ۲ ما جب ع + ج، کرے جن کے مرکز دئے ہوئے دائرے پر ہیں عام تکملہ کے دوسرے حل حاصل ہوتے ہیں۔

(۱۹) لا ما ی = ج، (یہ نادر تکملہ ہے۔ کامل تکملہ سے مماس مستوی حاصل ہوتے ہیں)

(۲۰) تفرقی مساوات (ی - ع لا - ق ما) (۱ - ۱/ع - ۱/ق) = ۰ کا کوئی نادر تکملہ نہیں ہے اور کامل تکملہ مستویوں کو تعبیر کرتا ہے۔ ہر وہ تکملہ جو عام تکملہ میں شامل ہے ایک ایسے مستوی کے لفاف کو تعبیر کرتا ہے جس کی مساوات میں صرف ایک مبدل ہے یعنے جو کشادپذیر سطح ہے۔

تیرھواں باب

دفعہ ۱۳۹

(۱) $\text{ما}^{۲}\left\{(\text{لا}-\text{ا})^{۲}+\text{ما}^{۲}+۲\,\text{ی}\right\}=\text{ب}$

(۲) $\text{ی}^{۲}=۲\,\text{ا}\,\text{لا}+\text{ا}^{۲}\,\text{ما}^{۲}+\text{ب}$

(۳) $\text{ی}=\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{قو}^{\text{ا}}\,(\text{ما}+\text{ا})^{-\text{ا}}$

(۴) $\text{ی}^{۲}=۲\,(\text{ا}^{۲}+۱)\,\text{لا}^{۲}+۲\,\text{ا}\,\text{ما}+\text{ب}$

(۵) $\text{ی}=\text{ا}\,\text{لا}+۳\,\text{ا}^{۲}\,\text{ما}+\text{ب}$

(۶) $(\text{ی}^{۲}+\text{ا}^{۲})^{۳}=۹\,(\text{لا}+\text{ا}\,\text{ما}+\text{ب})^{۲}$

(۷) $\text{ی}=\text{لا}^{۳}+\text{ا}\,\text{لا}+\frac{۲}{۳}(\text{ما}+\text{ا})^{\frac{۳}{۲}}+\text{ب}$

(۸) $\text{ی}=\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}\,\text{ما}+\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}$

دفعہ ۱۴۱

(۱) $\text{ی}=\text{ا}_{۱}\text{لا}_{۱}+\text{ا}_{۲}\text{لا}_{۲}+(۱-\text{ا}_{۱}^{۳}-\text{ا}_{۲}^{۲})\,\text{لا}_{۳}+\text{ا}_{۳}$

(۲) $\text{ی}=\text{ا}_{۱}\text{لا}_{۱}+\text{ا}_{۲}\text{لا}_{۲}\pm\text{جب}^{-۱}(\text{ا}_{۳}\,\text{ا}_{۲}\,\text{لا}_{۳})+\text{ا}_{۴}$

(۳) $\text{ی}=\text{ا}_{۱}\,\text{لوک}\,\text{لا}_{۱}+\text{ا}_{۲}\,\text{لوک}\,\text{لا}_{۲}\pm\text{لا}_{۳}\sqrt{\text{ا}_{۱}+\text{ا}_{۲}+}\;\text{ا}_{۳}$

(۴) ۲ی = ا۱ لا۱^۲ + ا۲ لا۲^۲ + ا۳ لا۳^۲ − ۳(ا۱ ا۲ ا۳)^(۱/۳) لوک لا۴ + ا۴

(۵) ۲(ا۱ ا۲ ا۳)^(۱/۳) لوک ی = ا۱ لا۱^۲ + ا۲ لا۲^۲ + ا۳ لا۳^۲ + ا

(۶) ۴ ا۱ ی = ۴ ا۱^۲ لوک لا۳ + ۲ ا۱ ا۲ (لا۱ − لا۲) − (لا۱ + لا۲)^۲
+ ۴ ا۱ ا۳

(۷) (۱ + ا۱ ا۲) لوک ی = (ا۱ + ا۲)(لا۱ + ا۱ لا۲ + ا۲ لا۳ + ا۳)

(۸) ی = −(ا۱ + ا۲) لا۱ + (۲ ا۱ − ا۲) لا۲ + (−ا۱ + ۲ ا۲) لا۳
− ½ (لا۱^۲ + لا۲^۲ + لا۳^۲) ± ⅔ {لا۱ + لا۲ + لا۳ − ۲ ا۱^۲
+ ۲ ا۱ ا۲ − ۲ ا۲^۲}^(۳/۲) + ا۳

دفعہ ۱۴۲

(۱) ی = ± (لا۱ + لا۲)^۲ + لوک لا۳ + ا۔

(۲) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

(۳) ی = لا۱^۲ + لا۲^۲ + لا۳^۲ + ا، یا ی = لا۱^۲ + ۲ لا۲ لا۳ + ا

(۴) ی = ا (لا۱ + ۲ لا۲) + ب لوک لا۳ + ۲ ا ب لوک لا۴ + ج

(۵) ی = ا (۳ لا۱ + لا۲^۳ − لا۳^۳) + ب

(۶) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

(۷) ی = ا (لا$_۱$ − لا$_۴$) + ب (لا$_۲$ − لا$_۳$) + ج، یا ی = ا (لا$_۱$ − ۲ لا$_۲$) + ب (۲ لا$_۳$ − لا$_۴$) + ج

(۸) ی = فہ (۳ لا$_۱$ + لا$_۲^۳$ − لا$_۳^۳$) ۔

(۹) ی = فہ (لا$_۱$ − لا$_۴$، لا$_۲$ − لا$_۳$)، یا ی = فہ (لا$_۱$ − ۲ لا$_۲$، ۲ لا$_۳$ − لا$_۴$)

تیرھویں باب پر متفرق مثالیں

(۱) ی^۲ = ا$_۱$ لوک لا$_۱$ − ا$_۱$ لا$_۲$ لوک لا$_۲$ + ا$_۲$ لوک لا$_۳$ + ا$_۳$

(۲) کوئی مشترک تکملہ نہیں ہے۔

(۳) ی = ا$_۱$ لوک لا$_۱$ + ا$_۲$ لا$_۲$ + (ا$_۱$ + ا$_۲$) لا$_۳$ ± √(ا$_۱$ (ا$_۱$ + ۲ ا$_۲$) لا$_۴^۲$) + ا$_۳$

(۴) ۰ = ا$_۱$ لوک لا$_۱$ + ا$_۲$ لا$_۲$ + (ا$_۱$ + ا$_۲$) لا$_۳$ ± √(ا$_۱$ (ا$_۱$ + ۲ ا$_۲$) ی^۲ + ۱)

(۵) ۲ لوک ی = ج ± (لا$_۱^۲$ + لا$_۲^۲$ + لا$_۳^۲$)

(۶) ی^۲ = لا$_۱^۲$ + لا$_۲^۲$ + لا$_۳^۲$ + ج

(۷) ۴ ی + لا$_{1}^{2}$ + لا$_{2}^{2}$ + لا$_{3}^{2}$ = ۰

(۱۰) ی = فہ (لا$_{1}$ لا$_{2}$ لا$_{2}'$ + لا$_{3}$ + لا$_{4}'$ لا$_{4}$ لا$_{5}$)

(۱۱) (۳) ۳ ی = لا$_{1}^{3}$ − ۳ لا$_{1}$ لا$_{2}$ + ج

چودہواں باب

دفعہ ۱۴۴

(۱) ی = لا^{3} + لا ف (ما) + فا (ما)

(۲) ی = لوک لا لوک ما + ف (لا) + فا (ما)

(۳) ی = − $\frac{1}{\text{لا}^{2}}$ جب لا ما + ما ف (لا) + فا (لا)

(۴) ی = لا^{3} ما^{3} + ف (ما) لوک لا + فا (ما)

(۵) ی = جب (لا + ما) + $\frac{1}{\text{ما}}$ ف (لا) + فا (ما)

(۶) ی = − لا ما + ف (لا) + قو$^{\text{لا ما}}$ فا (لا)

(۷) ی = (لا^{2} + ما^{2})^{2} − ۱

(۸) ی = ما^{2} + ۲ لا ما + ۲ ما + ا لا^{2} − ب لا + ج

(۹) ی = (لا^{۲} + ما^{۲})^{۲} (۱۰) ی = لا^{۳} ما^{۳} + ما(۱ - لا^{۳})

دفعہ ۱۴۵

(۱) ی = فا$_{۱}$(ما + لا) + فا$_{۲}$(ما + ۲لا) + فا$_{۳}$(ما + ۳لا)

(۲) ی = ف(ما - ۲لا) + فا(۲ما - لا)

(۳) ی = ف(ما + لا) + فا(ما - لا)

(۴) مخروطی نما ۴لا^{۲} - ۸لاما + ما^{۲} + ۸لا - ۴ما + ی + ۲ = ۰

دفعہ ۱۴۶

(۱) ی = ف(۲ما - ۳لا) + لافا(۲ما - ۳لا)

(۲) ی = ف(۵ما + ۴لا) + لافا(۵ما + ۴لا)

(۳) ی = ف(ما + ۲لا) + لافا(ما + ۲لا) + فہ(ما)

(۴) ی(۲لا + ما) = ۳لا

دفعہ ۱۴۷

(۱) ی = لا^{۴} + ۲لا^{۳}ما + ف(ما + لا) + لافا(ما + لا)

(۲) ی = ۶لا^{۲}ما + ۳لا^{۳} + ف(ما + ۲لا) + فا(۲ما + لا)

(۳) و = -۲π لا^{۲} ما^{۲}

دفعہ ۱۴۸

(۱) ی = و$^{لا+۲ما}$ + ف(ما + لا) + لافا(ما + لا)

(۲) ی = لا^۲ (۳ لا + ما) + ف (ما + ۳ لا) + لا فا (ما + ۳ لا)

(۳) ی = - لا^۲ جم (۲ لا + ما) + ف (ما + ۲ لا) + لا فا (ما + ۲ لا) + فہ (ما) -

(۴) ی = لا ہو^(لا - ما) + ف (ما - لا) + فا (۲ ما + ۳ لا)

(۵) و = (لا + ما)^۳ + ف (ما + خ لا) + فا (ما - خ لا)

(۶) ی = ۲ لا^۲ لوک (لا + ۲ ما) + ف (۲ ما + لا) + لا فا (۲ ما + لا)

دفعہ ۱۴۹

(۱) ی = لا جب ما + ف (ما - لا) + لا فا (ما - لا)

(۲) ی = لا^۴ + ۲ لا^۳ ما + ف (ما + ۵ لا) + فا (ما - ۳ لا)

(۳) ی = جب لا - ما جم لا + ف (ما - ۳ لا) + فا (ما + ۲ لا)

(۴) ی = جب لا ما + ف (ما + ۲ لا) + فا (ما - لا)

XVIII (۵) ی = ۱/۲ امس لا مس ما + ف (ما + لا) + فا (ما - لا)

(۶) ما = لا لوک ت + ت لوک لا + ف (ت + ۲ لا) + فا (ت - ۲ لا)

دفعہ ۱۵۰

(۱) ی = ف (لا) + فا (ما) + ہو^(۳ لا) فہ (ما + ۲ لا)

(۲) ی = ہو^(لا) {ف (ما - لا) + لا فا (ما - لا)}

(۳) و = Σ ا قو^(ھ(لا + ھ ت))

(۴) ی = ف (ما + لا) + قو^(-لا) فا (ما - لا)

(۵) ی = Σ ا قو^(ھ(لا + ھ ما)) + Σ ب قو^(ک(لا + ۲ک ما))

(۶) و = Σ ا قو^(ن(لا جم عہ + ما جب عہ))

(۷) ی = قو^(لا) {ف (ما + ۲لا) + Σ ا قو^(ک(ما + ۲ک لا))}

(۸) ی = ۱ + قو^(-لا) {(ما - لا)^۲ - ۱}

دفعہ ۱۵۱

(۱) ی = ۱/۲ قو^(۲لا - ما) + قو^(لا) ف (ما + لا) + قو^(۲لا) فا (ما + لا)

(۲) ی = ۱ + لا - ما - لاما + قو^(لا) ف (ما) + قو^(-ما) فا (لا)

(۳) ی = ۱/۸۲ {جب (لا - ۳ما) + ۹ جم (لا - ۳ما)}
+ Σ ا قو^(ک(ما + ک لا))

(۴) ی = لا + ف (ما) + قو^(-لا) فا (ما + لا)

(۵) ما = -قو^(لا + ی) + Σ ا قو^(لا قط عہ + ی مس عہ)

(۶) ی = قو^۲لا {لا^۲مس (ما + ۳ لا) + لا ف (ما + ۳ لا)
+ فا (ما + ۳ لا) }

دفعہ ۱۵۲

(۱) ما^۲ر – ۲ ماس + ت = ع + ۶ ما

(۲) ع ت – ق س = ق^۳

(۳) ر + ۳ س + ت + (رت – س^۲) = ۱

(۴) ع ق (ر – ت) – (ع^۲ – ق^۲) س + (ع ما – ق لا)
(رت – س^۲) = ۰

(۵) ۲ ع ر + ق ت – ۲ ع ق (رت – س^۲) = ۱

(۶) ق ر + (ی ق – ع) س – ع ت ی = ۰

دفعہ ۱۵۴

(۱) ی = ف (ما + جب لا) + فا (ما – جب لا)

(۲) ی = ف (لا + ما) + فا (لا ما)

(۳) ما – ما (لا + ما + ی) = فہ (لا) یا ی = ف (لا)
+ فا (لا + ما + ی)

(۴) ی = ف (لا + س ما) + فا (لا – س ما)

(۵) ی = ف (لا^۲ + ما^۲) + فا (ما/لا) + لا ما

(۶) ما = ف (لا + ما + ی) + لا فا (لا + ما + ی)

(۷) ۳ ی = ۴ لا^۳ ما - لا^۲ ما^۴ - ۶ لوگ ما - ۳

دفعہ ۱۵۷

(۱) ع + لا - ۲ ما = ف (ق - ۲ لا + ۳ ما)، لہ = - ۱/۲

(۲) ع - لا = ف (ق - ما)، لہ = ∞

(۳) ع - لا/ما = ف (ق - ۲ ما)، لہ = ∞

(۴) ع - ما = ف (ق + لا)، ع + ما = فا (ق - لا)، لہ = ±۱

(۵) ع - ا = ف (ق - ۲ لا)، ع - ۲ ما = فا (ق - لا)، لہ = - ۱ یا - ۱/۲

(۶) ع لا - ما = ف (ق ما - لا)، لہ = - لا یا - ما

(۷) ی ع - لا = ف (ی ق - ما)، لہ = ی/ع ق

دفعہ ۱۵۸

(۱) ی = ا لا + ب ما - ۱/۲ لا^۲ + ۲ لا ما - ۳/۲ ما^۲ + ج

ی = ۱/۲ لا^۲ (۱ + ۳ م^۲) + (۲ + ۳ م) لا ما + ن لا + فہ (ما + م لا)

= ۲ لا ما - ۱/۲ (لا^۲ + ۳ ما^۲) + ن لا + فہ (ما + م لا)

XIX (۲) ی = $\frac{1}{2}$ (لا^{2} + ما^{2}) + ل لا + ب ما + ج ، ی = $\frac{1}{2}$ (لا^{2} + ما^{2}) + ن لا + سا (ما + م لا)

(۳) ی = قو$^{\text{لا}}$ + ما^{2} + ل لا + ب ما + ج ، ی = قو$^{\text{لا}}$ + ما^{2} + ن لا + سا (ما + م لا)

(۴) لا = $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) ، ما = $\frac{1}{2}$ {سا َ(بہ) - فہ َ(عہ)} ،

ی = لا ما + $\frac{1}{2}$ {فہ (عہ) - سا (بہ)} + بہ ما

(۵) لا = بہ - عہ ، ما = فہ َ(عہ) - سا َ(بہ) ،

ی = لا ما - فہ (عہ) + سا (بہ) + بہ ما

(۶) ی + $\frac{\text{ما}}{\text{م}}$ + م لا - ن لوک لا = فہ (لا$^{\text{م}}$ ما) ، دوسرا طریقہ ناکام رہتا ہے ۔

(۷) ی^{2} = لا^{2} + ما^{2} + ۲ ل لا + ۲ ب ما + ج ،

ی^{2} = لا^{2} + ما^{2} + ۲ ن لا + سا (ما + م لا)

(۸) ۲ ی = ما^{2} - لا^{2}

چودھویں باب پر تفرق مثالیں

(۱) ی = لا^{2} ما^{2} + لا ف (ما) + فا (ما)

(۲) ی = قو$^{\text{لا+ما}}$ + ف (لا) + فا (ما)

(۳) ما ی = ما لوک ما - ف (لا) + ما فا(لا)

(۴) ی = ف(لا + ما) + لا فا(لا + ما) - جب(۲ لا + ۳ ما)

(۵) ی = ف (ما + لوک لا) + لا فا (ما + لوک لا)

(٦) ی = لا + ما + ف (لا ما) + فا(لا^۲ ما)

(۷) ی = لوک (لا + ما) ف (لا^۲ - ما^۲) + فا(لا^۲ - ما^۲)

(۸) ۴ ی = ٦ لا ما - ۳ لا^۲ - ۵ ما^۲ + ۴ الف لا + ۴ ب ما + ج ،

۴ ی = ٦ لا ما - ۳ لا^۲ - ۵ ما^۲ + ۲ ن لا + ۲ سا (ما + م لا)

(۹) ۳ ی = ۳ ج ± ۲ (لا + الف)^(۳/۲) ± ۲ (ما + ب)^(۳/۲)

(۱۰) م ی = جب ما + م^۲ جب لا - م ن لا = م فہ (ما + م لا)

(۱۱) ۲ لا = عہ - بہ ، ۲ ما = سا (بہ) - فہ (عہ) ،

۲ ی = ۳ لا^۲ - ٦ لا ما - ۷ ما^۲ + فہ (عہ) - سا (بہ) + ۲ بہ ما

(۱۲) ی = لا^۳ + ما^۳ + (لا + ما + ۱)^۲

(۱۳) ی = لا^۲ - لا ما + ما^۲

(۲۰) ع لا + ق ما = ف (ع^۲ + ق^۲) ، ع ما - ق لا = فا(ق/ع)

کُل کتاب پر متفرق مثالیں

(۱) (لا^۲ - ما^۲)^۲ = ج لا ما (۲) ما = لا^۲ + ج قو^(-لا^۲)

(۳) ۲ قط لا قط ا = لا + جب لا جم لا + ج

(۴) (لا ما + ج)^{2} = ۴ (لا^{2} + ما)(ما^{2} − ج لا)

(۵) ۱ + لا ما = ما (ج + جب$^{-1}$ لا) √(۱ − لا^{2})

(۶) ما = (ا − ۱/۴ لا) جم ۲ لا + ب جب ۲ لا

(۷) ما = لا^{2}/۵ − ۶ لا/۲۵ + ۲۸/۱۲۵ + ۱/۱۶ لا و^{لا} (جب ۲ لا

− جم ۲ لا) + ا و$^{-لا}$ + ب و^{لا} جم (۲ لا + ع)

(۸) ما = ا + ب لا + ج لا لوک لا

+ لوک لا + ۱/۲ لا (لوک لا)^{2} + ۱/۲ لا^{2}

(۹) ما + قط لا = ج مس لا

(۱۰) لا = ا و^{۲ت} + ب و$^{-۲ت}$ − ۲/۵ (جم ت − جب ت)،

ما = ا و^{۲ت} − ۳ ب و$^{-۲ت}$ − ۶/۵ جم ت

(۱۱) لا$^{۲/۳}$ = (ما − ۱)$^{۲/۳}$ + ج، نادر حل ما = ۱

(۱۲) ما = ا قم (ب − لا)

(۱۳) ما = (ا + ب لا + لا^{2}/۶۴) جب ۲ لا + (ع + ف لا

− لا^{3}/۹۶) جم ۲ لا

(۱۴) ۲ لا ما = ۳ لا^{2} + ج،

(۱۵) ی + لا ما = ج (لا + ما − لا ما)

(۱۶) لا^{3} + ما^{3} + ی^{3} = ج لا ما ی

(۱۷) ی = ف (لا ما) − $\frac{1}{2}$ لا^{2} − $\frac{1}{2}$ ما^{2}

(۱۸) (لا − ما) قو$^{\frac{\text{لا − ی}}{\text{لا − ما}}}$ = ف ($\frac{\text{لا − ۳ ما + ی}}{\text{(لا − ما)}^{2}}$)

(۱۹) (ی + لا)^{2} = (ی + ۲ ما) ف ($\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$)

(۲۰) ی = ا لا + ب ما + ا^{2} + ب^{2}، نادر تکملہ ۴ ی + لا^{2} + ما^{2} = ۰

(۲۱) ی = قو$^{\text{لا}}$ ف (لا − ما) + فا (ما)

(۲۲) ی = ا لا^{2} + ب ما + ۴ ا^{2}، نادر تکملہ ۱۶ ی + لا^{4} = ۰

(۲۳) ی = ف (لا + ما) + فا (لا − ما) + $\frac{1}{6}$ (لا^{3} + ما^{3})

(۲۴) ی = لا ف (ما) + ما فا (لا)

(۲۵) ج ی = (لا + ا) (ما + ب)

(۲۶) ی = $\frac{1}{2}$ لا ما + ف ($\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$) + لا فا ($\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$)

(۲۷) ی = ف (ی + لا) + فا (ی + ما)

(۲۸) ما (لا + ج) = ج^{2} لا، نادر تکملہ ما = ۰ اور ما + ۴ لا^{2} = ۰

(۲۹) ا ما^{4} = (لا + ب)^{5}

(۳۰) $\text{ما} = \text{ا جم} \left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \right) + \text{ب جب} \left(\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \right)$

(۳۱) $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = 2 (\text{لا جم عہ} + \text{ما جب عہ} + \text{ج})$

(۳۲) $\text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}} - \frac{3}{2} \text{قو}^{2\text{لا}} + \frac{1}{2} \text{قو}^{3\text{لا}}$

(۳۳) $\text{لا} = \text{قو}^{-\text{کت}} (\text{ا جم لہ ت} + \text{ب جب لہ ت}) + \text{ج جم} (\text{ع ت} - \text{عہ})$

جہاں $\text{ج} = \frac{1}{\sqrt{(\text{کہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{ع}^2)^2 + 4 \text{کہ}^2 \text{ع}^2}}$ ، $\text{مس عہ} = \frac{2 \text{کہ ع}}{\text{کہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{ع}^2}$

اور ا اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

(۳۴) $\text{ما} = \text{ا جم} (\text{جب لا}) + \text{ب جب} (\text{جب لا})$

(۳۵) (i) $\text{فا} = \text{ا لوک} (\text{ر} + \text{ی}) + \text{ب}$

(ii) $\text{فہ} = \text{ا} \int \text{قو}^{-\frac{\text{عا}^2}{4\text{د}^2}} \text{فرعا} + \text{ب}$ ، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ت}}} \text{قو}^{-\frac{\text{لا}^2}{4\text{د}^2\text{ت}}}$

(۳۶) $\text{و} = \text{ا} \left\{ \frac{1}{5} + \frac{2}{7} (3\text{ی}^2 - \text{ر}^2) + \frac{1}{35} (35\text{ی}^4 - 30\text{ی}^2\text{ر}^2 + 3\text{ر}^4) \right\}$

جہاں ر² = لا² + ما² + ی²

(۳۹) ۶ = ج (۱ + لا/ز + لا⁴/۴! ز⁴ + لا⁵/۵! ز⁵ + ...) جذر ت

+ ج (لا²/۲! ز² + لا³/۳! ز³ + لا⁶/۶! ز⁶ + لا⁷/۷! ز⁷ + ...) جذر ت

(۴۱) ما − لا = ج (لا ما − ۱) قو^(−لا)

(۴۲) ما = (۱ + لا)^(۱−ب) (۱ − لا)^(۱+ب) { ا + ب ∫ (۱

+ لا)^(−۱+ب−۱) (۱ − لا)^(−۱−ب−۱) فرلا }

اگر ۲ ا ایک صحیح عدد ہو تو تکملہ کی قیمت، ی = (۱ + لا)/(۱ − لا) رکھ کر معلوم کیجا سکتی ہے۔

(۴۳) (آ) ما = (۱ − لا²) (ا + ب لوک لا)

(ۤب) ما = (۱ − لا²) (لا + ا + ب لوک لا)

(۴۴) (۱ − لا²) ما = (ا + ب ∫ قو^(−لا²) فرلا) قو^(½ لا²)، [رکھو لوک ما

= ∫ (۶ − ½ ع) فرلا، ۶ میں تفرقی مساوات کا ایک حل

۶ = لا ہے]

(۴۵) ف (لا) = ۱ − (۲ن − ۲)/(۲ن − ۱) · لا²/۲!

$$+\frac{(\text{۲ن}-۲)(\text{۲ن}-۴)(\text{۲ن}-۶)\ \text{لا}^{۴}}{(\text{۲ن}-۱)(\text{۲ن}-۲)(\text{۲ن}-۳)\ \underline{|۴}} - \dots\dots$$

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \text{لا} - \frac{(\text{۲ن}-۲)(\text{۲ن}-۴)}{(\text{۲ن}-۱)(\text{۲ن}-۲)}\ \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \dots\dots$$

(۴۶) $\text{ما} = \text{ا}\ \text{لا}^{۵} + \text{ب}\ \text{لا}^{۳} + \text{ع}\ (\text{لا}^{۲}+۱)$، $\frac{\text{ج}}{۶}$ کی بجائے ع رکھنے سے

(۴۷) $۶ = ۱ + \frac{\text{ج}}{\underline{|۲}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{۲} + \frac{\text{ج}\{\text{ج}+۲(\text{ب}+۱)\}}{\underline{|۴}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{۴}$

$$+\frac{\text{ج}\{\text{ج}+۲(\text{ب}+۱)\}\{\text{ج}+۴(\text{ب}+۳)\}}{\underline{|۶}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{۶} + \dots$$

$$\text{و} = \left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right) + \frac{(\text{ج}+\text{ب})}{\underline{|۳}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{۳} + \frac{\{\text{ج}+\text{ب}\}\{\text{ج}+۳(\text{ب}+۲)\}}{\underline{|۵}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{د}}\right)^{۵}$$

$+ \dots\dots$

دونوں سلسلے دائرہ $|\text{لا}| = |\text{د}|$ کے اندر مستدق ہیں۔

XXI (۴۹) $\text{لا}^{۲}\ \frac{\text{فر}^{۲}\ \text{ما}}{\text{فر}\ \text{لا}^{۲}} = (۲-\text{لا}^{۲})\ \text{ما}$

(۵۰) $\frac{۱}{\text{ق}}\left\{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}\right\}$ کو صرف لا کا ایک تفاعل ہونا چاہئے، $\text{لا}^{۳}\ \text{ما} - \text{د}\ \text{لا}^{۲}\ \text{ما}^{۲} = \text{ج}$

(۵۱) $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\ \text{ب}\ \text{لا}\ \text{ما} = ۲\ \text{د}\ \text{لا}$

(۵۲) ۶ و ٹو = ا ∫ د^۲ ٹو فرلا + ب جہاں و = ق/فن اور ط = ∫ و فرلا

(۵۳) ف ـ ن مم (ن لا + ۱) + ق = ن^۲

(۵۴) ما (۱ - لا) = ا (۳ - ۲ لا) قو^{۲لا} + ب (۱ - ۲ لا) قو^{-۲لا}

(۵۶) لا^۳ + مای = ج (ما + ی)

(۵۷) ما = ا قو^{لا} + قو^{-۲لا} (ب جم لا √۳ + ج جب لا √۳)

+ ۳/۸ لا^۲ + ۱/۲۴۶۴۹ قو^{-۲لا} {۱۵۷ لا (۶ جم لا + ۱۱ جب لا)

+ ۳ (۸۳۷ جم لا - ۵۶ جب لا)}

(۵۸) ما = (۳ + ۴ لا^۲) {ا + ب ∫ (۳ + ۴ لا^۲)^{-۲} قو^{۲/۳ لا^۲} فرلا}

(۵۹) ی^۲ (لا + ما)^۲ (لا^۲ + ما^۲ + ی^۲) = ج (لا^۲ + ما^۲ - ی^۲)

(۶۰) لای = ج (ما + ی)

(۶۲) (آ) رکھو ما = - ۱/(۶ ل(لا)) · فر۶/فرلا

(۲) ما - ۱/۲ = لا (ج + مس لا)/(۱ - ج مس لا) (طریقہ کیلئے دیکھو مثال ۱۴)

(۶۵) اگر ایک ذرہ ف اِس طرح حرکت کرے کہ اِس کی رفتار سمتی نیم قطر و ف کے متناسب ہو اور و ف پر اور نیز ایک ثابت خط و ک پر عمود ہو تو وہ مستقل رفتار کے ساتھ ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا محور و ک ہوگا۔

(۶۷) ر^۲ جب ۲ (طہ + عہ) = ۱، نادر حل ر^۴ = ۱

(۶۸) ما^۲ - لا^۲ = ج لا + ۲ ا^۲ ± ا √(۴ ا^۲ - ج^۲)، نادر حل ما^۲ - لا^۲ = ± ۲ ا ما

(۷۰) ۴ ا (ما - ج) = (لا - ج)^۲، نادر حل ما = لا - ا

(۷۱) لا + ا = ج جم فہ + ج لوک مس ½ فہ

(۷۲) ا جم طہ + ب جم طَہ = ک

(۷۴) ۲ ج ما = (لا + ج)^۲، نادر حل ما (ما - ۲ لا) = ۰

(۷۵) لا + ع ما + ا ع^۲ = ۰، (ما + ا ع) √(ع^۲ + ۱) = ج + ا جبز^{-۱} ع،

لا √(ع^۲ + ۱) + ع (ج + ا جبز^{-۱} ع) = ۰

کوئی نادر حل نہیں ہے۔ ع ممیز ما^۲ = ۴ ا لا سے دبیجوں کا قرن طریق تعبیر ہوتا ہے۔

(۷۷) ما = ا لا، ی = ب + √(لا^۲ + ما^۲)، ی = √(لا^۲ + ما^۲) + ف (ما/لا)

ذیلی تکملوں سے محور ی میں سے گزرتے ہوئے مستویوں کا ایک قبیل اور قائم مستدیر مخروطوں کا ایک قبیل جن کا محور محور ی ہے تعبیر ہوتے ہیں۔ عام تکملہ سے سطحوں کا ایک قبیل تعبیر ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک میں خطوطِ مستقیم کے اُن زوجوں کی لامتناہی تعداد ہوتی ہے جن میں مستوی اور مخروط منقطع ہوتے ہیں۔

(۷۸) لا^۲ + ما^۲ + ی^۲ = ف {لا^۲ + ما^۲ + (لا + ما)^۲}،

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\text{ج}^2\text{ ، }\text{ی}^2=\text{لا ما}+\text{ج}$$

$$(\text{۷۹})\quad (\text{۲لا}-\text{ما})' = \text{ج}^{\text{۵}}\,\text{ی}\,(\text{لا}+\text{۲ما})$$

$$(\text{۸۰})\quad \frac{\text{الا}-\text{ب ما}}{\text{ی}+\text{ج}}=\text{ف}\left(\frac{\text{الا}+\text{ب ما}}{\text{ی}-\text{ج}}\right)$$

$$(\text{۸۱})\ (\text{۱})\quad \text{ب}=\frac{\text{ع}}{\text{ر}}+\text{اُو}^{-\frac{\text{رت}}{\text{ل}}}$$ XXII

$$(\text{۲})\quad \text{ا}=\text{ب}-\frac{\text{ع}}{\text{ر}}\qquad(\text{۳})\quad \text{ب}=\frac{\text{ع}}{\text{ر}}$$

$$(\text{۸۲})\quad \text{ب}=\text{ا جم}(\text{ع ت}-\text{صہ})+\text{اُو}^{-\frac{\text{رت}}{\text{ل}}}\ \text{جہاں ا}$$

$$=\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ر}^2+\text{ل}^2\text{ع}^2}}\text{ ، مس صہ}=\frac{\text{ل ع}}{\text{ر}}\text{ ، اور ا}$$

اختیاری ہے۔

$$(\text{۸۳})\quad \text{ق}=\text{ا جب}(\text{ع ت}-\text{صہ})\ \text{جہاں مس صہ}$$

$$=(\text{ج ل ع}^2-\text{۱})\backslash\text{ع ج ر اور}$$

$$\text{ا}=\frac{\text{ع ج}}{\sqrt{(\text{ج ل ع}^2-\text{۱})^2+\text{ع}^2\text{ج}^2\text{ر}^2}}$$

$$(\text{۸۵})\quad \text{لا}=\text{ا جم}(\text{ت}-\text{ء})+\text{ب جم}(\text{۳ت}-\text{بہ})\text{ ،}$$

$$\text{ما}=\text{۲ا جم}(\text{ت}-\text{ء})-\text{۵ب جم}(\text{۳ت}-\text{بہ})$$

$$(\text{۸۶})\quad \text{ا اور ب ، مساوات }\text{لہ}^2(\text{ل ن}-\text{م}^2)+\text{لہ}(\text{ر ن}$$

+ ل س) + م س = ۰ کی اصلیں ہیں۔

(۹۱) لا = ا جم (ع ت - عہ) + ب جم (ق ت - بہ)،

ما = ا جب (ع ت - عہ) - ب جب (ق ت - بہ)

جہاں $\text{۲ع} = \sqrt{\text{۴ج}^2 + \text{کہ}^2} + \text{کہ}$، $\text{۲ق} = \sqrt{\text{۴ج}^2 + \text{کہ}^2} - \text{کہ}$

(۹۲) $\dfrac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2} + (\text{ا} + \text{ب}) \dfrac{\text{فری}}{\text{فرت}} + \text{ا ب ی} = \text{ا ب ج}$

(۹۳) $\text{ع} = \sqrt{\text{ن}^2 - \text{۲مہ}^2}$ سے خاص تکملہ کا حیطہ اعظم ہوتا ہے بشرطیکہ $\text{۲مہ}^2 \not< \text{ن}^2$

(۹۴) $\text{لا} = \text{ا قو}^{-\text{ک ت}}$ جم (ع ت - صہ) جہاں $\text{ع} = \sqrt{\text{ن}^2 - \text{ک}^2}$

(۹۷) $\text{فہ} = \frac{1}{2}\, \text{و ا}^3 \text{ز}^2$ جم ط

(۹۸) $\text{ما جب} \dfrac{\text{ع ب}}{\text{ج}} = \text{ا جب} \left(\dfrac{\text{ع لا}}{\text{ج}}\right) \text{جم} (\text{ع ت} + \text{ا})$

(۱۰۰) فہ = ج جمزم (ما + صہ) جم (م لا - ن ت)

(۱۱۵) (۴) $\text{ع}_{\text{لا}} = \text{ا}(-2)^{\text{لا}} + \text{ب}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{لا}}$

(۸) $\text{ع}_{\text{لا}} = 2^{\text{لا}} \left(\text{ع جم} \dfrac{\pi\, \text{لا}}{3} + \text{ق جب} \dfrac{\pi\, \text{لا}}{3}\right)$

(۱۰) $\text{ع}_{\text{لا}} = \text{ا}(-9)^{\text{لا}} + \text{ب} + \dfrac{2}{11}$

(۱۱۹) $\text{ع} = \dfrac{\text{ک}}{\text{م}}\ \text{جم}\ \dfrac{\text{م لا}}{\text{ج}}\ \text{جب م ت}$

(۱۲۰) $\text{ی} = \text{قو}^{-\text{ما}}\ \text{جب لا}$

جوابوں کی متبادل شکلوں پر نوٹ

بعض مثالوں میں حل کے طریقہ کو ذرا سا بدل لینے سے کامل ابتدائی کی مختلف شکل حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً دفعہ ۷ کی مثال ۲ میں جواب ا ما = جم (ا لا + ب) ہے لیکن طالب علم جواب ا ما = جب (ا لا + ب) یا ا ما = جبز (ا لا + ب) بھی بہ آسانی حاصل کر سکتا ہے۔ اگر پہلی شکل میں ب کی بجائے (ب - $\frac{1}{2}$ π) کو رکھا جائے تو جواب کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے اور اگر اس دوسری شکل میں ا اور ب کی بجائے علی الترتیب ا خ اور ب خ کو رکھا جائے تو خ سے تقسیم کرنے پر جواب کی تیسری شکل حاصل ہوتی ہے۔ دیگر شکلیں ا کی بجائے $\frac{1}{ا}$ رکھ کر حاصل کی جا سکتی ہیں۔

دفعہ ۱۱۶ کی مثال ۸ کے جواب میں ج^{2} کی بجائے -ج^{2} یا ج یا -ج کو رکھا جا سکتا ہے۔ عام طور پر اختیاری مستقل کے متعلق یہ فرض کیا جاتا ہے کہ وہ تمام قیمتیں، حقیقی یا خیالی یا ملتف اختیار کرتا ہے اور اس کی بجائے ایک نئے اختیاری مستقل کے کسی تفاعل کو رکھا جا سکتا ہے۔

جہاں تکملوں کے زوج مطلوب ہوں فطرتاً اکثر متبادل زوج حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۱۳ کی مثالوں ۵ اور ۶ کے جوابوں کی بجائے علی الترتیب

ما - ی = ا (ما - لا)، (ما - ی)^{2} (لا + ما + ی) = ب

لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} = ا، اور لا^{2} + ۲ ما^{2} − ۲ مای = ب

کو رکھا جا سکتا ہے۔ مثالوں کے اِس جٹ میں زوجوں ع = ا، و = ب کی بجائے ف (ع، و) = ا، فا (ع، و) = ب کو رکھا جا سکتا ہے جہاں ف اور فا، ع اور و کے کوئی دو غیر تابع تفاعل ہیں۔

جزئی تفرقی مساواتوں کی متعدد مثالوں میں متبادل جواب حاصل ہو سکتے ہیں مثلاً دفعہ ۲۴ کی مثال ۴ کا جواب $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ جب ع = $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ جم ع اور دفعہ ۱۳۹ کی مثال ۲ کا جواب ی^{2} (ا − ما^{2}) = (لا + ب)^{2} حاصل ہو سکتا ہے۔ (ملاحظہ ہو نوٹ صفحہ ۳۴۱)

نوٹ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ کامِل ابتدائی کو حقیقت میں کامل بنانے کے لیے ہمیں اُن انتہائی شکلوں کا لحاظ رکھنا چاہیئے جو اختیاری مستقلوں کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ دفعہ ۱۴ مثال ۴ میں کامِل ابتدائی لا − ما + ج = لوک (لا + ما) ہے۔ اب ج کو − ∞ لینے سے حل لا + ما = ۰ حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح دفعہ ۷۰ مثال ۲ میں کامِل ابتدائی لا = ا + ما + ب لوک (ما − ب) ہے۔ یہاں $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ = + ∞ لینے سے حل ما = ب حاصل ہوتا ہے۔ ایسے حلوں اور اِن کی ہندسی تعبیروں پر میں نے تفصیل کے ساتھ اپنے مقالہ

The incompleteness of Complete Primitives of Differential Equations

(مطبوعہ میتھمیٹیکل گزٹ سنہ ۱۹۲۹ء) میں بحث کی ہے۔ نیز اِس

مقالہ میں کل تفرقی مساوات

ف فرلا + ق فرما + س فری = ۰

کے نادر حلوں سے متعلق بعض نئے نتیجے بیان کئے گئے ہیں۔

تمت

اشاریہ

تفرقی مساواتیں

اغلاط نامہ

تفرقی مساواتیں

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۵	۲	تو ما	و-ما	۱۴۰	شکل	tac-locus	تماس
۳۷	۱۷	نظام	قبیل	۱۴۱	۱۱ سطر	"	"
۴۵	۶	نہوتی	ہوتی	۱۴۳	۱۹	"	"
۵۶	۱	فو لا	و لا	۱۸۵	فٹ نوٹ سطر ۱	فروفیسر	پروفیسر
۸۸	۱	اختیاہی	اختیاری				
۹۱	۱۳	۲ و / سہ ھ	۲ و / سہ ھ	۱۹۱	شکل	ﻻ	لا
۱۰۹	۱۴	و-۳	و-۳ ا	"	فٹ نوٹ سطر ۱	(لا، ا)	(لا، ا)
۱۱۳	۱۸	طول	طول میں	۱۹۳	۴ سطر	جب	جب،
۱۳۷	۱ و ۴ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۱	tac-locus	تماس	۱۹۶	۲ تا ۳		پہلی رقم سے پہلا تقرب تعبیر ہوتا ہے، یہ تقرب دفعہ ۵۵ میں زیر بحث آچکا تھا اور اس کو رد کردیا جا چکا تھا۔
۱۳۸	۵	"	"				
۱۳۹	۱۲	"	"				
۱۴۰	۱۳	"	"				

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۹۷	۱۷	جہاں گ = حرف ا	۰	۲۹۷	۱۰	رم	رقم
۱۹۹	۴	لا =	لا = ۰	۳۲۵	۱۲	کو استحالہ	کو استحالہ لا^۲ = لا
۲۰۲	۶	۰ = ۲، ۴ ،	ھ = ۲، ۴ ،	۳۳۰	۱۵	- ل^۲/۲	- ل^-۲/۲
۲۱۲	۳	پ	ع				
۲۱۶	۱۱	تفرقی	تفرقی	۳۵۵	۵	حلی	خطی
؍؍	فٹ نوٹ سطر ۲	تغیر	تعبیر	۳۵۷	۷	دِس	اِس
				۳۶۵	فٹ نوٹ سطر ۱ و ۲	اندرومیری اَمپیرلیونس	اندرومیری امپیر (لیونس)
۲۲۰	۶	یہ ن	ن				
؍؍	۱۱	ج + ۲ ن - ۳	ج + ۲ ن - ۲	۳۷۰	۱۷ سطر	کرنے نے	کرنے
۲۲۶	۱۳	کے	کے،	؍؍	۲۴	(- ۱ ۱	(- ۲ ۱
۲۳۵	۳	حل	مساوات	۳۷۵	۹	تکمل پذیرا	تکمل پذیر
۲۳۶	۸	موورسری	دوسری	؍؍	۲۰	تراحف	تراش
۲۳۷	۱۶	قوت نما	قوت نمائی				
۲۴۹	۱۹	ل/ن-۱	ا/ن-۱	۳۹۰	۱	تقاعل	تفاعل
				۳۹۴	۲	برنقطہ	ہرنقطہ
۲۶۰	۱۲	باقاعدہ	باقاعدہ^۱	۴۵۵	۶	جفب ف / جھف لا	جفب ف / جفب لا
؍؍	فٹ نوٹ سطر	Index	Index ^۲				
۲۶۹	۱۰ سطر	۲/۲	۲	۵۰۰	۱۵	موجوگی	موجودگی
۲۷۶	۱۵، ۹ و ۱۶	جف فا	جف فا	۵۲۱	۱۴	ل+ / ل-۱	ا+ / ل-۱
				۵۶۲	۸	۲ (لا + ل)^۲	۲ (لا + ل)^{۳/۲}
۲۷۹	۱۰	فرنی	فری	؍؍	۱۷	۰ = لا	۱ = لا
۲۸۲	۱۳	تکمیل پذیر	ناتکمل پذیر				